# ١-٥ المدى للبيانات المجموعة وغير المجموعة

فمن هذه المعلومات، قد نظنّ أن الاثنين عادا إلى المنزل وقد اصطادا كميّتين متماثلتين لأن الكتلة الكلية وعدد الأسماك التي تم صيدها هي نفسها، بينما الأمر مختلف تمامًا كما يبيّن الشكل الآتي:

حصيلة صيد أحمد: ٢ كغم ، ٢ كغم ، ٢ كغم ، ٢ كغم ، ٢ كغم (الوسط الحسابي للكتل = ١٠ ÷ ٥ = ٢)

حصيلة صيد علي: ٠,٨ كغم ، ١ كغم ، ١,٢ كغم ، ٦ كغم (الوسط الحسابي للكتل = ١٠ ÷ ٥ = ٢)

على الرغم من أن الوسط الحسابي لما اصطاده كل من أحمد وعلي هو نفسه، وكذلك مجموع كتلة ما اصطاد كل منهما هو ١٠ كغم، إلّا أننا نرى تشتتًا كبيرًا في ما اصطاده علي.

ولمعرفة مدى اتساق ما اصطاده كل منهما، نحن بحاجة إلى **مقاييس التشتت Dispersion** بجانب معرفة مقاييس النزعة المركزية.

من مقاييس التشتت المستخدمة لوصف انتشار القيم في مجموعة بيانات هي: **المدى ، المدى الربيعي ، الانحراف المعياري**.

في البيانات **غير المجموعة ungrouped** ، يكون **المدى range** أبسط مقياس للتشتت، حيث يسهل حسابه، ويساوي الفرق بين أكبر قيمة وأصغر قيمة في التوزيع الإحصائي.

أما بالنسبة للبيانات **المجموعة grouped** فلا يمكننا حساب القيمة الدقيقة للمدى، ولكن يمكننا تقديرها من خلال إيجاد القيمتين اللتين يقع بينهما. تُعرف هاتان القيمتان بـ **الحد الأدنى lower boundary والحد الأعلى upper boundary** للمدى.

يُعدّ المدى أبسط مقاييس التشتت حيث يتميز بسهولة حسابه، ويستخدم في مواقف كثيرة من الحياة اليومية.

**مُساعِدة:** كلما كانت قيمة المدى أقل كانت القيم أكثر اتساقًا.

# ١-٥ الأمثلة ١ ، ٢ ، ٣

## مثال ١

إذا كان عدد طلبة ستة فصول في مدرسة ما هو: ٢٢ ، ٢١ ، ٢٤ ، ٢٨ ، ٢٦ ، ٢٣ فأوجد مدى عدد الطلبة في فصول هذه المدرسة.

## الحلّ

ترتيب قائمة البيانات يسهّل تحديد أصغر قيمة وأكبر قيمة: ٢١ ، ٢٢ ، ٢٣ ، ٢٤ ، ٢٦ ، ٢٨

مدى عدد الطلبة يساوي ٢٨ − ٢١ = ٧

## الحلّ (تابع)

المدى = أكبر قيمة − أصغر قيمة

## مثال ٢

في إحدى شركات النقل، يعمل ١٢ شخصًا يتقاضى كل منهم ٢٬٢٥٠ ريالًا عُمانيًا في الساعة، وخمسة أشخاص آخرون يتقاضى كل منهم ٥٬٥٠٠ ريالًا عُمانيًا في الساعة، وشخصان يتقاضى كل منهما ٩٬٢٥٠ ريالًا عُمانيًا في الساعة.

أ) ما مدى الدخل في الساعة؟

ب) مدى الدخل في شركة أخرى هو ٥ ريالات عُمانية في الساعة، علمًا بأنها تعطي للوظائف العليا الراتب نفسه الذي تعطيه الشركة الأولى؛ أيّ الشركتين أكثر اتساقًا في طريقة الدفع؟

خالد كمال
khaled-math.edu

## الحلّ

أ) مدى الدخل في الساعة هو ٩٬٢٥٠ − ٢٬٢٥٠ = ٧ ريالات عُمانية

ب) مدى الدخل في الساعة للعاملين في الشركة الثانية أقل؛ وعليه، فإن انتشار الدخل في الساعة يكون أصغر من الشركة الأولى، الأمر الذي يعني أنها أكثر اتساقًا في طريقة الدفع.

## مثال ٣

يبيّن مخطّط الساق والورقة الآتي عدد المركبات التي عبرت جسرًا في الأسبوعين الماضيين (أربعة عشر يومًا):

| | |
|---|---|
| ٢ | ٩ ٧ ٤ |
| ٣ | ٩ ٨ ٦ ٢ ١ ١ |
| ٤ | ٨ ٦ ٣ |
| ٥ | ٧ ٥ |

المفتاح: ١ | ٣ يمثّل ٣١ مركبة. أوجد مدى عدد المركبات.

## الحلّ

المدى = ٥٧ − ٢٤ = ٣٣ مركبة

المدى = أكبر قيمة − أصغر قيمة

**١-٥ الأمثلة ٤ ، ٥**

## مثال ٤

يبيّن الجدول الآتي التوزيع التكراري للمتغيّر ل. أوجد المدى للمتغير ل.

## مثال ٤ (تابع)

| ل | التكرار | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ١٧ | ٢٤ | ٣١ | ٣٨ | ٤٥ | ٥٢ | ٥٩ |
| ١ | ٤ | ٧ | ١١ | ١٣ | ٨ | ٦ |

## الحلّ

المدى = ٥٩ − ١٧ = ٤٢

أكبر قيمة للمتغير ل هي ٥٩ ، وأصغر قيمة للمتغير ل هي ١٧

## مثال ٥

يبيّن الجدول التكراري الآتي أطوال ٢٠ نبتة من نبات دوّار الشمس:

| طول النبتة (ل) سم | عدد نبتات دوّار الشمس |
|---|---|
| ٤٠ ≤ ل < ٨٠ | ١ |
| ٨٠ ≤ ل < ١٠٠ | ٤ |
| ١٠٠ ≤ ل < ١١٥ | ٥ |
| ١١٥ ≤ ل < ١٢٥ | ٥ |
| ١٢٥ ≤ ل < ١٥٠ | ٤ |

## مثال ٥ (تابع)

أ) أوجد: ١) الحد الأدنى لمدى أطوال نبتات دوّار الشمس ، ٢) الحد الأعلى لمدى أطوال دوّار الشمس.

ب) لخّص ما تعرفه عن مدى نبتات دوّار الشمس.

## الحلّ

أ) ١) ١٢٥ − ٨٠ = ٤٥ سم  ٢) ١٥٠ − ٤٠ = ١١٠ سم

ب) ٤٥ سم < المدى < ١١٠ سم

الحد الأدنى = الحد الأدنى للفئة الأخيرة − الحد الأعلى للفئة الأولى

الحد الأعلى = الحد الأعلى للفئة الأخيرة − الحد الأدنى للفئة الأولى

المدى يقع بين ٤٥ سم و ١١٠ سم

خالد كمال
khaled-math-page.sa

**١-٥ المثالان ٦ ، ٧**

## مثال ٦

طول أطول طالب وأقصر طالب في أحد الصفوف بعد تقريبهما إلى أقرب سنتيمتر، هما ١٦٩ سم ، ١٥٠ سم على الترتيب. أوجد أصغر مدى وأكبر مدى ممكنًا لأطوال الطلبة.

## الحلّ

أصغر مدى ممكن = ١٦٨٫٥ − ١٥٠٫٥ = ١٨ سم

أكبر مدى ممكن = ١٦٩٫٥ − ١٤٩٫٥ = ٢٠ سم

الفترات التي يقع فيها طولا الطالبين هي ١٦٨٫٥ ≤ أ < ١٦٩٫٥ سم ،
و ١٤٩٫٥ ≤ أ < ١٥٠٫٥ سم

**مُساعِدة:** الحد الأدنى للمدى = الحد الأدنى للفئة الأخيرة − الحد الأعلى للفئة الأولى ؛ الحد الأعلى للمدى = الحد الأعلى للفئة الأخيرة − الحد الأدنى للفئة الأولى

## مثال ٧

يبيّن الجدول التكراري الآتي أطوال ٣٠ قلم رصاص مقربة إلى أقرب سنتيمتر:

| طول الأقلام (ل إلى أقرب سم) | عدد الأقلام (ت) | | |
|---|---|---|---|
| ٨ | ٩ | ١٠ | ١١ |
| ٧ | ١٢ | ٦ | ٥ |

أ) أوجد: ١) الحد الأدنى لمدى الأطوال ، ٢) الحد الأعلى لمدى الأطوال.
ب) حدّد مدى الأطوال.

## الحلّ

تمثّل كل فئة مدى من الأطوال لأنها مقربة إلى أقرب سنتيمتر
الفئات الفعلية هي ٧,٥ ≤ ل < ٨,٥ ؛ ٨,٥ ≤ ل < ٩,٥ ؛ ٩,٥ ≤ ل < ١٠,٥ ؛
١٠,٥ ≤ ل < ١١,٥

ا) الحد الأدنى = ١٠,٥ − ٨,٥ = ٢ سم  ٢) الحد الأعلى = ١١,٥ − ٧,٥ = ٤ سم
ب) يقع المدى بين ٢ سم و ٤ سم

### تمارين ٥-١

**١)** أوجد مدى كل مجموعة من مجموعات الأعداد الآتية:

أ) ٤ ، ٧ ، ٧ ، ٩ ، ١٢ ، ٢١

ب) ٢٣ ، ١٥ ، ٢٨ ، ٢٢ ، ١٢ ، ٢١

ج) −٣ ، ٥ ، ١٨ ، ٢٤ ، ٢٩ ، ٣٧

**٢)** تبيّن الجداول الآتية التوزيع التكراري لثلاثة متغيّرات س ، ص ، ع. اذكر مدى كل منها:

| المتغيّر (س) | التكرار (ت) | | |
|---|---|---|---|
| ١٠ | ١١ | ١٢ | ١٣ |
| ٥ | ٧ | ٩ | ٤ |

أ) التوزيع التكراري للمتغيّر س

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

| المتغيّر (ص) | التكرار (ت) | | |
|---|---|---|---|
| ٧ | ٩ | ١١ | ١٣ |
| ٠ | ١٥ | ٢٠ | ١٤ |

ب) التوزيع التكراري للمتغيّر ص

| المتغيّر (ع) | التكرار (ت) | | | |
|---|---|---|---|---|
| ٦٠ | ٦٥ | ٧٠ | ٧٥ | ٨٠ | ٨٥ |
| ١٧ | ٢٣ | ٢٨ | ٥٩ | ٢١ | ١٢ |

ج) التوزيع التكراري للمتغيّر ع

**٣)** يبيّن الجدول الآتي عدد الأخوة وعدد الأخوات لـ ٢٧ طفلًا:

| | | | | | | الأخوات |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ٠ | ١ | ٢ | ٣ | ٤ | ٥ | الأخوة |
| ١ | ٢ | ١ | ٠ | ٠ | ٠ | ٠ |
| ٢ | ٢ | ٢ | ١ | ١ | ٠ | ١ |
| ١ | ٣ | ٤ | ٠ | ٠ | ١ | ٢ |
| ٣ | ٠ | ٢ | ١ | ٠ | ٠ | ٣ |

أوجد مدى عدد:

أ) الأخوة.

ب) الأخوات.

ج) الأخوة والأخوات.

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

**٤)** يبيّن الجدول الآتي الزمن الذي يستغرقه ٥٠ طالبًا بين دخول قاعة الطعام والخروج منها وقت الغداء، مقرّبًا إلى أقرب دقيقة:

| الوقت المستغرق (دقيقة) | عدد الطلبة (ت) | |
|---|---|---|
| ٢٠ – ٢١ | ٢٢ – ٢٤ | ٢٥ – ٣٠ |
| ٦ | ٣٩ | ٥ |

أوجد الحد الأدنى والحد الأعلى لمدى الزمن المستغرق.

*(مُساعِدة: الحد الأدنى للفئة* ٢٢ – ٢٤ *دقيقة هو* ٢١٫٥ *والحد الأعلى هو* ٢٤٫٥*)*

# تمارين ٥-١ (تابع)

**٥)** أ) تم قياس طول ٥٠ فتاة فكانت أطوال كل منهن بين ١٤٠ سم و ١٦٠ سم مقرّبة إلى أقرب ١٠ سم. أوجد الحد الأعلى لمدى الأطوال.

ب) سجّل محل لبيع العصافير كتل العصافير مقرّبة إلى أقرب غرام، فكانت بين ٢٢ غم ، ٣٠ غم. أوجد الحد الأعلى لمدى كتل العصافير.

ج) في هذا الموسم، اجتازت عداءة سباق ١٠٠ م في زمن (مقرب إلى أقرب منزلة عشرية) يقع بين ١٠٫٩ و ١٠٫٤ ثانية. أوجد الحد الأدنى لمدى زمن السباق.

**٦)** الوسط الحسابي لأطوال فريق كرة السلة في مدرسة بعد الأساسي هو ١٨٢ سم ومدى الطول هو ١٨ سم. والوسط الحسابي لأطوال فريق السباحة في المدرسة هو ١٧٥ سم ومدى الطول هو ٤٢ سم. قارن بين أطوال الفريقين.

**٧)** تم رسم مخطّط الساق والورقة لإظهار درجة الحرارة الدنيا (بالدرجات السيليزية) في موقع صحراوي ما لمدة ٢٠ يومًا متتاليًا. وكانت أعلى درجة حرارة مسجلة على مخطط الساق والورقة هي ١٢ درجة سيليزية ومدى درجات الحرارة ١٧ درجة سيليزية. ما أدنى درجة حرارة مسجلة على مخطط الساق والورقة؟

# ورقة الإجابات — تمارين ٥-١

*ملاحظة: الإجابات من حسابي لأن كتاب الطالب لا يتضمن مفتاح إجابات.*

**١)**

أ) المدى = ٢١ − ٤ = ١٧

ب) المدى = ٢٨ − ١٢ = ١٦

ج) المدى = ٣٧ − (−٣) = ٤٠

**٢)**

أ) المدى = ١٣ − ١٠ = ٣

ب) المدى = ١٣ − ٧ = ٦

ج) المدى = ٨٥ − ٦٠ = ٢٥

**٣)**

أ) أكبر عدد من الأخوة ٥ وأصغر عدد ٠ ← المدى = ٥ − ٠ = ٥

ب) أكبر عدد من الأخوات ٣ وأصغر عدد ٠ ← المدى = ٣ − ٠ = ٣

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

ج) أكبر مجموع للأخوة والأخوات = ٥ + ٢ = ٧ (طفل واحد) ، وأصغر مجموع = ١ + ٠ = ١ (طفلان) ← المدى = ٧ − ١ = ٦

**٤)**

الفئات الفعلية: ١٩,٥ ≤ ل < ٢١,٥ ، ٢١,٥ ≤ ل < ٢٤,٥ ، ٢٤,٥ ≤ ل < ٣٠,٥

الحد الأدنى للمدى = ٢٤,٥ − ٢١,٥ = ٣ دقائق

الحد الأعلى للمدى = ٣٠,٥ − ١٩,٥ = ١١ دقيقة

**٥)**

أ) الأطوال مقربة إلى أقرب ١٠ سم: الفئات الفعلية تبدأ من ١٣٥ وتنتهي عند ١٦٥ ← الحد الأعلى للمدى = ١٦٥ − ١٣٥ = ٣٠ سم

ب) الكتل مقربة إلى أقرب غرام: الحد الأعلى للمدى = ٣٠,٥ − ٢١,٥ = ٩ غم

ج) الزمن مقرب إلى أقرب منزلة عشرية: الحد الأدنى للمدى = ١٠,٨٥ − ١٠,٤٥ = ٠,٤ ثانية

**٦)**

فريق كرة السلة أطول في المتوسط (١٨٢ سم مقابل ١٧٥ سم) وأكثر اتساقًا في الأطوال لأن مداه أقل (١٨ سم مقابل ٤٢ سم) ، بينما أطوال فريق السباحة أقل في المتوسط وأكثر تشتتًا.

**٧)**

أدنى درجة حرارة = أعلى درجة − المدى = ١٢ − ١٧ = −٥ درجات سيليزية

# ٥-٢ المدى الربيعي

إذا احتوى التوزيع على قيمة واحدة متطرفة، فإن المدى لن يكون مقياسًا ممثِّلًا للانتشار، ويمكن أن يقود إلى تضليل النتائج.

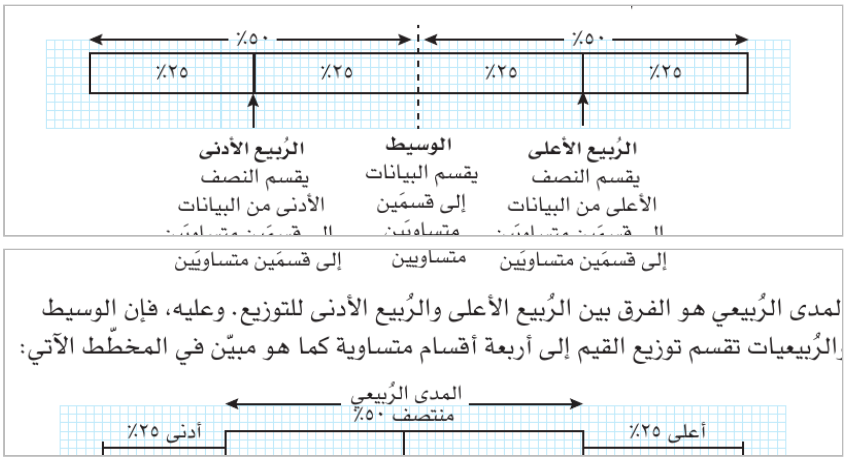
فمثلًا: مجموعة القيم ٤ ، ٦ ، ٧ ، ٧ ، ٨ ، ٨ ، ٩ ، ١٠ المدى هو ١٠ − ٤ = ٦ ، فإذا تم استبدال القيمة ١٠ بالقيمة ١٠٠ ، فإن المدى سيكون ١٠٠ − ٤ = ٩٦ ، وهذا لا يعطي صورة دقيقة عن مدى انتشار غالبية القيم. الأمر الذي يعني أننا بحاجة إلى مقياس لا يتأثر بالقيم المتطرفة.

**المدى الرُّبيعي interquartile range** هو مقياس التشتت الذي يعطي مدى نصف توزيع القيم (منتصف ٥٠٪) ، لذا فإنه لا يتأثر بالقيم المتطرفة.

الوسيط يقسم توزيع القيم إلى قسمين متساويين، حيث يكون عدد القيم نفسه في كل قسم.

**الرُّبيع الأدنى lower quartile** يقسم النصف الأدنى إلى قسمين متساويين، و**الرُّبيع الأعلى upper quartile** يقسم النصف الأعلى إلى قسمين متساويين.

المدى الرُّبيعي هو الفرق بين الرُّبيع الأعلى والرُّبيع الأدنى للتوزيع. وعليه، فإن الوسيط والرُّبيعيات تقسم توزيع القيم إلى أربعة أقسام متساوية كما هو مبيَّن في المخطَّطين الآتيين:



**نتيجة ١:** المدى الرُّبيعي = الرُّبيع الأعلى − الرُّبيع الأدنى

أي: المدى الرُّبيعي = ر٣ − ر١ ؛ ويُعرَّف الوسيط بـ ر٢

فيما يلي مجموعتين من القيم لـ س وص. ويبيّن الجدول الآتي الوسيط والمدى والمدى الربيعي لكل من المتغيّرين س ، ص:

مجموعة قيم المتغيّر س: ٠ ، ١ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ١٠ ، ١١ ، ١٢

مجموعة قيم المتغيّر ص: ٠ ، ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٧ ، ٩ ، ١٠ ، ١١ ، ١٤ ، ١٥

| الفئة | الوسيط | المدى | المدى الربيعي |
|---|---|---|---|
| مجموعة بيانات س | ٦ | ١٢ − ٠ = ١٢ | ١٠ − ٣ = ٧ |
| مجموعة بيانات ص | ٩ | ١٥ − ٠ = ١٥ | ١٣ − ٤ = ٩ |

ويمكن أن نستخدم هذه المقاييس للمقارنة: عند المقارنة باستخدام الوسيطين، يظهر أن قيم س أصغر من قيم ص. وعند المقارنة باستخدام المدى والمدى الربيعي، يظهر أن قيم ص أكثر انتشارًا من قيم س، الأمر الذي يعني أن قيم ص أقل اتساقًا من قيم س.

**نتيجة ٢:** إذا كان المدى الربيعي لمجموعة من القيم أقل من المدى الربيعي لمجموعة قيم أخرى، تكون المجموعة أكثر ثباتًا وأقل انتشارًا.

يعتمد موقع الرُّبيع الأدنى والرُّبيع الأعلى على عدد القيم في مجموعة البيانات، سواء أكان فرديًّا أم زوجيًّا. أحد الأمثلة الذي نستخدمه لنجد الربيعيات هو الآتي:

• عندما يكون عدد القيم المرتبة **زوجيًّا**: نقسم البيانات إلى نصف أدنى ونصف أعلى، فيكون ر١ ، ر٣ وسيطَي النصف الأدنى والنصف الأعلى على الترتيب.

• عندما يكون عدد القيم المرتبة **فرديًّا**: نقسم البيانات إلى نصف أدنى ونصف أعلى حول الوسيط، ثم نهمله مرة أخرى، فيكون ر١ ، ر٣ وسيطَي النصف الأدنى والنصف الأعلى على الترتيب.

**مُساعِدة:** في مجموعة بيانات غير مجمَّعة، رتبة الوسيط (ر٢) هي (ن + ١) ÷ ٢.

يُنصح بإيجاد الربيعات بالاستقصاء وليس بحفظ صيغة رتبة مواقعها.

# ٥-٢ المثالان ٨ ، ٩

## مثال ٨

أوجد المدى الرُّبيعي للقيم الآتية:

٦٩ ، ١٧ ، ٤٣ ، ٦ ، ٧٣ ، ٧٧ ، ٣٩

## الحلّ

القيم مرتبة ترتيبًا تصاعديًّا، لذا نقسمها إلى أربعة أقسام متساوية:

## الحلّ (تابع)

| الترتيب | القيمة |
|---|---|
| الأول | ٦ |
| الثاني | ر١ ← ١٧ |
| الثالث | ٣٩ |
| الرابع | ر٢ ← ٤٣ |
| الخامس | ٦٩ |
| السادس | ر٣ ← ٧٣ |
| السابع | ٧٧ |

المدى الرُّبيعي = ر٣ − ر١ = ٧٣ − ١٧ = ٥٦

**مُساعِدة:** يفضل ترتيب القيم ترتيبًا تصاعديًّا عند التعامل مع الربيعيات.

## مثال ٩

أوجد المدى الرُّبيعي للقيم الثماني المرتبة:

٢ ، ٥ ، ٩ ، ١٢ ، ٢٩ ، ٣٢ ، ٤٩ ، ٥٥

### الحلّ

القيم مرتبة، وتُقسم إلى أربعة أقسام متساوية: ر١ بين القيمتين الثانية والثالثة، ر٢ بين الرابعة والخامسة، ر٣ بين السادسة والسابعة.

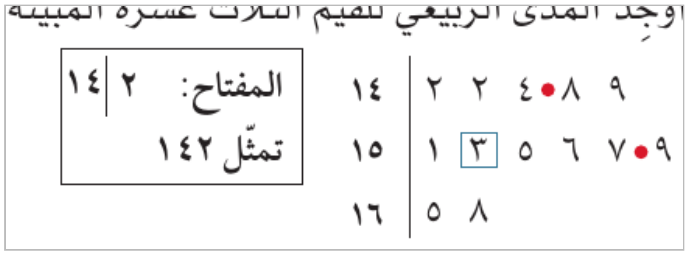
المدى الرُّبيعي = ر٣ − ر١ = (٣٢ + ٤٩) ÷ ٢ − (٥ + ٩) ÷ ٢ = ٤١ − ٧ = ٣٤

# ٥-٢ مثال ١٠

في مخطط الساق والورقة، تكون البيانات الأولية بالترتيب، ويمكننا رؤية كل قيمة من القيم. نجد أولًا الوسيط للحصول على النصف الأدنى والنصف الأعلى. الربيع الأدنى يقسم النصف الأدنى إلى مجموعتين متساويتين من حيث عدد القيم، والربيع الأعلى يقسم النصف الأعلى إلى مجموعتين متساويتين من حيث عدد القيم، ثم نطرح الربيع الأدنى من الربيع الأعلى لإيجاد المدى الربيعي.

### مثال ١٠

أوجد المدى الرُّبيعي للقيم الثلاث عشرة المبيَّنة في مخطَّط الساق والورقة الآتي:



## الحلّ

المفتاح: ٢ | ١٤ تمثّل ١٤٢

حددنا الوسيط فكان ١٥٣ ، وذلك بهدف معرفة النصف الأدنى (من ١٤٢ إلى ١٥١) والنصف الأعلى (من ١٥٥ إلى ١٦٨) ، وعدد القيم في كل منهما ٦ قيم.

موقع ر٢ عند (١٣ + ١) ÷ ٢ = القيمة السابعة، وهي ١٥٣

ر١ = (١٤٤ + ١٤٨) ÷ ٢ = ١٤٦

ر٣ = (١٥٧ + ١٥٩) ÷ ٢ = ١٥٨

المدى الرُّبيعي = ١٥٨ − ١٤٦ = ١٢

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

# ٥-٢ استكشف ١

**استكشف ١**

في هذا الاستكشاف، سوف تستقصي قيم الوسيط من خلال علاقته بأصغر وأكبر قيمة في مجموعة البيانات، وأيضًا من خلال علاقته بالرُّبيع الأدنى والرُّبيع الأعلى.

لكل مجموعة بيانات من المجموعات المرتبة من (أ) إلى (د)، اكتب قيمة كل من:

أصغر قيمة، الرُّبيع الأدنى، الوسيط، الرُّبيع الأعلى، أكبر قيمة.

المجموعة (أ): ٢ ، ٢ ، ٣ ، ١١ ، ١١ ، ٢١ ، ٢٢

المجموعة (ب): ٦ ، ٦ ، ٦ ، ١١ ، ١٢ ، ١٧ ، ١٩ ، ٢٠

المجموعة (ج): ٩ ، ٩ ، ١٥ ، ٢٨ ، ٣٢ ، ٣٥ ، ٤٩

المجموعة (د): ٥ ، ٧ ، ٩ ، ١٠ ، ١١ ، ١٢ ، ١٢ ، ١٦ ، ١٧

من المفيد أن تؤشِّر إلى القيم الخمس لكل مجموعة على خط الأعداد.

استخدم نتائجك لتقرر أيًّا من العبارات الآتية تكون دائمًا صحيحة، أو أحيانًا صحيحة، أو غير صحيحة على الإطلاق:

١) يقع الوسيط في منتصف المسافة بين أصغر قيمة وأكبر قيمة.

٢) يقع الوسيط في منتصف المسافة بين الرُّبيع الأدنى والربيع الأعلى.

٣) المدى الرُّبيعي يساوي نصف المدى بالضبط.

٤) ر٢ − ر١ < ر٣ − ر٢

## مثال ١١

يعتقد عامر أن مزود خدمة الإنترنت لديه (وهي الأرخص بين الخدمات المتوافرة) لا يقوم بعمل جيد؛ لأنه يستغرق وقتًا طويلًا لتنزيل أفلامه الوثائقية المفضلة. اتفق مع صديقه منصور على اختبار ذلك عن طريق تنزيل خمسة أفلام معينة، بحيث يتم تنزيل فيلم كل يوم في الساعة ٦ مساءً لمدة ٥ أيام. يتم عرض الأوقات التي يستغرقها عامر ومنصور لتنزيل الأفلام في الجدول الآتي:

| الفيلم | أ | ب | ج | د | ك |
|---|---|---|---|---|---|
| الوقت المستغرق من عامر (دقائق) | ١٨ | ٤٠ | ٢٠ | ٣٦ | ٢٤ |
| الوقت المستغرق من منصور (دقائق) | ١٠ | ٤٨ | ١٤ | ٢٤ | ٢٢ |

أ) استخدم الوسيط والمدى الربيعي لمقارنة مجموعتي أوقات التنزيل.

ب) ما السبب المحتمل الذي دفع عامر إلى عدم تغيير مزوّد خدمة الإنترنت كالمزود الذي يستخدمه منصور؟

### ٢-٥ مثال ١١ — الحلّ

## الحلّ

أ) الوسيط لأوقات عامر = ٢٤ دقيقة ، حيث الأوقات بالترتيب هي ١٨ ، ٢٠ ، ٢٤ ، ٣٦ ، ٤٠

الوسيط لأوقات منصور = ٢٢ دقيقة ، حيث الأوقات بالترتيب هي ١٠ ، ١٤ ، ٢٢ ، ٢٤ ، ٤٨

## الحلّ (تابع)

المدى الربيعي لأوقات عامر = (٣٦ + ٤٠) ÷ ٢ − (١٨ + ٢٠) ÷ ٢ = ٣٨ − ١٩ = ١٩ دقيقة

المدى الربيعي لأوقات منصور = (٢٤ + ٤٨) ÷ ٢ − (١٠ + ١٤) ÷ ٢ = ٣٦ − ١٢ = ٢٤ دقيقة

الوسيط للوقت بالنسبة إلى عامر أكبر من وسيط الوقت بالنسبة إلى منصور. والمدى الربيعي لأوقات عامر أصغر من المدى الربيعي لأوقات منصور.

ب) على الرغم من أن الاتصال بمزود خدمة الإنترنت الذي يستخدمه عامر أبطأ، إلا أن أوقات التنزيل الخاصة به أقل تشتتًا (أكثر موثوقية) واتساقًا من أوقات منصور، لذلك قد يكون هذا هو سبب عدم تغييره؛ أو أن الأمر لا يستحق دفع المزيد من المال للحصول على إنترنت أسرع قليلًا ولكنه أقل موثوقية.

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

**٢-٥ المثالان ١٢ ، ١٣**

## مثال ١٢

يبيّن الجدول الآتي التوزيع التكراري للمتغيّر س. أوجد المدى الرُّبيعي للمتغيّر س:

| س | ١ | ٢ | ٣ | ٤ | ٥ | ٦ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ت | ١٠ | ١٤ | ١٨ | ١٧ | ١٤ | ٦ |

## الحلّ

رُتِّبت قيم س التسع والسبعون ترتيبًا تصاعديًّا (Σت = ٧٩). يجب النظر إلى مواقع هذه القيم لمساعدتنا على تحديد مواقع الرُّبيعيات:

| س | ١ | ٢ | ٣ | ٤ | ٥ | ٦ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ت | ١٠ | ١٤ | ١٨ | ١٧ | ١٤ | ٦ |
| الموقع | من الأول إلى العاشر | من الحادي عشر إلى الرابع والعشرين | من الخامس والعشرين إلى الثاني والأربعين | من الثالث والأربعين إلى التاسع والخمسين | من الستين إلى الثالث والسبعين | من الرا والسبع إلى التاس والسبع |

موقع الوسيط هو (١ + ٧٩) ÷ ٢ = ٤٠ ، وقيمته ٣

بما أن عدد القيم فردي، نهمل قيمة الوسيط. يوجد ٣٩ قيمة تحت الوسيط، وعليه تكون القيمة التي في منتصف هذه البيانات هي التي رتبتها (٣٩ + ١) ÷ ٢ = ٢٠ ، فتكون رتبة را هي ٢٠ وقيمة س عندها تساوي ٢

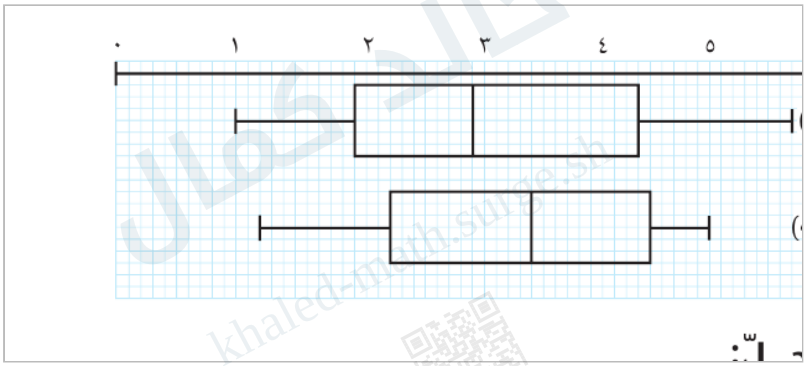
موقع الوسيط هو ٤٠ ، والقيمة التي في الموقع العشرين فوق الوسيط ستكون في الموقع الستين؛ فتكون رتبة ر٣ هي ٦٠ وقيمة س عندها تساوي ٥

فيكون المدى الرُّبيعي = ٥ − ٢ = ٣

في المخطط الصندوقي، يُشار بوضوح إلى الربيع الأدنى والربيع الأعلى في القيم التي يبدأ عندها الصندوق وأين ينتهي. لذا، فإن المدى الربيعي يساوي عرض الصندوق. يجب قراءة هذه القيم بدقة — تحقق من فهمك للمقياس المستخدم في كل مخطط صندوقي.

## مثال ١٣

يبين المخطَّط الصندوقي الآتي بيانات كل توزيع من التوزيعَين (أ)، (ب). قارن بين التوزيعَين:




## الحلّ

نحسب كلًّا من الوسيط والمدى والمدى الربيعي لكل من التوزيعين، ويبين الجدول الآتي قيم كل منها:

| | الوسيط | المدى | المدى الربيعي |
|---|---|---|---|
| التوزيع (أ) | ٢,٠ | ٥,٧ − ١,٠ = ٤,٧ | ٤,٤ − ٢,٠ = ٢,٤ |
| التوزيع (ب) | ٣,٥ | ٥,٠ − ١,٢ = ٣,٨ | ٤,٥ − ٢,٣ = ٢,٢ |

## الحلّ (تابع)

بمقارنة الوسيطين يظهر أن القيم (أ) أصغر من القيم (ب).
وبمقارنة (مقاييس التشتت) المدى والمدى الربيعي يظهر أن القيم (أ) أقل ثباتًا وأكثر تشتتًا من القيم (ب).

### تمارين ٥-٢

**١)** لكل مجموعة من مجموعات الأعداد الآتية، أوجد: • الرُّبيع الأدنى • الرُّبيع الأعلى • المدى الرُّبيعي

أ) ٢٠ ، ٦ ، ٢٨ ، ٣٤ ، ١٦

ب) ٦ ، ١٣ ، ٢ ، ٢٠ ، ٩ ، ٢٥ ، ٣١

ج) ٥ ، ٨ ، ١١ ، −٧ ، ٠ ، ١٤ ، ٢٣ ، ١٩ ، −٢ ، −١٠ ، −٥

د) ٨ ، ٢ ، ٢٢ ، ٣٠ ، ٤ ، ١٤

هـ) ١٢٠ ، ٩٢ ، ٧٤ ، ٨٨ ، ١٠٤ ، ٥٨ ، ٥٠ ، ٦٢

و) ١٥ ، ٢٥ ، ٣٩ ، ٣٧ ، ٧١ ، ٤٣ ، ١٧ ، ١٥ ، ٧ ، ١٤

**٢)** يبيّن الجدول الآتي قيم المتغيّر ك:

| ك | ١٠ | ٢٠ | ٣٠ | ٤٠ | ٥٠ | ٦٠ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| التكرار | ٢ | ١٢ | ٥ | ١١ | ١٢ | ١٥ | ت = ٥٩ |

أ) حدِّد موقع (رتبة) الرُّبيع الأدنى والرُّبيع الأعلى.

ب) أوجد المدى الرُّبيعي لقيم المتغيّر ك.

خالد كمال
khaled-mathsurge.com

**٣)** احتفظت طالبة بسجل درجاتها للواجب المنزلي الأسبوعي لمدة ثلاث سنوات، ونظمتها في الجدول الآتي:

| الدرجة | ٠ | ١ | ٢ | ٣ | ٤ | ٥ | ٦ | ٧ | ٨ | ٩ | ١٠ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| التكرار | ١ | ٣ | ٤ | ٦ | ١٠ | ١٤ | ١٧ | ١٦ | ١٢ | ١١ | ١ |

أ) ما عدد الواجبات المنزلية التي سجلت الطالبة درجاتها؟

ب) أوجد الرُّبيع الأدنى والرُّبيع الأعلى للدرجات، ثم أوجد المدى الرُّبيعي.

**٤)** يبيّن الجدول الآتي قيم المتغيّر المنفصل ك:

| ك | ١,٠ | ١,١ | ١,٢ | ١,٣ | ١,٤ | ١,٥ | ١,٦ | ١,٧ | ١,٨ | ١,٩ | ٢,٠ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| التكرار | ٨ | ١١ | ١٢ | ١٧ | ٢٢ | ٢٧ | ١١ | ٧ | ٦ | ٥ | ٢ | Σت = ١٢٩ |

أ) حدِّد موقع (رتبة) الرُّبيع الأدنى والرُّبيع الأعلى.

ب) أوجد قيمة الرُّبيع الأدنى والرُّبيع الأعلى للمتغيّر ك.

ج) أوجد قيمة المدى الرُّبيعي.

**٥)** يبيّن الجدول الآتي قياسات أحذية مجموعة من النساء:

| قياس الحذاء | ٣٥ | ٣٦ | ٣٧ | ٣٨ | ٣٩ | ٤٠ | ٤١ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| عدد النساء (ت) | ٥ | ٦ | ٩ | ١٠ | ٧ | ٧ | ٥ | Σت = ٤٩ |

أوجد قيمة المدى الربيعي لقياسات الأحذية.

**٦)** يبيّن الجدول الآتي عدد الأبناء وعدد البنات لدى ٢٥٩ أسرة:

| | الأبناء ٠ | الأبناء ١ | الأبناء ٢ | الأبناء ٣ | المجموع |
|---|---|---|---|---|---|
| البنات | ٠ | ١ | ٢ | ٣ | المجموع |
| ٠ | ٤ | ٤١ | ١٩ | ٧ | ٧١ |
| ١ | ٣١ | ٥٨ | ١١ | ٥ | ١٠٥ |
| ٢ | ٢٢ | ١٩ | ١٠ | ٦ | ٥٧ |
| ٣ | ٧ | ٨ | ٧ | ٤ | ٢٦ |
| المجموع | ٦٤ | ١٢٦ | ٤٧ | ٢٢ | ٢٥٩ |

أوجد المدى الرُّبيعي لأعداد:

أ) البنات.

ب) الأبناء.

**٧)** يعتقد طارق أن الرحلة إلى المدرسة تستغرق وقتًا طويلًا بسبب عدد مرات التوقف عند إشارات المرور الضوئية. وقد سجَّل عدد مرات الانتظار عند الإشارة الحمراء وهو في طريقه إلى المدرسة لمدة سبعة أيام. في حين يسلك صديقه سليمان طريقًا مختلفًا إلى المدرسة ويعتقد أنه الطريق الأفضل. طلب إليه طارق أن يجمع البيانات نفسها في رحلته. يبيّن الجدول البيانات التي سجَّلها كلٌّ منهما:

| اليوم | ١ | ٢ | ٣ | ٤ | ٥ | ٦ | ٧ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| طارق | ٦ | ٢ | ٧ | ٥ | ١ | ١ | ٥ |
| سليمان | ٣ | ٤ | ٤ | ٣ | ٣ | ٤ | ٣ |

استخدم الوسيط والمدى الرُّبيعي لتقارن بين طريقَي طارق وسليمان، وتقرر ما إذا كان على طارق أن يغيّر طريقه.

# تمارين ٥-٢ (تابع)

**٨)** يبيّن مخطَّط الساق والورقة الآتي عدد المرضى الذين يراجعون طبيب الأسنان كل يوم لمدة ١٥ يومًا:

| | |
|---|---|
| ٦٦٧٨٩ | ١ |
| ٠١٢٣٥٧٩ | ٢ |
| ٠٠٢ | ٣ |

المفتاح: ٦ | ١ تمثِّل ١٦ مريضًا.

أ) أوجد وسيط عدد المرضى.

ب) أوجد الرُّبيع الأدنى والرُّبيع الأعلى والمدى الرُّبيعي.

**٩)** يبيّن مخطَّط الساق والورقة الآتي درجات (من ٥٠) لـ ٢٥ شخصًا في اختبار قيادة السيارات:

| | |
|---|---|
| ٣٥٦٦ | ١ |
| ٠٧٧٧٨٩٩ | ٢ |
| ١٢٢٥٥٥٦٧٩ | ٣ |
| ٠٠٣٤٥ | ٤ |

المفتاح: ١ | ٣ تمثِّل الدرجة ١٣ من ٥٠.

أ) اكتب المدى.

ب) أوجد المدى الرُّبيعي للدرجات.

**١٠)** يبيّن مخطَّط الساق والورقة الآتي الدرجات من ١٠٠ لـ ٤٤ مرشحًا في اختبار جامعي:

خالد كمال
khaled-math-surge.site

| | |
|---|---|
| ٢ | ١٨٠ |
| ٣ | ٦٦٥٢ |
| ٤ | ٨٨٧٢٢ |
| ٥ | ٩٩٧٥٢ |
| ٦ | ٩٧٦٤٣١ |
| ٧ | ٧٧٦٥١٠٠ |
| ٨ | ٩٨٧٧٦٤٠ |
| ٩ | ٩٥٣٣ |

المفتاح: ٤ | ٨ تمثِّل الدرجة ٨٤ من ١٠٠.

أوجد:

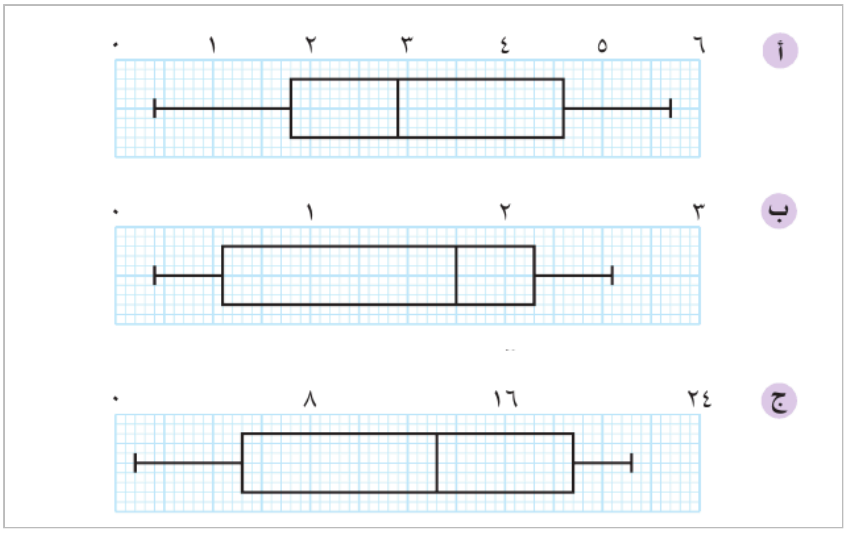
أ) مدى الدرجات.

ب) وسيط الدرجات.

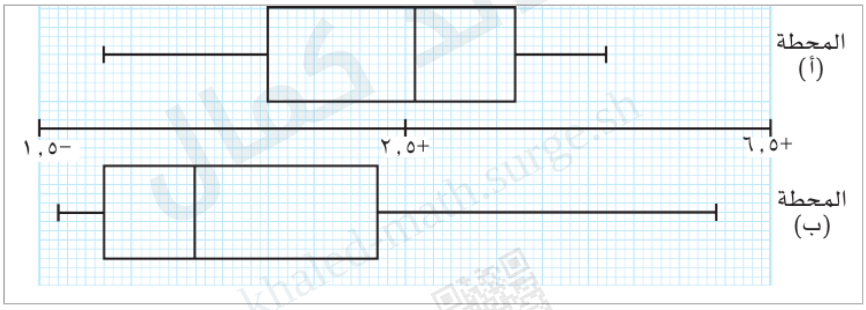
ج) المدى الرُّبيعي للدرجات.

**II)** لكل مخطَّط من المخطَّطات الصندوقية المبيَّنة أدناه، أوجد: • المدى • المدى الرُّبيعي

خالد كمال
khaled-math.surge.sh




**١٢)** يبيّن المخطَّطان الصندوقيان الآتيان معدل درجة الحرارة الصباحية في محطتَي رصد جوّي (أ)، (ب). سُجِّلت درجات الحرارة على مدى ثلاثة أشهر:




انسخ الجدول الآتي وأكمله، مبيِّنًا سبعة مقاييس لكل من محطتَي الرصد الجوي:

| | القيمة الصغرى | القيمة العظمى | الرُّبيع الأدنى | الوسيط | الرُّبيع الأعلى | المدى | المدى الربيعي |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| المحطة (أ) | | | | | | | |
| المحطة (ب) | | | | | | | |

**١٣)** يبيّن الجدول الآتي المبالغ التي ينفقها ٣٠ شخصًا على الملابس مقرَّبة إلى أقرب ١٠ ريالات عُمانية.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ٢٢٠ | ٩٠ | ١٣٠ | ٢٢٠ | ٢٣٠ |
| ٨٠ | ١١٠ | ٧٠ | ٩٠ | ١٥٠ |
| ٧٠ | ١٦٠ | ٨٠ | ١٢٠ | ١٢٠ |
| ٥٠ | ٦٠ | ٧٠ | ١٢٠ | ٦٠ |
| ١١٠ | ١٤٠ | ٨٠ | ١١٠ | ١٦٠ |
| ٥٠ | ١٨٠ | ٦٠ | ٢٤٠ | ٧٠ |

أ) اعرض بيانات الإنفاق في مخطَّط الساق والورقة.

ب) ما أقل قيمة ممكنة للإنفاق؟

ج) لماذا ليس بالضرورة أن يكون ٢٤٠ ريالًا عُمانيًّا أكثر قيمة إنفاق؟

د) قدِّر وسيط كميّة الإنفاق.

هـ) إذا علمت أن الرُّبيع الأعلى هو ١٥٠ ريالًا عُمانيًّا، فأوجِد المدى الرُّبيعي.

# ورقة الإجابات — تمارين ٥-٢

*ملاحظة: الإجابات من حسابي لأن كتاب الطالب لا يتضمن مفتاح إجابات.*

**١)**

أ) ر١ = ١١ ، ر٣ = ٣١ ، المدى الرُّبيعي = ٢٠ (الترتيب: ٦ ، ١٦ ، ٢٠ ، ٢٨ ، ٣٤)

ب) ر١ = ٦ ، ر٣ = ٢٥ ، المدى الرُّبيعي = ١٩ (الترتيب: ٢ ، ٦ ، ٩ ، ١٣ ، ٢٠ ، ٢٥ ، ٣١)

ج) ر١ = −٥ ، ر٣ = ١٤ ، المدى الرُّبيعي = ١٤ − (−٥) = ١٩ (الترتيب: −١٠ ، −٧ ، −٥ ، −٢ ، ٠ ، ٥ ، ٨ ، ١١ ، ١٤ ، ١٩ ، ٢٣)

د) ر١ = ٤ ، ر٣ = ٢٢ ، المدى الرُّبيعي = ١٨ (الترتيب: ٢ ، ٤ ، ٨ ، ١٤ ، ٢٢ ، ٣٠)

هـ) ر١ = ٦٠ ، ر٣ = ٩٨ ، المدى الرُّبيعي = ٣٨ (الترتيب: ٥٠ ، ٥٨ ، ٦٢ ، ٧٤ ، ٨٨ ، ٩٢ ، ١٠٤ ، ١٢٠)

و) ر١ = ١٥ ، ر٣ = ٣٩ ، المدى الرُّبيعي = ٢٤ (الترتيب: ٧ ، ١٤ ، ١٥ ، ١٥ ، ١٧ ، ٢٥ ، ٣٧ ، ٣٩ ، ٤٣ ، ٧١)

**٢)**

ملاحظة: مجموع التكرارات الفعلي ٢ + ١٢ + ٥ + ١١ + ١٢ + ١٥ = ٥٧ ، بينما المطبوع في الكتاب Σت = ٥٩ (خطأ مطبعي) ، والحل مبني على ن = ٥٧.

أ) موقع الوسيط (رتبة) = (١ + ٥٧) ÷ ٢ = ٢٩ ، فيقع الرُّبيع الأدنى بين الرتبتين ١٤ و ١٥ ، والرُّبيع الأعلى بين الرتبتين ٤٣ و ٤٤.

ب) ر١ = (٢٠ + ٣٠) ÷ ٢ = ٢٥ ، ر٣ = ٦٠ ، المدى الرُّبيعي = ٦٠ − ٢٥ = ٣٥

**٣)**

أ) عدد الواجبات = ١ + ٣ + ٤ + ٦ + ١٠ + ١٤ + ١٧ + ١٦ + ١٢ + ١١ + ١ = ٩٥

ب) رتبة الوسيط = (١ + ٩٥) ÷ ٢ = ٤٨ ← الوسيط = ٦ ؛ رتبة ر١ = (١ + ٤٧) ÷ ٢ = ٢٤ ← ر١ = ٤ ؛ رتبة ر٣ = ٤٨ + ٢٤ = ٧٢ ← ر٣ = ٨ ؛ المدى الرُّبيعي = ٨ − ٤ = ٤

**٤)**

ملاحظة: مجموع التكرارات الفعلي ١٢٨ ، بينما المطبوع في الكتاب Σت = ١٢٩ (خطأ مطبعي) ، والحل مبني على ن = ١٢٨.

أ) الوسيط بين الرتبتين ٦٤ و ٦٥ ؛ ر١ بين الرتبتين ٣٢ و ٣٣ ؛ ر٣ بين الرتبتين ٩٦ و ٩٧.

ب) ر١ = ١,٣ ، ر٣ = ١,٥

ج) المدى الرُّبيعي = ١,٥ − ١,٣ = ٠,٢

**٥)**

رتبة الوسيط = (٤٩ + ١) ÷ ٢ = ٢٥ ← الوسيط = ٣٨ ؛ ر١ بين الرتبتين ١٢ و ١٣ ← ر١ = ٣٧ ؛ ر٣ بين الرتبتين ٣٧ و ٣٨ ← ر٣ = (٣٩ + ٤٠) ÷ ٢ = ٣٩,٥

المدى الرُّبيعي = ٣٩,٥ − ٣٧ = ٢,٥

**٦)**

أ) البنات: رتبة الوسيط = (٢٥٩ + ١) ÷ ٢ = ١٣٠ ← الوسيط = ١ ؛ ر١ رتبتها ٦٥ ← ر١ = ٠ ؛ ر٣ رتبتها ١٩٥ ← ر٣ = ٢ ؛ المدى الرُّبيعي = ٢ − ٠ = ٢

ب) الأبناء: الوسيط = ١ (الرتبة ١٣٠) ؛ ر١ رتبتها ٦٥ ← ر١ = ١ ؛ ر٣ رتبتها ١٩٥ ← ر٣ = ٢ ؛ المدى الرُّبيعي = ٢ − ١ = ١

**٧)**

طارق بالترتيب: ١ ، ١ ، ٢ ، ٥ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ← الوسيط = ٥ ، ر١ = ١ ، ر٣ = ٦ ، المدى الرُّبيعي = ٥

سليمان بالترتيب: ٣ ، ٣ ، ٣ ، ٣ ، ٤ ، ٤ ، ٤ ← الوسيط = ٣ ، ر١ = ٣ ، ر٣ = ٤ ، المدى الرُّبيعي = ١

وسيط مرات توقف طارق أكبر (٥ مقابل ٣) وتشتت أوقاته أكبر (مدى ربيعي ٥ مقابل ١) ؛ أي أن طريق سليمان أسرع في المعتاد وأكثر اتساقًا ، لذا نعم ، يُنصح طارق بتغيير طريقه.

# ورقة الإجابات — تمارين ٥-٢ (تابع)

**٨)**

القيم مرتبة: ١٦ ، ١٦ ، ١٧ ، ١٨ ، ١٩ ، ٢٠ ، ٢١ ، ٢٢ ، ٢٣ ، ٢٥ ، ٢٧ ، ٢٩ ، ٣٠ ، ٣٠ ، ٣٢

أ) الوسيط = القيمة الثامنة = ٢٢ مريضًا

ب) ر١ = ١٨ ، ر٣ = ٢٩ ، المدى الرُّبيعي = ٢٩ − ١٨ = ١١

**٩)**

أ) المدى = ٤٥ − ١٣ = ٣٢

ب) رتبة الوسيط = ١٣ ← الوسيط = ٣٢ ؛ ر١ بين الرتبتين ٦ و ٧ = (٢٧ + ٢٧) ÷ ٢ = ٢٧ ؛ ر٣ بين الرتبتين ١٩ و ٢٠ = (٣٧ + ٣٩) ÷ ٢ = ٣٨ ؛ المدى الرُّبيعي = ٣٨ − ٢٧ = ١١

**١٠)**

ملاحظة: عدد الأوراق الفعلي في المخطط ٤٣ ، بينما النص يقول ٤٤ مرشحًا (خطأ مطبعي) ، والحل مبني على ن = ٤٣.

خالد كمال
khaled-math.sch.sh

أ) المدى = ٩٩ − ٢٠ = ٧٩

ب) رتبة الوسيط = (٤٣ + ١) ÷ ٢ = ٢٢ ← الوسيط = ٦٦

ج) ر١ رتبتها ١١ ← ر١ = ٤٨ ؛ ر٣ رتبتها ٣٣ ← ر٣ = ٨٤ ؛ المدى الرُّبيعي = ٨٤ − ٤٨ = ٣٦

**١١)**

قراءات تقريبية من المخططات (تقريب إلى أقرب جزء من عشرة):

أ) المدى ≈ ٥,٧ − ٠,٤ = ٥,٣ ؛ المدى الرُّبيعي ≈ ٤,٦ − ١,٨ = ٢,٨

ب) المدى ≈ ٢,٦ − ٠,٢ = ٢,٤ ؛ المدى الرُّبيعي ≈ ٢,٢ − ٠,٦ = ١,٦

ج) المدى ≈ ٢١,٢ − ٠,٩ = ٢٠,٣ ؛ المدى الرُّبيعي ≈ ١٨,٨ − ٥,٢ = ١٣,٦

**١٢)**

قراءات تقريبية من المخطط (تسميات المحور في النسخة الممسوحة غير واضحة تمامًا ، يُنصح بمطابقتها مع الكتاب الورقي):

| | القيمة الصغرى | القيمة العظمى | الرُّبيع الأدنى | الوسيط | الرُّبيع الأعلى | المدى | المدى الربيعي |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| المحطة (أ) | ≈ ٥− | ≈ ٤٤ | ≈ ٩ | ≈ ٢١٫٥ | ≈ ٣٣ | ≈ ٤٩ | ≈ ٢٤ |
| المحطة (ب) | ≈ ٩− | ≈ ٥٨٫٥ | ≈ ٥− | ≈ ٢٫٥ | ≈ ١٨ | ≈ ٦٧٫٥ | ≈ ٢٣ |

**١٣)**

أ) مخطط الساق والورقة (المفتاح: ٠ | ٥ تمثِّل ٥٠ ريالًا):

| | |
|---|---|
| ٥ | ٠٠ |
| ٦ | ٠٠٠ |
| ٧ | ٠٠٠٠ |
| ٨ | ٠٠٠ |
| ٩ | ٠٠ |
| ١١ | ٠٠٠ |
| ١٢ | ٠٠٠ |
| ١٣ | ٠ |
| ١٤ | ٠ |
| ١٥ | ٠ |
| ١٦ | ٠٠ |
| ١٨ | ٠ |
| ٢٢ | ٠٠ |
| ٢٣ | ٠ |
| ٢٤ | ٠ |

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

ب) المبالغ مقربة إلى أقرب ١٠ ريالات ، فأقل قيمة ممكنة للإنفاق هي ٤٥ ريالًا عُمانيًّا.

ج) لأن ٢٤٠ نفسها مقربة إلى أقرب ١٠ ، فقد تكون القيمة الفعلية أقل منها (مثل ٢٣٥) ، بينما قد تكون قيمة أخرى مقربة إلى ٢٣٠ أكبر منها فعليًا (مثل ٢٣٤).

د) ن = ٣٠ ، فيقع الوسيط بين الرتبتين ١٥ و ١٦ ، وكلتاهما ١١٠ ← الوسيط التقديري = ١١٠ ريالات عُمانية.

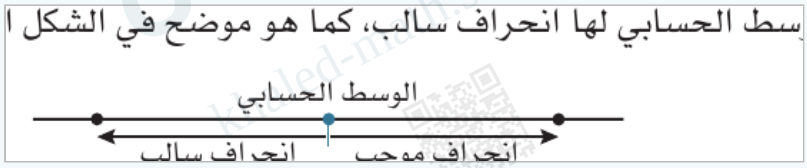
هـ) را هي القيمة الثامنة = ٧٠ ← المدى الرُّبيعي = ١٥٠ − ٧٠ = ٨٠ ريالًا عُمانيًّا.

### ٣-٥ التباين والانحراف المعياري — استكشف ٢

**استكشف ٢**

يوجد المدى الربيعي حول الوسيط. في هذا النشاط الاستكشافي سوف نستكشف مقياس تشتّت آخر حول الوسط الحسابي.

اختر مجموعة من خمسة أعداد مختلفة وسطها الحسابي ١٠. يدلّنا انحراف العدد على بُعده عن الوسط الحسابي، وعلى موقعه (عند أي طرف) منه. فالأعداد الأكبر من الوسط الحسابي لها انحراف موجب، بينما الأعداد الأصغر من الوسط الحسابي لها انحراف سالب، كما هو موضَّح في الشكل الآتي:




أوجد انحراف كل عدد من الأعداد الخمسة، ثم احسب الوسط الحسابي للانحراف.

ناقش نتائجك وقارنها مع زملائك، ثم استقصِ مجموعات أخرى من الأعداد. ماذا تتوقع أن يحدث لمجموعة جديدة من خمسة أعداد وسطها الحسابي ١٠؟ ماذا تتوقَّع أن يحدث لأيّ مجموعة من الأعداد؟ هل يمكنك تبرير توقُّعك؟

**مُساعِدة:** انحراف العدد = العدد − الوسط الحسابي

### ٥-٣أ إيجاد التباين والانحراف المعياري

**الانحراف المعياري Standard deviation:** مقياس واسع الاستخدام لقياس تشتّت مجموعة قيم عن الوسط الحسابي؛ فكلما اقتربت قيمة الانحراف المعياري لمجموعة البيانات من الصفر، فهذا يشير إلى اقتراب القيم من وسطها الحسابي (تشتتها قليل)، بينما تشير قيمة الانحراف المعياري الكبيرة إلى تشتت (ابتعاد) القيم عن متوسطها الحسابي.

فمثلًا، إذا كان لدينا جهاز إعداد القهوة يصب ٢٠٠ مل من القهوة لكل كوب، نتوقع زيادة أو نقصانًا في كمية القهوة (الانحراف المعياري)، ولكن إذا كان الانحراف المعياري كبيرًا، فسيشعر بعض الزبائن بأنه قد تم خداعهم؛ لأن الجهاز يمكن أن يعطي أقل أو أكثر من ٢٥٠ مل في الكوب الواحد.

**الانحراف المعياري هو الجذر التربيعي الموجب للتباين.**

تربيع الفرق يحول دون العمل مع القيم السالبة التي تسبب المشكلة (انظر إلى فقرة استكشف ٢).

**نتيجة ٣:** التباين ع$^{2}$ = الوسط الحسابي لمربعات القيم − مربّع الوسط الحسابي ، والانحراف المعياري ع = الجذر التربيعي الموجب للتباين.

لمجموعة تتضمن ن عددًا يُرمز إليها بالمتغيّر س:

$$ع = \sqrt{\frac{\Sigma س^{2}}{ن} - \bar{س}^{2}} \quad \text{حيث الوسط الحسابي } \bar{س} = \frac{\Sigma س}{ن}$$

**مُساعِدة:** لنوجد Σس$^{2}$ فإننا نجمع مربعات القيم. من الأخطاء الشائعة إيجاد مجموع القيم ثم تربيع الناتج، ويُعبَّر عن ذلك بالرمز (Σس)$^{2}$

# ٣-٥ المثالان ١٤ ، ١٥

## مثال ١٤

أوجد التباين والانحراف المعياري مقرَّبَين إلى أقرب عدد صحيح لمجموعة الأعداد:

٣ ، ٦٠ ، ٩٠

## الحلّ

الوسط الحسابي لمربّعات القيم = (٣² + ٦٠² + ٩٠²) ÷ ٣ = ٣٩٠٣

(نربّع كل الأعداد س² ، ثم نجد مجموعها Σس² ، ثم نقسم على عددها.)

الوسط الحسابي س̄ = (٣ + ٦٠ + ٩٠) ÷ ٣ = ٥١

التباين ع² = الوسط الحسابي لمربعات القيم − مربع الوسط الحسابي = ٣٩٠٣ − ٥١² = ١٣٠٢

الانحراف المعياري ع = $\sqrt{١٣٠٢}$ = ٣٦ (مقرَّبًا إلى أقرب عدد صحيح)

## مثال ١٥

لمجموعة الأعداد الآتية، أوجد الانحراف المعياري مقرَّبًا إلى أقرب عدد عشري:

٣ ، ٩ ، ١٥ ، ٢٤ ، ٢٩

### الحلّ

$$ع^{2} = \frac{\Sigma س^{2}}{ن} - (\frac{\Sigma س}{ن})^{2} = (٣^{2} + ٩^{2} + ١٥^{2} + ٢٤^{2} + ٢٩^{2}) \div ٥ - ((٣ + ٩ + ١٥ + ٢٤ + ٢٩) \div ٥)^{2}$$

$$= \frac{١٧٣٢}{٥} - (\frac{٨٠}{٥})^{2} = ٣٤٦,٤ - ١٦^{2} = ٩٠,٤$$

(نطرح مربّع الوسط الحسابي من الوسط الحسابي لمربّعات القيم لنوجد التباين.)

$ع = \sqrt{٩٠,٤} = ٩,٥$ (مقرَّبًا إلى أقرب عدد عشري)

# ٣-٥ نتيجة ٤ ومثال ١٦

**نتيجة ٤:** في التوزيع التكراري للمتغير س وتكراراتها ت يكون:

الانحراف المعياري $ع = \sqrt{\frac{\Sigma س^{2} ت}{\Sigma ت} - (\frac{\Sigma س ت}{\Sigma ت})^{2}}$ حيث $\bar{س}$ = الوسط الحسابي هو $\frac{\Sigma س ت}{\Sigma ت}$

### مثال ١٦

أوجد الانحراف المعياري لقيم س في الجدول الآتي، مقرِّبًا الناتج إلى أقرب عدد مكوَّن من ٣ أرقام معنوية:

| س | ١٢ | ١٤ | ١٦ |
|---|---|---|---|
| ت | ١٣ | ٢٨ | ١٠ |

## الحلّ

الجدول التكراري الموسّع أفضل طريقة لإيجاد Σت ، Σست ، Σس²ت المطلوبة لحساب الانحراف المعياري:

| س | ت | س ت | س²ت = س × س ت |
|---|---|---|---|
| ١٢ | ١٣ | ١٥٦ | ١٢ × ١٥٦ = ١٨٧٢ |
| ١٤ | ٢٨ | ٣٩٢ | ١٤ × ٣٩٢ = ٥٤٨٨ |
| ١٦ | ١٠ | ١٦٠ | ١٦ × ١٦٠ = ٢٥٦٠ |
| | Σت = ٥١ | Σست = ٧٠٨ | Σس²ت = ٩٩٢٠ |

الانحراف المعياري ع = $\sqrt{\frac{٩٩٢٠}{٥١} - (\frac{٧٠٨}{٥١})^{٢}}$ = ١٫٣٤ (مقرَّبًا إلى ٣ أرقام معنوية)

خالد كمال
khaled-math.turge.sh

### تمارين ٥-٣ أ

**ا)** احسب لكل مجموعة من مجموعات الأعداد الآتية: • الوسط الحسابي • التباين • الانحراف المعياري

أ) ٥ ، ٩ ، ١٢ ، ١٤

ب) ١١ ، ١٦ ، ٢٢ ، ٢٧ ، ٣٢

ج) ١ ، ٢ ، ٢ ، ٢ ، ٣ ، ٨٩

د) ١٠ ، ٤٥ ، ٦٣ ، ٧٧ ، ٨٣ ، ٨٥ ، ٩٠

هـ) ٣ ، ٧ ، ١٦ ، ٢٢ ، ٢٥ ، ٢٥ ، ٣١ ، ٣٢

و) ٥ ، ١ ، ٤ ، ٥ ، ١ ، ٤ ، ٥ ، ١ ، ٤ ، ١ ، ٢

**٢)** سجَّل حارس في متنزه ما عدد الحيوانات التي ترتاد بركة المياه كل يوم لمدة أسبوع. جاءت النتائج كالآتي:

١٦ ، ٢١ ، ٢٢ ، ١٩ ، ٢٧ ، ٢٢ ، ٢٥

أ) أوجِد مقرَّبًا إلى أقرب عدد صحيح الوسط الحسابي لعدد الحيوانات التي تذهب إلى بركة المياه كل يوم.

ب) استخدم قيمة الوسط الحسابي الدقيقة لتحسب الانحراف المعياري مقرَّبًا إلى أقرب عدد مكوَّن من ٣ أرقام معنوية.

**٣)** استخدم التوزيع التكراري للمتغيرات أ ، ب ، ج ، د ، هـ لتحسب: • الوسط الحسابي • التباين • الانحراف المعياري

| أ | ١٠ | ٢٠ | ٣٠ |
|---|---|---|---|
| ت | ٦ | ٩ | ٥ |

أ) التوزيع التكراري للمتغيّر أ

| ب | ١٢ | ١٤ | ١٥ | ١٦ |
|---|---|---|---|---|
| ت | ٤ | ٧ | ٩ | ٥ |

ب) التوزيع التكراري للمتغيّر ب

| ج | ١١ | ١٢ | ١٣ | ١٤ | ١٥ |
|---|---|---|---|---|---|
| ت | ١٥ | ٢٤ | ٣٠ | ٢٥ | ٦ |

ج) التوزيع التكراري للمتغيّر ج

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| د | ١,٠ | ١,٥ | ٢,٠ | ٢,٥ | ٣,٠ |
| ت | ٨ | ١١ | ١٧ | ٣ | ١ |

د) التوزيع التكراري للمتغيّر د

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| هـ | ٥,٢ | ٥,٥ | ٥,٨ | ٦,١ | ٦,٤ | ٦,٧ | ٧,٠ |
| ت | ١٢ | ١٩ | ٢٨ | ٤٢ | ٣٩ | ٢٢ | ٢١ |

هـ) التوزيع التكراري للمتغيّر هـ

# تمارين ٥-٣ أ (تابع)

**٤)** يبيّن الجدول الآتي عدد العمال (٥٠ عاملًا) الذين سجلوا نصف يوم غياب في السنة الماضية:

| عدد غيابات نصف يوم | ٠ | ١ | ٢ | ٣ | ٤ | ٥ | ٦ | ٧ | ٨ | ٩ | ١٠ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| عدد العمال (ت) | ٢ | ٢ | ٤ | ٧ | ٣ | ٨ | ٩ | ٣ | ٧ | ١ | ٣ |

أ) احسب الوسط الحسابي لغياب العامل في السنة الماضية.

ب) احسب الانحراف المعياري.

ج) حوِّل إجابة الجزئية (ب) إلى دقائق إذا علمت أن عدد ساعات العمل اليومي ٨ ساعات.

**٥)** كشفت دراسة مسحيّة على عيّنة من ٣٠٠ طالب أن ١٤٥ طالبًا لم يقرأوا أيّة رواية، و٨٤ منهم قرأوا رواية واحدة، و٦٣ قرأوا روايتين، و٧ قرأوا ٣ روايات، وطالبًا واحدًا قرأ ٦ روايات في العام الماضي.

أ) مثِّل هذه البيانات في جدول توزيع تكراري.

ب) احسب الوسط الحسابي لعدد الروايات التي قرأها الطلبة في العام الماضي.

ج) احسب الانحراف المعياري مقرَّبًا الإجابة إلى أقرب عدد مكوَّن من ٣ أرقام معنوية.

د) بالمقابل، الوسط الحسابي لعدد الروايات التي قرأها ٣٠٠ موظف هو ٤٫٥ والانحراف المعياري ١٫٢ ، اذكر تعليقَين لتقارن بين عادة القراءة عند الموظفين وتلك التي عند الطلبة.

**٦)** مجموعة من ١٣ عددًا: ٨ ، ٨ ، ٨ ، ٨ ، ٨ ، ٨ ، ٩ ، ٩ ، ٩ ، ٩ ، ٩ ، ٩ ، ٩. أُضيف العدد الرابع عشر س إلى هذه الأعداد.

أ) أيُّ مقياسَي تشتت لهما القيمة نفسها لهذه البيانات؟ حدِّد القيمة.

ب) إذا علمت أن س = ١٠ ، فاشرح ما يحصل لكل من المقياسَين في إجابة الجزئية (أ).

ج) إذا علمت أن س = ٠ ، ماذا يحصل للمقياس الذي لم يظهر في إجابة الجزئية (أ)؟

# ورقة الإجابات — تمارين ٥-٣ أ

*ملاحظة: الإجابات من حسابي لأن كتاب الطالب لا يتضمن مفتاح إجابات.*

**١)**

أ) الوسط = ١٠ ، التباين = ١١٫٥ ، الانحراف = ٣٫٣٩

ب) الوسط = ٢١٫٦ ، التباين = ٥٦٫٢٤ ، الانحراف = ٧٫٥٠

ج) الوسط = ١٦٫٥ ، التباين = ١٠٥١٫٥٨ ، الانحراف = ٣٢٫٤٣

د) الوسط = ٦٤٫٧١ ، التباين = ٧٠٣٫٠٦ ، الانحراف = ٢٦٫٥٢

هـ) الوسط = ٢٠٫١٢٥ ، التباين = ٩٩٫١١ ، الانحراف = ٩٫٩٦

و) الوسط = ٣ ، التباين = ٢٫٩١ ، الانحراف = ١٫٧١

(التباين والانحراف مقرَّبان إلى أقرب منزلتين عشريتين)

**٢)**

أ) الوسط الحسابي = ١٥٢ ÷ ٧ = ٢١٫٧١ ... ≈ ٢٢ حيوانًا

ب) باستخدام القيمة الدقيقة: الانحراف المعياري = ٣٫٣٧ (٣ أرقام معنوية)

**٣)**

أ) الوسط = ١٩٫٥ ، التباين = ٥٤٫٧٥ ، الانحراف = ٧٫٤٠

ب) الوسط = ١٤٫٤٤ ، التباين = ١٫٦١ ، الانحراف = ١٫٢٧

ج) الوسط = ١٢٫٨٣ ، التباين = ١٫٣٠ ، الانحراف = ١٫١٤

د) الوسط = ١٫٧٢٥ ، التباين = ٠٫٢٤ ، الانحراف = ٠٫٤٩

هـ) الوسط = ٦٫١٧ ، التباين = ٠٫٢٥ ، الانحراف = ٠٫٥٠

(مقرَّبة إلى أقرب منزلتين عشريتين)

**٤)**

ملاحظة: مجموع التكرارات الفعلي ٤٩ عاملًا ، بينما النص يقول ٥٠ عاملًا (خطأ مطبعي) ، والحل مبني على ن = ٤٩.

خالد كمال
khaled-mathsurge.sh

أ) الوسط الحسابي = ٢٥٣ ÷ ٤٩ = ٥٫١٦ نصف يوم غياب (مقربًا)

ب) الانحراف المعياري = ٢٫٥٧ نصف يوم (مقربًا)

ج) نصف يوم العمل = ٤ ساعات = ٢٤٠ دقيقة ؛ الانحراف بالدقائق = ٢٫٥٧ × ٢٤٠ ≈ ٦١٦ دقيقة

**٥)**

أ)

| عدد الروايات | ٠ | ١ | ٢ | ٣ | ٦ |
|---|---|---|---|---|---|
| عدد الطلبة (ت) | ١٤٥ | ٨٤ | ٦٣ | ٧ | ١ |

ب) الوسط الحسابي = ٢٣٧ ÷ ٣٠٠ = ٠٫٧٩ رواية

ج) الانحراف المعياري = ٠٫٩٠٩ (٣ أرقام معنوية)

د) الموظفون يقرأون في المتوسط أكثر بكثير من الطلبة (٤٫٥ رواية مقابل ٠٫٧٩). عدد الروايات التي قرأها الطلبة أكثر اتساقًا (أقل تشتتًا) لأن انحرافها المعياري أصغر (٠٫٩٠٩ مقابل ١٫٢).

**٦)**

ملاحظة: النص يقول «١٣ عددًا» بينما الأعداد المدرجة ١٢ فقط (خطأ مطبعي) ، والحل مبني على الأعداد الاثني عشر المدرجة.

أ) المدى = ٩ − ٨ = ١ ، والمدى الربيعي = ٩ − ٨ = ١ ؛ فالمقياسان المتساويان هما المدى والمدى الربيعي ، وقيمتهما ١.

ب) عند س = ١٠: يصبح المدى = ١٠ − ٨ = ٢ (يتأثر بالقيمة الجديدة) ، بينما يبقى المدى الربيعي = ١ دون تغيير.

ج) المقياس الذي لم يظهر في (أ) هو الانحراف المعياري ؛ عند س = ٠ يزداد من ٠,٥ إلى نحو ٢,٣٢ بسبب القيمة المتطرفة.

### ٣-٥ ب الانحراف المعياري للبيانات المجمعة

**مُساعِدة:** مركز الفئة هو الوسط الحسابي للحدين الأدنى والأعلى للفئة.

نستخدم صيغ الانحراف المعياري السابقة لإيجاد الانحراف المعياري التقديري للبيانات المجمعة مع استبدال القيم (س) بمراكز الفئات (م):

$$\text{الانحراف المعياري التقديري} = \sqrt{\frac{\Sigma ت م^2}{\Sigma ت} - \left(\frac{\Sigma ت م}{\Sigma ت}\right)^2}$$

حيث الوسط الحسابي التقديري $= \dfrac{\Sigma ت م}{\Sigma ت}$

من المهم جدًّا حساب قيم مراكز الفئة بدقة. إذا كانت هناك فجوات بين الفئات، يجب أن نتأكد من استخدام حدود الفئة الصحيحة لحساب قيم المراكز.

## مثال ١٧

يبين الجدول التكراري للبيانات المجمعة ارتفاعات ٢٠ شجرة (بالمتر) في حديقة كبيرة:

## مثال ١٧ (تابع)

| الارتفاع بالمتر (س) | عدد الأشجار (ت) |
|---|---|
| ٢,٨ ≤ س < ٣,٠ | ٤ |
| ٣,٠ ≤ س < ٣,٤ | ٧ |
| ٣,٤ ≤ س < ٤,٠ | ٥ |
| ٤,٠ ≤ س < ٦,٥ | ٤ |

أوجد: أ) الوسط الحسابي التقديري للارتفاع. ب) الانحراف المعياري للارتفاعات مقربًا إلى أقرب ثلاث منازل عشرية.

## الحلّ

أ) مراكز الفئات الأربع هي ٢,٩ ، ٣,٢ ، ٣,٧ ، ٥,٢٥ (مركز الفئة = (الحد الأدنى + الحد الأعلى) ÷ ٢)

الوسط الحسابي التقديري = (٢,٩ × ٤ + ٣,٢ × ٧ + ٣,٧ × ٥ + ٥,٢٥ × ٤) ÷ ٢٠ = ٧٣,٥ ÷ ٢٠ = ٣,٦٧٥ م

ب) الوسط الحسابي للمربعات = (٢,٩² × ٤ + ٣,٢² × ٧ + ٣,٧² × ٥ + ٥,٢٥² × ٤) ÷ ٢٠ = ٢٨٤,٠٢٥ ÷ ٢٠ = ١٤,٢٠١

الانحراف المعياري التقديري = $\sqrt{١٤,٢٠١ - ٣,٦٧٥^2}$ = $\sqrt{٠,٦٩٥٣٧٥}$ = ٠,٨٣٤ م

# ٥-٣ ب مثال ١٨

## مثال ١٨

يبيّن الجدول التكراري الآتي أعمار ٢٠ طفلًا، بالسنوات الكاملة. قدّر الانحراف المعياري:

| العمر (سنة) | عدد الأطفال (ت) |
|---|---|
| ٥ – ٩ | ٧ |
| ١٠ – ١٤ | ٨ |
| ١٥ – ١٩ | ٥ |

## الحلّ

كُتبت أعمار الأطفال بحدود الفئات الفعليّة، بحيث يمكن إيجاد قيم مراكز الفئات:

| العمر الفعلي (ع سنة) | ت | مراكز الفئات (م) | م ت | م²ت |
|---|---|---|---|---|
| ٥ ≤ ع < ١٠ | ٧ | ٧٫٥ | ٥٢٫٥ | ٣٩٣٫٧٥ |
| ١٠ ≤ ع < ١٥ | ٨ | ١٢٫٥ | ١٠٠ | ١٢٥٠ |
| ١٥ ≤ ع < ٢٠ | ٥ | ١٧٫٥ | ٨٧٫٥ | ١٥٣١٫٢٥ |
| | Σت = ٢٠ | | Σم ت = ٢٤٠ | Σم²ت = ٣١٧٥ |

خالد كمال
khaled-kamal.github.surge.sh

**الحلّ (تابع)**

مراكز الفئات هي ٧,٥ ، ١٢,٥ ، ١٧,٥ وليس ٧ ، ١٢ ، ١٧

الوسط الحسابي التقديري = ٢٤٠ ÷ ٢٠ = ١٢ سنة

الانحراف المعياري التقديري = $\sqrt{\frac{٣١٧٥}{٢٠} - (\frac{٢٤٠}{٢٠})^{٢}}$ = $\sqrt{١٤,٧٥}$ = ٣,٨٤ سنة ، أو ٣ سنوات و ١٠ أشهر تقريبًا.

# تمارين ٥-٣ ب

**١)** يبيّن الجدول التكراري الآتي بيانات المتغير المتصل س:

| س | التكرار (ت) |
|---|---|
| ٠ ≤ س < ١٠ | ٨ |
| ١٠ ≤ س < ٢٠ | ١٢ |
| ٢٠ ≤ س < ٣٠ | ٦ |
| ٣٠ ≤ س < ٤٠ | ٤ |

أ) احسب الوسط الحسابي التقديري للمتغير س.

ب) احسب الانحراف المعياري التقديري للمتغير س مبينًا كامل عملك.

**٢)** يبيّن الجدول الآتي سعة ٨٥ وعاءً:

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

| السعة (س لتر) | عدد الأوعية (ت) |
|---|---|
| ٢٠ ≤ س < ٢٤ | ٧ |
| ٢٤ ≤ س < ٢٨ | ١٥ |
| ٢٨ ≤ س < ٣٠ | ٢٩ |
| ٣٠ ≤ س < ٣٢ | ٢٢ |
| ٣٢ ≤ س < ٣٥ | ١٢ |

أ) احسب الوسط الحسابي التقديري للسعة.

ب) احسب الانحراف المعياري التقديري للسعة باللتر، مبينًا كامل عملك، واكتب إجابتك مقرَّبًا الناتج إلى أقرب ١٠ مللتر.

**٣)** نُظِّمت مجموعة من الألعاب في حفل شارك فيها ١٦٨ طفلًا. قُسِّم الأطفال إلى ست مجموعات متساوية بحسب أعمارهم بالسنوات الكاملة:

مجموعات العمر هي: ٢ – ٥ ، ٦ – ٨ ، ٩ – ١٠ ، ١١ – ١٢ ، ١٣ ، ١٤ – ١٦

أ) استخدم حدود الفئات الفعليّة لتنشئ جدولًا تكراريًّا يعرض البيانات المعطاة أعلاه.

ب) احسب الوسط الحسابي التقديري للأعمار.

ج) احسب الانحراف المعياري التقديري للأعمار مقرَّبًا إلى أقرب شهر.

**٤)** يبيّن الجدول الآتي جزءًا من مشروع مدرسي زراعي لإحدى الطالبات، حيث زرعت ٣٥٠ بذرة طماطم، وسجلت الزمن الذي تتطلبه كل بذرة للنمو:

| الزمن (ساعة) | عدد البذور (ت) |
|---|---|
| ٢٤ – ٢٦ | ١ |
| ٢٦ – ٣٠ | ٣ |
| ٣٠ – ٣٥ | ٧ |
| ٣٥ – ٥٠ | ٧٢ |
| ٥٠ – ٦٠ | ١٩٢ |
| ٦٠ – ٧٢ | ٥٥ |

أ) للبذور التي نمت، احسب: ١) الوسط الحسابي التقديري. ٢) الانحراف المعياري التقديري.

ب) ما الصعوبة التي ستواجهك لو طُلب إليك أن تحسب الانحراف المعياري التقديري للزمن اللازم لنمو الـ ٣٥٠ بذرة؟

# ورقة الإجابات — تمارين ٥-٣ ب

*ملاحظة: الإجابات من حسابي لأن كتاب الطالب لا يتضمن مفتاح إجابات.*

**١)**

مراكز الفئات: ٥ ، ١٥ ، ٢٥ ، ٣٥ ؛ و Σم ت = ٥١٠ ، Σم²ت = ١١٥٥٠ ، Σت = ٣٠

أ) الوسط الحسابي التقديري = ٥١٠ ÷ ٣٠ = ١٧

ب) الانحراف المعياري التقديري = $\sqrt{\frac{١١٥٥٠}{٣٠} - ١٧^{٢}}$ = $\sqrt{٣٨٥ - ٢٨٩}$ = $\sqrt{٩٦}$ = ٩٫٨ (مقربًا)

**٢)**

مراكز الفئات: ٢٢ ، ٢٦ ، ٢٩ ، ٣١ ، ٣٣,٥ ؛ و Σم ت = ٢٤٦٩ ، Σم²ت = ٧٢٥٢٦ ، Σت = ٨٥

أ) الوسط الحسابي التقديري = ٢٤٦٩ ÷ ٨٥ = ٢٩,٠٥ لتر (مقربًا)

ب) الانحراف المعياري التقديري = $\sqrt{\frac{٧٢٥٢٦}{٨٥} - (\frac{٢٤٦٩}{٨٥})^{٢}}$ = $\sqrt{٩,٥٢}$ = ٣,٠٨٥ لتر (مقربًا)

بالملليتر: ٣,٠٨٥ لتر = ٣٠٨٥ مل ≈ ٣٠٨٠ مل (لأقرب ١٠ ملليتر)

**٣)**

أ) عدد الأطفال في كل مجموعة = ١٦٨ ÷ ٦ = ٢٨ ، والجدول بالحدود الفعلية:

| العمر الفعلي (ع سنة) | عدد الأطفال (ت) | مركز الفئة (م) |
|---|---|---|
| ٢ ≤ ع < ٦ | ٢٨ | ٤ |
| ٦ ≤ ع < ٩ | ٢٨ | ٧,٥ |
| ٩ ≤ ع < ١١ | ٢٨ | ١٠ |
| ١١ ≤ ع < ١٣ | ٢٨ | ١٢ |
| ١٣ ≤ ع < ١٤ | ٢٨ | ١٣,٥ |
| ١٤ ≤ ع < ١٧ | ٢٨ | ١٥,٥ |

ب) الوسط الحسابي التقديري = (٤ + ٧,٥ + ١٠ + ١٢ + ١٣,٥ + ١٥,٥) × ٢٨ ÷ ١٦٨ = ٦٢,٥ ÷ ٦ = ١٠,٤٢ سنة (مقربًا)

ج) الانحراف المعياري التقديري = ٣,٨٢ سنة (مقربًا) = ٣,٨٢ × ١٢ = ٤٥,٨ ≈ ٤٦ شهرًا ، أي نحو ٣ سنوات و ١٠ أشهر.

**٤)**

ملاحظة: مجموع التكرارات في الجدول ٣٣٠ بذرة ، بينما النص يقول ٣٥٠ بذرة (خطأ مطبعي) ؛ والحل مبني على الـ ٣٣٠ بذرة التي نمت.

مراكز الفئات: ٢٥ ، ٢٨ ، ٣٢,٥ ، ٤٢,٥ ، ٥٥ ، ٦٦ ؛ و Σم ت = ١٧٥٨٦,٥ ، Σت = ٣٣٠

أ) ١) الوسط الحسابي التقديري = ١٧٥٨٦,٥ ÷ ٣٣٠ = ٥٣,٢٩ ساعة (مقربًا)

٢) الانحراف المعياري التقديري = ٨,٤٥ ساعة (مقربًا)

ب) الصعوبة: ٢٠ بذرة من الـ ٣٥٠ لا توجد لها أزمنة مسجلة في الجدول (لم تنمُ أو لم تُسجَّل) ، فلا يمكن إدخالها في الحساب ؛ أي إن الحساب لا يشمل كل البذور.

خالد كمال
khaled-math-sure.com

# ٥-٤ خصائص مقاييس التشتت

**استكشف ٣**

حلَّل أربعة طلبة البيانات التي جمعوها، فجاءت النتائج كالآتي:

١) الانحراف المعياري لأسعار العقارات في إحدى المناطق عال.

٢) تباين المبيعات الشهرية لمنتج ما في السنة الماضية كان عاليًا.

٣) الانحراف المعياري لدرجات الطلبة في امتحان ما قريب من الصفر.

٤) تباين الأوقات اللازمة لإعداد الإجراءات الطبية قليل.

ناقش ما وجده الطلبة، وأعط وصفًا ممكنًا لكلِّ عبارة من العبارات الآتية:

١) بيئة المنطقة وشراء الناس للعقارات في هذه المنطقة من البلدة.

٢) نوع المنتج المبيع.

٣) فوائد الاختبارات.

٤) كفاءة فريق إعداد الإجراءات الطبية.

خالد كمال
khaled-math.urge.sh

عند اختيار مقياس للتشتت ليمثّل انتشار توزيع مجموعة من القيم، وبناءً على خصائص تلك البيانات والسياق المذكورة فيه، يكون أحد المقاييس أكثر ملاءمة للاستخدام من المقاييس الأخرى. الجدول أدناه يعرض بعض خصائص كل مقياس من المقاييس الآتية:

| المقياس | بعض خصائصه |
|---|---|
| **المدى** | • سهولة حسابه.<br>• سهولة استخدامه في مقارنة الانتشار بين مجموعتَي بيانات متشابهة.<br>• يعطي معلومات عن القيم العظمى والقيم الصغرى.<br>• يعتمد على قيمتَين فقط في مجموعة البيانات.<br>• يتأثر بالقيم المتطرفة. |
| **المدى الرُّبيعي** | • لا يتأثر بالقيم المتطرفة.<br>• يمكن حسابه من دون التسجيل الدقيق لجميع البيانات.<br>• يعتمد على الوسيط كونه مقياسًا إحصائيًّا مناسبًا.<br>• يعتمد على قيمتَين فقط في مجموعة البيانات. |
| **الانحراف المعياري** | • يأخذ جميع القيم في مجموعة البيانات بالحسبان.<br>• يمكن استخدامه في حسابات إضافية.<br>• يعتمد على قيمة الوسط الحسابي فقط وليس أي قيمة أخرى.<br>• يتأثر بالقيم المتطرفة وأخطاء التدوين. |

# ٤-٥ المثالان ١٩ ، ٢٠

على الرغم من أن الانحراف المعياري أكثر استخدامًا من المدى الرُّبيعي كمقياس للتشتت، إلا أنه ليس مثاليًّا على الإطلاق؛ لأنه يتأثر بصورة جوهرية بالقيم المتطرفة، وقد يكون المدى الرُّبيعي أفضل.

## مثال ١٩

في شهر ديسمبر، سجلت درجات الحرارة منتصف النهار في بلدة ما بشكل يومي، فكانت بين ٢٥ و ٢٩ درجة سيليزية باستثناء يومَين كانت درجة حرارتها ٣٧ درجة سيليزية و ١٩ درجة سيليزية. أعطِ سببًا يجعل المدى الربيعي أو الانحراف المعياري أنسب مقياس للتشتت لاستخدامه في قياس درجات الحرارة في منتصف النهار في شهر ديسمبر.

## الحلّ

المدى = ٣٧ − ١٩ = ١٨° سيليزية. لماذا لا يكون المدى مناسبًا؟

المدى غير مناسب لأنه تمّ احتسابه باستخدام القيمتَين المتطرفتَين فقط، وكلتاهما ليستا درجة حرارة نموذجية في منتصف النهار لشهر ديسمبر؛ فالقيم المتطرفة تحرِّف ولا تعطي صورة واضحة عن الانتشار الحقيقي للقيم.

## مثال ٢٠

قام اثنان من لاعبي الكريكيت أ ، ب ، بوضع قائمة بأعداد الضربات التي سجلوها في آخر ١٠ مباريات:

اللاعب أ: ٢٥ ، ٢٨ ، ٢١ ، ٣٢ ، ٢٦ ، ٣٣ ، ٢٩ ، ٢٦ ، ٣١ ، ٢٩

اللاعب ب: ٤٠ ، ٧ ، ٣ ، ٥٠ ، ٠ ، ٨٩ ، ٣٨ ، ٤٥ ، ١ ، ١٧

يحتاج قائد فريق الكريكيت المحلي إلى ضارب جديد. يسمح له باختيار واحد من اللاعبين: اللاعب أ أو اللاعب ب.

أ) لماذا يجب على القائد أن يفكر في مقاييس التشتت، بدلًا من المتوسطات، لمساعدته في تحديد اللاعب الذي يختاره؟ اشرح إجابتك.

ب) نصح نائب القائد باختيار اللاعب ب لأنه حائز على درجات عالية، في حين أن اللاعب أ لا يمتلكها. اشرح السبب في أفضلية عدم تقديم هذه النصيحة للقائد.

خالد كمال
khaled-mathsurge.com

### ٤-٥ مثال ٢٠ — الحلّ

## الحلّ

أ) اللاعب أ (بالترتيب: ٢١ ، ٢٥ ، ٢٦ ، ٢٦ ، ٢٨ ، ٢٩ ، ٢٩ ، ٣١ ، ٣٢ ، ٣٣): الوسط الحسابي = ٢٨٠ ÷ ١٠ = ٢٨ ، الوسيط = ٢٨,٥

اللاعب ب (بالترتيب: ٠ ، ١ ، ٣ ، ٧ ، ١٧ ، ٣٨ ، ٤٠ ، ٤٥ ، ٥٠ ، ٨٩): الوسط الحسابي = ٢٩٠ ÷ ١٠ = ٢٩ ، الوسيط = ٢٧,٥

وفقًا لمقاييس النزعة المركزية، هناك فرق بسيط جدًّا بين قدرات اللاعبين؛ فالمتوسطات لا تساعد القائد على اتخاذ القرار الواضح بتحديد اللاعب الأفضل.

## الحلّ (تابع)

ب) اللاعب أ: المدى = ٣٣ − ٢١ = ١٢ ؛ المدى الربيعي = ٣١ − ٢٦ = ٥ ؛ الانحراف المعياري = $\sqrt{\frac{٧٩٥٨}{١٠} - ٢٨^{٢}} \approx ٣,٤٤$

اللاعب ب: المدى = ٨٩ − ٠ = ٨٩ ؛ المدى الربيعي = ٤٥ − ٣ = ٤٢ ؛ الانحراف المعياري = $\sqrt{\frac{١٥٨٣٨}{١٠} - ٢٩^{٢}} \approx ٢٧,٢٥$

لا تُعدّ النصيحة جيدة؛ فجميع مقاييس التشتت الثلاثة للّاعب أ أقل بكثير من تلك الخاصة باللاعب ب. سيخاطر قائد الفريق بشكل كبير باختيار اللاعب ب؛ لأن ضرباته غير متّسقة بشكل كاف مقارنة باللاعب أ.

### تمارين ٥-٤

**١)** يدّعي أحد الطلبة أن المدى الربيعي لأي مجموعة من البيانات دائمًا ما يكون أقل من مدى البيانات.

أ) هل ادّعاء الطالب صحيح؟ إذا لم يكن كذلك، فهل يمكنك تصحيح ادّعاء الطالب؟

ب) انسخ العبارتين التاليتين اللتين تنطبقان على جميع مجموعات البيانات، وأدخل الرموز الرياضية الصحيحة لدعم إجابتك على الجزئية (أ):

العبارة (١): الربيعي الأعلى ..... القيمة الكبرى.

العبارة (٢): الربيعي الأدنى ..... القيمة الصغرى.

**٢)** بالنسبة لمجموعة معينة من البيانات، من المتفق عليه أن الوسط الحسابي ليس معدلًا مناسبًا للاستخدام. ما هو مقياس التشتت الذي تعتقد أنه لن يكون مناسبًا لاستخدامه كمقياس لانتشار هذه المجموعة من البيانات؟ أعط سببًا لاختيارك.

**٣)** توفّر ثلاث شركات س ، ص ، ع وسائل النقل العام بين المدينة (أ) والمدينة (ب)، والتي تبعد مسافة ١٥٠ كم عن بعضها البعض، والحد الأقصى للسرعة على الطريق بين المدينة (أ) والمدينة (ب) ٨٠ كم/ساعة. تم تسجيل الأوقات التي تستغرقها كل حافلة من حافلات الشركات للقيام بـ ٥٠٠ رحلة من هذه الرحلات، وتم الحصول على النتائج التالية:

الوسط الحسابي لوقت الرحلة لكل من هذه الشركات يقع بين ساعتين و ١٠ دقائق وساعتين و ٢٠ دقيقة. مدى أوقات الرحلات للشركة س هو ٢٩ دقيقة. الانحراف المعياري لأوقات الرحلات للشركة ص هو ١٠ دقائق. المدى الربيعي لأوقات الرحلات للشركة ع هو ٢٥ دقيقة.

أ) ما الشركة الأكثر موثوقية برأيك؟

ب) ناقش أي من الشركات الثلاث التي تعتقد أنها توظف أكثر السائقين غير المسؤولين. أعط بعض التفسيرات لكل إجابة من إجاباتك.

**٤)** أ) قم بإدراج مقاييس التشتت الثلاثة التي تعلمتها للقيم الثلاث ١٠٠ ، ٢٠٠ ، ٣٠٠ ، بترتيب تصاعدي.

ب) اكتب، بترتيب تصاعدي، مجموعة من خمسة أرقام ليست كلها متشابهة، بحيث يتساوى فيها المدى والمدى الربيعي.

# ورقة الإجابات — تمارين ٥-٤

*ملاحظة: الإجابات من حسابي لأن كتاب الطالب لا يتضمن مفتاح إجابات.*

**١)**

أ) الادعاء غير صحيح على إطلاقه ؛ الصحيح: المدى الربيعي لأي مجموعة بيانات أقل من المدى أو يساويه. مثال التساوي: المجموعة ٥ ، ٥ ، ٥ مداها ٠ ومداها الربيعي ٠.

ب) العبارة (١): الربيعي الأعلى ≥ القيمة الكبرى. العبارة (٢):
الربيعي الأدنى ≤ القيمة الصغرى.

ولذلك: المدى الربيعي = ر٣ − ر١ ≥ القيمة الكبرى − القيمة الصغرى = المدى.

**٢)**

الانحراف المعياري ؛ لأنه يعتمد على الوسط الحسابي في حسابه، فإذا كان الوسط الحسابي غير مناسب لتمثيل البيانات (كأن توجد قيم متطرفة)، فلن يكون الانحراف المعياري مناسبًا أيضًا لأنه يتأثر بتلك القيم المتطرفة.

**٣)**

أ) يصعب الجزم لأن لكل شركة مقياسًا مختلفًا (مدى ، انحراف معياري ، مدى ربيعي) ؛ لكن الانحراف المعياري ١٠ دقائق للشركة ص يشير إلى تشتت صغير جدًّا لمعظم الرحلات حول الوسط، بينما مدى ٢٩ دقيقة للشركة س ومدى ربيعي ٢٥ دقيقة للشركة ع يشيران إلى تشتت أكبر ؛ فالأرجح أن الشركة ص هي الأكثر موثوقية.

ب) أقل زمن ممكن للرحلة بحد السرعة الأقصى = ١٥٠ ÷ ٨٠ = ١٫٨٧٥ ساعة = ساعة و ٥٢٫٥ دقيقة ؛ وأي زمن أقل من ذلك يعني تجاوز السرعة. الشركة س لها مدى ٢٩ دقيقة حول وسط قد يصل إلى ساعتين و ١٠ دقائق ، فقد توجد رحلات أقصر بكثير من المعتاد وأخرى أطول ، ما يوحي بسائقين يتجاوزون السرعة أحيانًا أو يتأخرون ؛ فالشركة س هي الأرجح في توظيف سائقين غير مسؤولين. (إجابة نقاشية وتقبل تفسيرات أخرى مسوَّغة)

**٤)**

أ) للقيم ١٠٠ ، ٢٠٠ ، ٣٠٠: الانحراف المعياري = ٨١٫٦٥ (مقربًا) ، المدى الربيعي = ٢٥٠ − ١٥٠ = ١٠٠ ، المدى = ٣٠٠ − ١٠٠ = ٢٠٠ ؛ وبالترتيب التصاعدي:
الانحراف المعياري < المدى الربيعي < المدى.

ب) مثال: ١ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٣ ؛ المدى = ٣ − ١ = ٢ ، والمدى الربيعي = ٣ − ١ = ٢. (يقبل أي مثال صحيح)

### قائمة التحقّق من التعلّم والفهم

- مقاييس التشتت الشائعة هي المدى، المدى الرُّبيعي، والانحراف المعياري.
- يبيّن المخطط الصندوقي أصغر قيمة وأكبر قيمة، الرُّبيع الأدنى والرُّبيع الأعلى، ووسيط مجموعة البيانات.
- للبيانات غير المجمّعة، رتبة الوسيط $ر_٢$ هي $\frac{ن + ١}{٢}$
- المدى الربيعي = $ر_٣ - ر_١$
- للبيانات غير المجمّعة: الانحراف المعياري = $\sqrt{\text{تباين}(س)} = \sqrt{\frac{\Sigma س^٢}{ن} - \bar{س}^٢}$

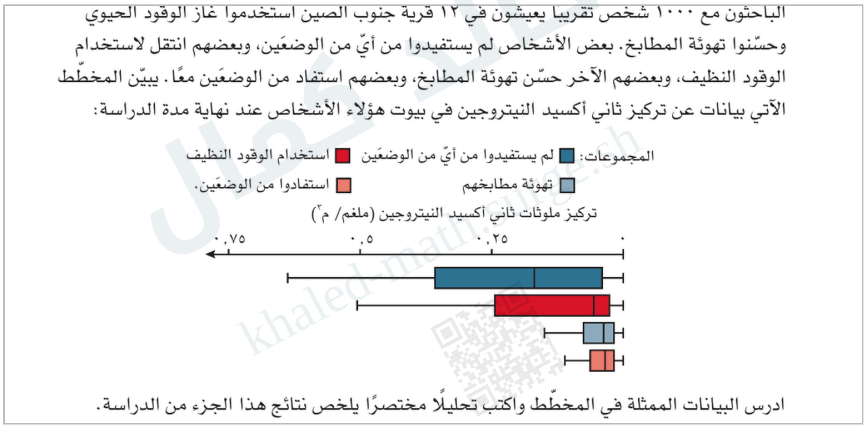
حيث $\bar{س} = \frac{\Sigma س}{ن}$

- للبيانات المجمّعة: الانحراف المعياري = $\sqrt{\text{تباين}(س)} = \sqrt{\frac{\Sigma س^٢ ت}{\Sigma ت} - \bar{س}^٢}$ حيث

$\bar{س} = \frac{\Sigma س\ ت}{\Sigma ت}$

# تمارين مراجعة نهاية الوحدة الخامسة

**١)** (نجمة خضراء) أُجريت دراسة لمدة ٩ سنوات على تخفيض التلوث عند استخدام الوقود الحيوي في الطبخ. تعامل الباحثون مع ١٠٠٠ شخص تقريبًا يعيشون في ١٢ قرية جنوب الصين استخدموا غاز الوقود الحيوي وحسّنوا تهوئة المطابخ. بعض الأشخاص لم يستفيدوا من أيٍّ من الوضعَين، وبعضهم انتقل لاستخدام الوقود النظيف، وبعضهم الآخر حسَّن تهوئة المطابخ، وبعضهم استفاد من الوضعَين معًا. يبيّن المخطَّط الآتي بيانات عن تركيز ثاني أكسيد النيتروجين في بيوت هؤلاء الأشخاص عند نهاية مدة الدراسة:




ادرس البيانات الممثلة في المخطَّط واكتب تحليلًا مختصرًا يلخص نتائج هذا الجزء من الدراسة.

**٢)** (نجمة حمراء) يبيّن الجدول الآتي كتلة النفايات (بالطن)، مقرَّبة إلى أقرب عددَين عشريين، الخارجة من أحد المنتجعات السياحية خلال ثلاثة فصول في السنة:

| الكتلة (بالطن) | عدد الأسابيع (ت) |
|---|---|
| ٠,١٥ – ٠,٢٩ | ٥ |
| ٠,٣٠ – ٠,٨٦ | ٨ |
| ٠,٨٧ – ١,٣٥ | ٢٠ |
| ١,٣٦ – ٢,٠٠ | ٦ |

أ) احسب الوسط الحسابي التقديري والانحراف المعياري التقديري لكتل النفايات لكل أسبوع مقرَّبة إلى أقرب منزلتَين عشريتَين.

ب) لا توجد نفايات في الأسابيع الثلاثة عشر التي يكون المنتجع مغلقًا فيها. إذا ضمَّنت هذه البيانات الإضافية في الحسابات، فما أثرها على الوسط الحسابي وعلى الانحراف المعياري؟

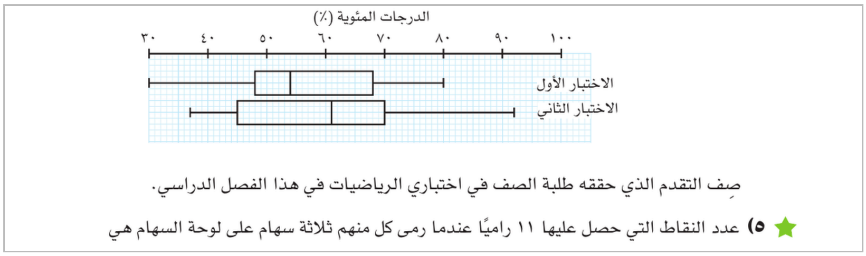
**٣)** تمّ سؤال ٣ أولاد و٤ بنات عن كميّة النقود في جيوبهم. وُجِد أن مع كلِّ ولد ٢,٥٠٠ ريال عُماني، وأن الوسط الحسابي لكميّة النقود في جيوب جميع الأطفال هو ٣,٩٠٠ ريال عُماني.

أ) بيّن أن مجموع النقود مع البنات هو ٣١,٥٠٠ ريال عُمانيّ.

ب) إذا كان مع الأطفال السبعة كمية النقود نفسها، فأوجد الانحراف المعياري للنقود الموجودة مع جميع الأطفال.

### مراجعة نهاية الوحدة (تابع)

**٤)** يبيّن المخطط الصندوقي الآتي الدرجات المئوية لطلبة صف في اختبارَي رياضيات في هذا الفصل الدراسي:




صِف التقدم الذي حققه طلبة الصف في اختباري الرياضيات في هذا الفصل الدراسي.

**٥)** (نجمة خضراء) عدد النقاط التي حصل عليها ١١ راميًا عندما رمى كل منهم ثلاثة سهام على لوحة السهام هي:

٥٤ ، ٤٦ ، ٤٣ ، ٥٢ ، ١٨٠ ، ٥٠ ، ٤١ ، ٥٦ ، ٥٢ ، ٤٩ ، ٥٤

أ) أوجد المدى، والمدى الرُّبيعي، والانحراف المعياري لهذه النقاط.

ب) ما أفضل مقياس في الجزئية (أ) ليلخص تشتت النقاط؟ اشرح سبب اختيارك ذلك المقياس.

**٦)** (نجمة زرقاء) طُلب إلى ١٢٠ شخصًا قراءة مقالة في صحيفة. يبيّن الجدول الآتي الزمن المستغرق مقرَّبًا إلى أقرب ثانية لقراءة المقال:

| الزمن (ثانية) | عدد الأشخاص (ت) |
|---|---|
| ١ – ٢٥ | ٤ |
| ٢٦ – ٣٥ | ٢٤ |
| ٣٦ – ٤٥ | ٣٨ |
| ٤٦ – ٥٥ | ٣٤ |
| ٥٦ – ٩٠ | ٢٠ |

احسب الوسط الحسابي التقديري والانحراف المعياري التقديري لزمن القراءة.

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

**٧)** يبين الجدول التكراري للبيانات المجمعة الآتي أطوال ٨٠ طفلًا بالسنتيمتر:

| الطول بالسنتمتر (ل) | عدد الأطفال (ت) |
|---|---|
| ١٢٠ ≤ ل < ١٢٤ | ٥ |
| ١٢٤ ≤ ل < ١٢٨ | ١٥ |
| ١٢٨ ≤ ل < ١٣٠ | ٢٢ |
| ١٣٠ ≤ ل < ١٣٨ | ١٨ |
| ١٣٨ ≤ ل < ١٤٦ | ٢٠ |

أ) اشرح كيف يمكننا أن نعلم أن المدى الربيعي التقديري هو ١٠ سم.

ب) احسب الانحراف المعياري التقديري مقرّبًا إلى أقرب ٣ منازل عشرية.

**ورقة الإجابات — مراجعة نهاية الوحدة**

*ملاحظة: الإجابات من حسابي لأن كتاب الطالب لا يتضمن مفتاح إجابات.*

**١)**

قراءات تقريبية من المخطط: المجموعة التي لم تستفد من أيٍّ من الوضعَين لها أعلى تركيز للملوثات (وسيطها قريب من ٠٫٧ ملغم/م³) ، والمجموعة التي استفادت من الوضعَين معًا لها أقل تركيز وأقل انتشار (وسيطها قريب من ٠٫٤ ملغم/م³) ، وتقع المجموعتان الأخريان (الوقود النظيف ، تهوئة المطابخ) بينهما.

الخلاصة: كلٌّ من الوقود النظيف وتحسين التهوئة يقلل تركيز ثاني أكسيد النيتروجين في البيوت ، والجمع بينهما يعطي أفضل النتائج.

**٢)**

أ) مراكز الفئات (بالحدود الفعلية): ٠٫٢٢ ، ٠٫٥٨ ، ١٫١١ ، ١٫٦٨ ؛ و Σت = ٣٩

الوسط الحسابي التقديري = ٠٫٩٧ طن (لأقرب منزلتين) ، والانحراف المعياري التقديري = ٠٫٤٤ طن (لأقرب منزلتين).

ب) إضافة ١٣ أسبوعًا بلا نفايات (قيم صفرية متكررة) تقلل الوسط الحسابي (تصبح القيم أكثر انخفاضًا في المتوسط) وتزيد الانحراف المعياري (لأن القيم تصبح أكثر تباعدًا عن الوسط الجديد الأقل).

**٣)**

ملاحظة: المطبوع في الكتاب «بيّن أن مجموع النقود مع البنات هو ٣١٫٥٠٠ ريال» ، بينما الحساب الصحيح يعطي ١٩٫٨٠٠ ريال (خطأ مطبعي).

أ) مجموع نقود الأطفال السبعة = ٧ × ٣٫٩٠٠ = ٢٧٫٣٠٠ ريال ؛ مجموع نقود الأولاد = ٣ × ٢٫٥٠٠ = ٧٫٥٠٠ ريال ؛ إذن مجموع نقود البنات = ٢٧٫٣٠٠ − ٧٫٥٠٠ = ١٩٫٨٠٠ ريال عُماني.

ب) إذا كان مع كل طفل الكمية نفسها (٣٫٩٠٠ ريال) فلا يوجد أي تشتت ؛ الانحراف المعياري = ٠.

**٤)**

قراءات تقريبية من المخطط: الاختبار الثاني أعلى من الاختبار الأول في جميع المقاييس تقريبًا ؛ فالوسيط ارتفع من نحو ٥٥٪ إلى نحو ٦٥٪ ، والربيعان الأدنى والأعلى تحركا نحو درجات أعلى ، والمدى الكلي للدرجات تحسن (من نحو ٣٥–٨٥ إلى نحو ٤٠–٩٥).

الخلاصة: تحسّن أداء طلبة الصف بين الاختبار الأول والثاني تحسنًا عامًّا وواضحًا.

**٥)**

بالترتيب: ٤١ ، ٤٣ ، ٤٦ ، ٤٩ ، ٥٠ ، ٥٢ ، ٥٢ ، ٥٤ ، ٥٤ ، ٥٦ ، ١٨٠

أ) المدى = ١٨٠ − ٤١ = ١٣٩ ؛ الوسيط = ٥٢ ، ر١ = ٤٦ ، ر٣ = ٥٤ ، فالمدى الربيعي = ٥٤ − ٤٦ = ٨ ؛ الانحراف المعياري = ٣٧٫٧٣ (مقربًا إلى منزلتين).

ب) أفضل مقياس هو المدى الربيعي ؛ لأن القيمة ١٨٠ متطرفة فتؤثر بشكل كبير في المدى (١٣٩) والانحراف المعياري (٣٧٫٧٣) ، بينما المدى الربيعي (٨) لا يتأثر بها ويعطي صورة أصدق عن تشتت معظم النقاط.

**٦)**

مراكز الفئات: ١٣ ، ٣٠٫٥ ، ٤٠٫٥ ، ٥٠٫٥ ، ٧٣ ؛ و Σت = ١٢٠

الوسط الحسابي التقديري = ٤٥٫٨٣ ثانية (مقربًا) ، والانحراف المعياري التقديري = ١٤٫٨٧ ثانية (مقربًا).

**٧)**

أ) التكرار التراكمي: ٥ ، ٢٠ ، ٤٢ ، ٦٠ ، ٨٠. الرتبة ٢٠ (موقع ر١ لـ ن = ٨٠) تقع عند نهاية الفئة ١٢٤ ≤ ل < ١٢٨ ، فنقدّر ر١ = ١٢٨ سم ؛ والرتبة ٦٠ (موقع ر٣) تقع عند نهاية الفئة ١٣٠ ≤ ل < ١٣٨ ، فنقدّر ر٣ = ١٣٨ سم ؛ إذن المدى الربيعي التقديري = ١٣٨ − ١٢٨ = ١٠ سم.

ب) مراكز الفئات: ١٢٢ ، ١٢٦ ، ١٢٩ ، ١٣٤ ، ١٤٢ ؛ الوسط التقديري = ١٣٢٫٣٧٥ سم ؛ الانحراف المعياري التقديري = ٦٫٤٢١ سم (لأقرب ٣ منازل عشرية).

خالد كمال
khaled-mathsurge.sh

# ملخص الوحدة الخامسة — مقاييس التشتت

ملخص قوي شامل وقصير: القوانين والقواعد وخطوات الحل، من ملخص الكتاب (قائمة التحقّق من التعلّم والفهم) بنصّه.

**أولًا: القوانين والقواعد (من قائمة التحقّق في الكتاب بنصّها)**

- مقاييس التشتت الشائعة هي المدى، المدى الرُّبيعي، والانحراف المعياري.
- يبيّن المخطط الصندوقي أصغر قيمة وأكبر قيمة، الرُّبيع الأدنى والرُّبيع الأعلى، ووسيط مجموعة البيانات.
- للبيانات غير المجمّعة، رتبة الوسيط ر٢ هي $\frac{\text{ن} + 1}{2}$
- المدى الربيعي = ر٣ − ر١
- للبيانات غير المجمّعة: الانحراف المعياري = $\sqrt{\text{تباين}(\text{س})} = \sqrt{\frac{\Sigma \text{س}^2}{\text{ن}} - \bar{\text{س}}^2}$ حيث $\bar{\text{س}} = \frac{\Sigma \text{س}}{\text{ن}}$
- للبيانات المجمّعة: الانحراف المعياري = $\sqrt{\text{تباين}(\text{س})} = \sqrt{\frac{\Sigma \text{س}^2 \text{ت}}{\Sigma \text{ت}} - \bar{\text{س}}^2}$ حيث $\bar{\text{س}} = \frac{\Sigma \text{س ت}}{\Sigma \text{ت}}$

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

**خطوات الحل الأساسية**

• المدى: غير المجمّعة = أكبر قيمة − أصغر قيمة ؛ المجمّعة = الحد الأعلى للفئة الأخيرة − الحد الأدنى للفئة الأولى (تقديري).

• الربيعان: رتبة ر١ هي $\frac{ن + ١}{٤}$ ورتبة ر٣ هي $\frac{٣(ن + ١)}{٤}$ ، وبالمخطط الصندوقي تُقرأ القيم الخمس.

• الانحراف المعياري من جدول: أوجد س̄، ثم Σس² (أو Σم²ت للمجمّعة بمراكز الفئات)، وعوّض في الصيغة، وخذ الجذر الموجب.

• المقارنة بين توزيعين: الوسط الأعلى للأداء الأعلى، والانحراف المعياري الأصغر للأداء الأكثر ثباتًا.

**ثانيًا: أهم الدروس**

• ٥-١ المدى للبيانات المجموعة وغير المجموعة.

• ٥-٢ المدى الربيعي: الربيعان للبيانات المرتّبة ومن ساق وورقة، والمخطط الصندوقي (ومزدوج للمقارنة).

• ٥-٣ التباين والانحراف المعياري: للبيانات غير المجمّعة (أ) وللمجمّعة بالجداول المتصلة (ب).

• ٥-٤ خصائص مقاييس التشتت: تأثير القيم المتطرّفة، وأنسب مقياس للتلخيص.

# ملخص الوحدة الخامسة (تابع)

**ثالثًا: أهم المسائل في المذكرة**

• أمثلة ١-٧ وتمارين ٥-١ (المدى بأنواعه).

• أمثلة ٨-١٣ وتمارين ٥-٢ (س١-١٣): الربيعان والمدى الربيعي، منها س١٠ (ساق وورقة — ملحوظ فيها خطأ مطبعي مُعلَّم)، ومثال ١١ (مقارنة صندوقين: عامر ومنصور).

• أمثلة ١٤-١٨ وتمارين ٥-٣أ/ب: الانحراف المعياري من قوائم وجداول متصلة، منها ٥-٣أ س٤ (غيابات العمّال) و ٥-٣ب س٢ (سعة الأوعية).

• مثالا ١٩ و ٢٠ وتمارين ٥-٤.

**أهم المسائل — مراجعة نهاية الوحدة:**

• مراجعة نهاية الوحدة (س١-٧): خصوصًا س٥ (رماة السهام — أثر القيمة المتطرّفة) وس٦ وس٧ (انحراف معياري تقديري من جداول).

**رابعًا: مسائل متوقَّعة في الاختبار — توقّع استرشادي من الكتاب والمنهج فقط، وليست معلومة مؤكدة عن الامتحان:**

• حساب الانحراف المعياري لبيانات غير مجمّعة أو من جدول تكراري متصل (مع الوسط التقديري).

• مقارنة توزيعين بالوسط الحسابي والانحراف المعياري والحكم على الأفضل والأكثر ثباتًا.

• تحليل مخطط صندوقي (أو مزدوج): قراءة القيم الخمس والمدى الربيعي ووصف التوزيع.

• مسألة فيها قيمة متطرّفة: قياس أثرها على المدى والانحراف المعياري واختيار المقياس الأنسب (المدى الربيعي).

• إيجاد الربيعين والمدى الربيعي من تمثيل ساق وورقة.

خالد كمال
khaled-math.edu.eg