١-٣ المتتاليات الحسابية

المتتالية العددية هي مجموعة من الأعداد المرتّبة التي تحقّق قاعدة ما، وتسمّى الأعداد في المتتالية **حدود** المتتالية. المتتالية التي يكون الفرق فيها بين كل حدّ والحدّ الذي يسبقه مباشرة مقدارًا ثابتًا تسمّى **متتالية حسابية** arithmetic sequence ، ويسمّى هذا الفرق الثابت **أساس** المتتالية common difference .

الرموز المستخدمة في المتتالية الحسابية: أ = الحدّ الأول ، د = الأساس ، ل = الحدّ الأخير ، ن = رتبة الحدّ.

في المتتالية ٥ ، ٨ ، ١١ ، ١٤ ، ١٧ : أ = ٥ ، د = ٣ ، ل = ١٧ ، والحدّ الرابع هو ١٤ ورتبته ن = ٤ .

الحدود الخمسة الأولى في أيّة متتالية حسابية حدّها الأول (أ) وأساسها (د) هي: أ ، أ + د ، أ + ٢د ، أ + ٣د ، أ + ٤د ، ... ، أ + (ن − ١)د

نتيجة ١: الحدّ العام (الحدّ النوني) للمتتالية الحسابية التي حدها الأول أ ، وأساسها د هو: حن = أ + (ن − ١)د ، حيث ن عدد صحيح موجب.

الحدّ الأخير في متتالية حسابية عدد حدودها (ن) هو: ل = أ + (ن − ١)د .

إذا علمت الحدّ الأول والحدّ الأخير في متتالية حسابية يمكنك أن تعيد ترتيب هذه الصيغة لتحصل على: ن = $\frac{\text{ل} - \text{أ}}{\text{د}}$ + ١ لتجد عدد حدود المتتالية.

خالد كمال
khaled-math.edu

٣-١ أمثلة ١ و ٢ و ٣

مثال ١

الحد النوني في متتالية حسابية هو حن = (٣ن − ١١): أوجد الحدّ الأول والأساس.

الحلّ

رتبة الحد الأول هي ن = ١ : ح١ = ٣(١) − ١١ = −٨

لحساب الأساس نوجد الحد الثاني: رتبة الحد الثاني هي ن = ٢ : ح٢ = ٣(٢) − ١١ = −٥

الأساس = الحدّ الثاني − الحدّ الأول = −٥ − (−٨) = ٣

مثال ٢

أوجد عدد حدود المتتالية الحسابية −١٧ ، −١٤ ، −١١ ، −٨ ، ... ، ٥٨ .

الحلّ

د = −١٤ − (−١٧) = ٣ ، حن = أ + (ن − ١)د

٥٨ = −١٧ + ٣(ن − ١) ، بحلّ المعادلة: ن − ١ = ٢٥ ، ن = ٢٦

الحلّ (تابع)

حل آخر باستخدام الصيغة: $ن = \frac{ل - أ}{د} + ١ = \frac{(-١٧) - ٥٨}{٣} + ١ = ٢٦$

مثال ٣

متتالية حسابية فيها $ح_{٥} = ٤,٤$ ، $ح_{٩} = ٧,٦$. أوجد الأساس والحدّ الأول.

الحلّ

$ح_{٩} - ح_{٥} = ٤د = ٧,٦ - ٤,٤ = ٣,٢$ ، $د = ٠,٨$

$ح_{٥} = أ + ٤د = ٤,٤$ ، $أ = ٤,٤ - ٤(٠,٨) = ١,٢$

١-٣ مجموع المتتالية الحسابية

تُكتب **المتسلسلة** series في صورة مجموع حدود المتتالية.

استكشف ١

يقال إن عالِم الرياضيات كارل جاوس وهو في الثامنة من عمره قد سُئل عن إيجاد مجموع الأعداد من ١ إلى ١٠٠ : ظنّ معلّمه أن هذه المهمّة ستشغله لبعض الوقت، لكنه فوجئ بأن كتب الإجابة الصحيحة بعد عدة ثوان. كانت طريقته أن جمع الأعداد أزواجًا: ١ + ١٠٠ = ١٠١ ، ٢ + ٩٩ = ١٠١ ، ٣ + ٩٨ = ١٠١ ، ...

١) هل يمكنك أن تكمل طريقة جاوس لتجد الإجابة؟

٢) استخدم طريقة جاوس لتجد مجموع: أ) ٢ + ٤ + ٦ + ٨ + ... + ٤٠٠ ب) ٣ + ٦ + ٩ + ١٢ + ... + ٤٥٠ ج) ١٧ + ٢٤ + ٣١ + ٣٨ + ... + ٣٦٠

٣) استخدم طريقة جاوس لتجد عبارة للمجموع بدلالة ن: ١ + ٢ + ٣ + ٤ + ... + (ن − ١) + ن

المتسلسلة الحسابية هي مجموع حدود متتالية حسابية.

نتيجة ٢: مجموع أول ن حدًّا من متسلسلة حسابية حدّها الأول أ وأساسها د هو:

$$\text{جـن} = \frac{\text{ن}}{٢}(\text{أ} + \text{ل}) = \frac{\text{ن}}{٢}[٢\text{أ} + (\text{ن} - ١)\text{د}]$$

البرهان: جـن = أ + (أ + د) + (أ + ٢د) + ... + (ل − د) + ل (١) وبعكس الترتيب:

جـن = ل + (ل − د) + ... + (أ + د) + أ (٢) . بجمع (١) و (٢): ٢جـن = ن(أ + ل) ،

فتكون جـن = $\frac{\text{ن}}{٢}$ (أ + ل) . وبالتعويض عن ل = أ + (ن − ١)د نحصل على: جـن = $\frac{\text{ن}}{٢}$ [٢أ + (ن − ١)د] .

ملاحظة: يمكن إيجاد الحدّ النوني من المجموع بالعلاقة: حن = جن − جن−١ .

٣-١ أمثلة ٤ و ٥

مثال ٤

مجموع أول ن حدًّا في متتالية حسابية يعطى بالعلاقة جن = ٥ن^{٢} − ٣ن . أوجد الحدّ الأول والأساس والحدّ النوني.

الحلّ

أ = ح١ = ج١ = ٥(١)^{٢} − ٣(١) = ٢

ج٢ = ٥(٤) − ٦ = ١٤ ، ح٢ = ج٢ − ج١ = ١٢ ، د = ١٢ − ٢ = ١٠

حن = جن − جن−١ = ٥ن^{٢} − ٣ن − [٥(ن − ١)^{٢} − ٣(ن − ١)] = ١٠ان − ٨

تحقّق: أ + (ن − ١)د = ٢ + ١٠(ن − ١) = ١٠ان − ٨

مثال ٥

أوجد مجموع المتتالية الحسابية التي حدّها الأول ٢٥ وحدّها التاسع عشر −٣٨ وحدّها الأخير −٨٧ .

الحلّ

$$ح_{١٩} = أ + ١٨د : -٣٨ = ٢٥ + ١٨د ، د = \frac{-٦٣}{١٨} = -٣,٥$$

$$ن = \frac{ل - أ}{د} + ١ = \frac{-٨٧ - ٢٥}{-٣,٥} + ١ = ٣٢ + ١ = ٣٣$$

$$ج_{٣٣} = \frac{٣٣}{٢} (٢٥ + (-٨٧)) = ٣٣ \times (-٣١) = -١٠٢٣$$

٣-١ أمثلة ٦ و ٧

مثال ٦

في متتالية حسابية الحدّ الثاني عشر ٨ ، ومجموع أول ١٣ حدًّا ٧٨ . أوجد الأساس والحدّ الأول.

الحلّ

$$ج_{١٣} = \frac{١٣}{٢} (٢أ + ١٢د) = ٧٨ ، \text{أي } ٢أ + ١٢د = ١٢ ، أ + ٦د = ٦$$

$$ح_{١٢} = أ + ١١د = ٨$$

بالطرح: ٥د = ٢ ، د = ٠,٤ ، أ = ٨ − ١١(٠,٤) = ٣,٦

الحلّ (تابع)

تحقّق: $ج_{١٣} = \frac{١٣}{٢}(٢ \times ٣{,}٦ + ١٢ \times ٠{,}٤) = \frac{١٣}{٢} \times ١٢ = ٧٨$

مثال ٧

يخطّط مبارك لزراعة ورد في جزء من حديقة منزله على شكل شبه منحرف. يريد زراعة ٩٧ شتلة ورد على طول الضلع الأكبر، وينقص عدد شتلات الورد بمقدار شتلتَين من كل طرف لكل صف لاحق، إلى أن يكمل زراعة ٢٠ صفًّا. كم شتلة سيشتري مبارك؟

الحلّ

المتتالية بمعرفة عدد الشتلات في كل صف: ٩٧ ، ٩٣ ، ٨٩ ، ... متتالية حسابية أساسها −٤ وحدّها الأول ٩٧ وعدد حدودها ٢٠ .

$ج_{٢٠} = \frac{٢٠}{٢}[(٢)٩٧ + (٢٠ - ١)(-٤)] = ١٠ \times (١٩٤ - ٧٦) = ١١٨٠$

سيشتري ١١٨٠ شتلة ورد.

تمارين ٣-١

١) متتالية حسابية حدها الأول أ وأساسها د عبّر عن الحد الخامس والحد الرابع عشر بدلالة أ ، د .

٢) أوجد مجموع كلّ متسلسلة من المتسلسلات الحسابية الآتية:

أ) ٢ + ٩ + ١٦ + ... (١٥ حدًّا)

ب) ٢٠ + ١١ + ٢ + ... (٢٠ حدًّا)

ج) ٨,٥ + ١٠ + ١١,٥ + ... (٣٠ حدًّا)

٣) أوجد عدد حدود ومجموع كلّ من المتسلسلتَين الآتيتَين:

أ) ٢٣ + ٢٧ + ٣١ + ... + ١٥٩

ب) ٢٨ + ١١ − ٦ − ... − ٢١٠

٤) متتالية حسابية حدّها الأول ٢ ، ومجموع ١٢ حدًّا الأولى هو ٦١٨ : أوجد أساسها.

٥) متتالية حسابية حدّها الأول −١٣ وحدّها العشرين ٨٢ والحدّ الأخير ١١٢ : أ) أوجد الأساس وعدد حدود المتتالية. ب) أوجد مجموع حدود المتتالية.

٦) متتالية حسابية حدّاها الأول والثاني ٧٥ ، ٤٦ على الترتيب، والحدّ الأخير −٢١٥ : أوجد مجموع حدود المتتالية.

٧) متتالية حسابية حدها الأول ٨ وحدها الأخير ٣٤ ، ومجموع الستة الأولى ٥٨ : أوجد عدد حدود المتتالية.

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

٨) متتالية حسابية حدّها الأول ٧ وحدّها الحادي عشر هو ٣٢ ، ومجموع حدودها ٢٧٩٠ : أوجد عدد حدود المتتالية.

٩) متتالية حسابية حدّها الثامن −١٠ ومجموع أول ٢٠ حدًّا −٣٥٠ : أ) أوجد الحدّ الأول وأساس المتتالية. ب) إذا علمت أن الحدّ العام (الحد النوني) −٩٧ ، فأوجد قيمة ن .

تمارين ٣-١ (تابع)

١٠) متتالية حسابية مجموع حدود الـ ن الأولى يعطى على الشكل الآتي جن = ٤ن^{٢} + ٢ن : أوجد الحدّ الأول وأساس المتتالية.

١١) متتالية حسابية مجموع أول ن حدًّا فيها جن = −٣ن^{٢} − ٢ن : أوجد الحدّ الأول وأساس المتتالية.

١٢) متتالية حسابية مجموع أول ن حدًّا فيها جن = $\frac{\text{ن}}{٣}$ (٤ن + ٥) : أوجد عبارة جبرية للحدّ العام للمتتالية.

١٣) قسّمت دائرة إلى ١٢ قطاعًا دائريًّا. قياسات زوايا القطاعات تشكّل متتالية حسابية، حيث قياس زاوية القطاع الأكبر يعادل ٦,٥ أمثال قياس زاوية القطاع الأصغر. أوجد قياس زاوية القطاع الأصغر.

١٤) متتالية حسابية حدها الأول (أ) وأساسها (د). مجموع أول ٢٥ حدًّا فيها يساوي ٧ أمثال مجموع الأربعة الأولى منها: أ) أوجد قيمة (أ) بدلالة (د). ب) أوجد الحدّ ٥٥ بدلالة (د).

١٥) متتالية حسابية حدّها الثامن ثلاثة أمثال الحد الثالث. بيّن أن مجموع أول ثمانية حدود في المتتالية يعادل أربعة أمثال مجموع أول أربعة حدود فيها.

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

١٦) مقدار ما ادّخره مروان ١٥٥٠٠ ريال عُماني. وينفق منه مبالغ شهرية تشكّل متتالية حسابية. أنفق في الشهر الأول ١٤٠ ريالًا، ثم أنفق جميع ما ادّخره بعد ٣١ شهرًا. كم بقي ممّا ادّخره بعد مرور عشرة أشهر؟

١٧) اشترى عبد الرحيم سيارة بمبلغ ٨٠٠٠ ريال عُماني. دفع ثمن السيارة على دفعات شهرية تشكّل متتالية حسابية. الدفعة الأولى كانت ٢٠٠ ريال عُماني، وسدّد الثمن كاملًا بعد ١٦ دفعة. أوجد قيمة الدفعة الخامسة.

١٨) عائلة هدفها توفير ٤٠٠٠ ريال عُماني. قرّرت توفير ٤٠٠ ريال عُماني كل شهر. وبما أن تكاليف المعيشة في ازدياد فستخفض مقدار التوفير ٢٥ ريالًا عُمانيًّا كل شهر. هل ستحقّق العائلة هدفها بعد مرور سنة كاملة؟

١٩) ترغب حليمة في شراء سيارة ثمنها ١٥٧٥٠ ريالًا عُمانيًّا. وستسدّد الثمن على أقساط شهرية تشكّل متتالية حسابية. إذا كان القسط الأول ٢٥٠ ريالًا عُمانيًّا والقسط الثاني ٣٠٠ ريال عُماني، فأوجد: أ) بعد كم شهرًا تسدّد حليمة كامل المبلغ؟ ب) كم سيكون مقدار القسط الأخير؟

خالد كمال
khaled-math.sites.sh

ورقة الإجابات النموذجية ٣-١

استكشف ١: ١) ٥٠ زوجًا مجموع كلّ منها ١٠١ : ٥٠ × ١٠١ = ٥٠٥٠ | ٢) أ) ٢٠٠ حدًّا: ١٠٠ × ٤٠٢ = ٤٠٢٠٠ | ب) ١٥٠ حدًّا: ٧٥ × ٤٥٣ = ٣٣٩٧٥ | ج) ٥٠ حدًّا: ٢٥ × ٣٧٧ = ٩٤٢٥ | ٣) $\frac{\text{ن}(\text{ن} + ١)}{٢}$

١: $\text{ح}_{٥} = \text{أ} + ٤\text{د}$ ، $\text{ح}_{١٤} = \text{أ} + ١٣\text{د}$

٢: أ) $\text{ج}_{١٥} = \frac{١٥}{٢}[٤ + ١٤ \times ٧] = \frac{١٥}{٢} \times ١٠٢ = ٧٦٥$ | ب) $\text{ج}_{٢٠} = ١٠[٤٠ + ١٩ \times (-٩)] = ١٠ \times$ (−١٣١) = −١٣١٠ | ج) $\text{ج}_{٣٠} = ١٥[١٧ + ٢٩ \times ١,٥] = ١٥ \times ٦٠,٥ = ٩٠٧,٥$

٣: أ) ن = $\frac{١٥٩ - ٢٣}{٤}$ + ١ = ٣٥ ، ج = $\frac{٣٥}{٢}$ (٢٣ + ١٥٩) = ٣١٨٥ | ب) ن = $\frac{-٢١٠ - ٢٨}{-١٧}$ + ١ = ١٥ ، ج = $\frac{١٥}{٢}$ (٢٨ − ٢١٠) = −١٣٦٥

٤: $ج_{١٢}$ = ٦(٤ + ١١د) = ٦١٨ ، ٤ + ١١د = ١٠٣ ، د = ٩

٥: أ) ٨٢ = −١٣ + ١٩د ، د = ٥ ، ن = $\frac{١٣ + ١١٢}{٥}$ + ١ = ٢٦ | ب) $ج_{٢٦}$ = ١٣(−١٣ + ١١٢) = ١٢٨٧

٦: د = ٤٦ − ٧٥ = −٢٩ ، ن = $\frac{-٢١٥ - ٧٥}{-٢٩}$ + ١ = ١١ ، ج = $\frac{١١}{٢}$ (٧٥ − ٢١٥) = −٧٧٠

٧: $ج_{٦}$ = ٣(١٦ + ٥د) = ٥٨ ، ٥د = $\frac{١٠}{٣}$ ، د = $\frac{٢}{٣}$ ، ن = (٣٤ − ٨) ÷ $\frac{٢}{٣}$ + ١ = ٤٠

٨: ٣٢ = ٧ + ١٠د ، د = ٢,٥ ، $\frac{ن}{٢}$ [١٤ + ٢,٥(ن − ١)] = ٢٧٩٠ ، ٢,٥ن^{٢} + ١١,٥ن − ٥٥٨٠ = ٠ ، ن = ٤٥

٩: أ) أ + ٧د = −١٠ ، ١٠(٢أ + ١٩د) = −٣٥٠ أي ٢أ + ١٩د = −٣٥ ، بالطرح: ٥د = −١٥ ، د = −٣ ، أ = ١١ | ب) ١١ − ٣(ن − ١) = −٩٧ ، ن = ٣٧

١٠: أ = $ج_{١}$ = ٦ ، $ج_{٢}$ = ٢٠ ، $ج_{٣}$ = ١٤ ، د = ٨

١١: أ = $ج_{١}$ = −٥ ، $ج_{٢}$ = −١٦ ، $ج_{٣}$ = −١١ ، د = −٦

١٢: حن = جن − جن−١ = $\frac{٤ن^{٢} + ٥ن}{٣}$ − $\frac{٤(ن − ١)^{٢} + ٥(ن − ١)}{٣}$ = $\frac{٨ن + ١}{٣}$

١٣: $ج_{١٢} = ٦(٢أ + ١١د) = ٣٦٠$ ، $٢أ + ١١د = ٦٠$ ، ول $= ٦,٥أ$: $أ + ١١د = ٦,٥أ$ ، $١١د = ٥,٥أ$ ، فتكون $٧,٥أ = ٦٠$ ، $أ = ٨°$

١٤: أ) $\frac{٢٥}{٢}(٢أ + ٢٤د) = ٢ \times ٧(٢أ + ٣د)$ ، $٢٥أ + ٣٠٠د = ٢٨أ + ٤٢د$ ، $٣أ = ٢٥٨د$ ، $أ = ٨٦د$ | ب) $ج_{٥٥} = أ + ٥٤د = ١٤٠د$

١٥: $أ + ٧د = ٣(أ + ٢د)$ ، $د = ٢أ$. $ج_٨ = ٤(٢أ + ٧د) = ٨أ + ٥٦أ = ٦٤أ$ ، $ج_٤ = ٤ \times ٢(٢أ + ٣د) = ١٦أ + ٤٨أ = ٦٤أ$ ، إذن $ج_٨ = ج_٤$

١٦: $ج_{٣١} = \frac{٣١}{٢}(٢٨٠ + ٣٠د) = ١٥٥٠٠$ ، $د = ٢٤$. $ج_١ = ٥(٢٨٠ + ٩ \times ٢٤) = ٢٤٨٠$ ، الباقي $= ١٥٥٠٠ - ٢٤٨٠ = ١٣٠٢٠$ ريال

١٧: $ج_{١٦} = ٨(٤٠٠ + ١٥د) = ٨٠٠٠$ ، $د = ٤٠$ ، $ج_٥ = ٢٠٠ + ٤ \times ٤٠ = ٣٦٠$ ريالًا

١٨: $ج_{١٢} = ٦(٨٠٠ + ١١ \times (-٢٥)) = ٦ \times ٥٢٥ = ٣١٥٠ < ٤٠٠٠$ ، لا تحقّق العائلة هدفها

١٩: $د = ٥٠$ ، $\frac{ن}{٢}[٥٠٠ + ٥٠(ن - ١)] = ١٥٧٥٠$ ، $ن^٢ + ٩ن - ٦٣٠ = ٠$ ، $ن = ٢١$ شهرًا | ب) القسط الأخير $= ٢٥٠ + ٢٠ \times ٥٠ = ١٢٥٠$ ريالًا

ملاحظة: الإجابات من حسابي لأن كتاب الطالب لا يتضمن مفتاح إجابات.

خالد كمال
khaled-math.sarge.sh

٣-٢ المتتاليات الهندسية

المتتالية التي يكون فيها كل حدّ يساوي أمثالًا ثابتة من الحدّ السابق له تسمّى **متتالية هندسية** geometric progression ، ويُحسب الأساس (ر) بقسمة كل حدّ على الحدّ الذي يسبقه مباشرة (مقدار ثابت).

في المتتالية ٢ ، ٦ ، ١٨ ، ٥٤ ، ١٦٢ ، ... كل حدّ يساوي ثلاثة أمثال الحدّ السابق له، فيكون الأساس ر = ٣ . وفي المتتالية ١٢٨ ، ٦٤ ، ٣٢ ، ١٦ ، ... كل حدّ يساوي نصف الحدّ السابق له، فيكون الأساس ر = $\frac{١}{٢}$.

الرموز المستخدمة في المتتالية الهندسية: أ = الحدّ الأول ، ر = الأساس ، حن = الحدّ العام ، ن = رتبة الحدّ.

الحدود الخمسة الأولى في متتالية هندسية حدّها الأول (أ) وأساسها (ر) هي: أ ، أر ، أر^{٢} ، أر^{٣} ، أر^{٤} .

نتيجة ٣: الحدّ العام (الحدّ النوني) للمتتالية الهندسية التي حدّها الأول أ وأساسها ر هو: حن = أر$^{ن-١}$ ، حيث ن عدد صحيح موجب.

٣-٢ أمثلة ٨ و ٩ و ١٠

مثال ٨

الحد النوني في متتالية هندسية هو حن = ٣٠(−$\frac{١}{٢}$)^{ن} . أوجد الحدّ الأول وأساس المتتالية.

الحلّ

$ح_{١} = ٣٠(-\frac{١}{٢}) = -١٥$ ، $ح_{٢} = ٣٠(-\frac{١}{٢})^{٢} = ٧,٥$

$ر = \frac{ح_{٢}}{ح_{١}} = \frac{٧,٥}{-١٥} = -\frac{١}{٢}$ ، $\therefore$ أ $= -١٥$ ، الأساس ر $= -\frac{١}{٢}$

مثال ٩

متتالية هندسية حدها الثالث ١٤٤ وأساسها يساوي $\frac{٣}{٢}$. أ) أوجد الحد السابع. ب) اكتب عبارة جبرية للحدّ العام.

الحلّ

أ) $ح_{٣} = أر^{٢} = ١٤٤$ ، $أ = ١٤٤ \div \frac{٩}{٤} = ٦٤$

$ح_{٧} = ٦٤(\frac{٣}{٢})^{٦} = ٧٢٩$

حل آخر: $ح_{٧} = ح_{٣} \times ر^{٤} = ١٤٤ \times \frac{٨١}{١٦} = ٧٢٩$

ب) الحدّ العام $ح_{ن} = ٦٤(\frac{٣}{٢})^{ن-١}$

مثال ١٠

متتالية هندسية جميع حدودها موجبة، حدها الثاني ١٠٨ وحدها الرابع ٤٨، أوجد الحدّ الأول وأساس المتتالية (النسبة الثابتة)، ثم اكتب عبارة جبرية للحدّ العام.

الحلّ

$١٠٨ = أ ر$ ... (١) ، $٤٨ = أ ر^{٣}$ ... (٢)

بقسمة (٢) على (١): $ر^{٢} = \frac{٤٨}{١٠٨} = \frac{٤}{٩}$ ، $ر = \pm \frac{٢}{٣}$

وحيث إن جميع الحدود موجبة $\Leftarrow ر > ٠$: $ر = \frac{٢}{٣}$

عوّض عن $ر = \frac{٢}{٣}$ في المعادلة (١) يعطي $١٠٨ = أ \times \frac{٢}{٣}$ ، $أ = ١٦٢$

$حـن = ١٦٢ (\frac{٢}{٣})^{ن-١}$

٣-٢ مجموع المتتالية (المتسلسلة) الهندسية

تُكتب **المتسلسلة** series في صورة مجموع حدود المتتالية.

خالد كمال
khaled-math.stage.sh

استكشف ٢

١) اعتمد مجموع أول عشرة حدود $ج_{١٠}$ في متتالية هندسية حيث $أ = ١$ ، $ر = ٥$: $ج_{١٠} = ١ + ٥ + ٥^{٢} + ٥^{٣} + ... + ٥^{٩}$

أ) اضرب طرفَي المعادلة أعلاه في الأساس ٥ ، وأكمل: $٥ج_{١٠} = ٥ + ٥^{٢} + ٥^{٣} + ... + ٥^{١٠}$ ب) ماذا يحصل عندما تطرح المعادلة $ج_{١٠}$ من المعادلة $٥ج_{١٠}$ ؟ ج) هل يمكنك أن تجد طريقة أخرى للعبارة عن $ج_{١٠}$ ؟

٢) استخدم الطريقة المعتمدة في (١) لتجد طريقة بديلة للتعبير عن كلّ مجموع من المجاميع الآتية: أ) $٣ + ٣ \times ٢ + ٣ \times ٢^{٢} + ... + ٣ \times ٢^{١١}$ (١٢ حدًّا) ب) $٢٧ + ٢٧ \times \frac{١}{٣} + ٢٧(\frac{١}{٣})^{٢} + ... + ٢٧(\frac{١}{٣})^{١٤}$ (١٥ حدًّا) ج) $٢٧ - ١٨ + ١٢ - ٨ + ...$ (٢٠ حدًّا)

نتيجة ٤: مجموع أول ن حدًّا من متسلسلة هندسية حدّها الأول أ وأساسها ر :

$ج_{ن} = \frac{أ(١ - ر^{ن})}{١ - ر}$ أو $ج_{ن} = \frac{أ(ر^{ن} - ١)}{ر - ١}$ ، $ر \neq ١$.

حالة خاصة: عندما $ر = ١$ ، فإن $ج_{ن} = أ \times ن$.

البرهان: $ج_{ن} = أ + أر + أر^{٢} + ... + أر^{ن-١}$ (١) . اضرب المعادلة (١) في ر : $رج_{ن} = أر + أر^{٢} + ... + أر^{ن}$ (٢) . اطرح المعادلة (١) من المعادلة (٢): $رج_{ن} - ج_{ن} = أر^{ن} - أ$ ، $ج_{ن}(ر - ١) = أ(ر^{ن} - ١)$ ، $ج_{ن} = \frac{أ(ر^{ن} - ١)}{ر - ١}$. وبضرب البسط والمقام في -١ تحصل على الصيغة البديلة.

٣-٢ أمثلة ١١ و ١٢ و ١٣

مثال ١١

في المتسلسلة الهندسية ٢ + ٦ + ١٨ + ٥٤ + ... أوجد مجموع الحدود العشرة الأولى.

الحلّ

$$ج_{ن} = \frac{أ(ر^{ن} - ١)}{ر - ١} \quad ، \quad أ = ٢ \ ، \ ر = ٣ \ ، \ ن = ١٠$$

$$ج_{١٠} = \frac{٢(٣^{١٠} - ١)}{٣ - ١} = ٥٩٠٤٨$$

مثال ١٢

الحدّ الثاني في متتالية هندسية يقلّ عن الحدّ الأول بمقدار ٩ ومجموع الحدَّين الثاني والثالث ٣٠ ، إذا علمت أن جميع حدود المتتالية موجبة فأوجد الحدّ الأول.

الحلّ

$$ح_{٢} = ح_{١} - ٩ \ : \ أ - أر = ٩ \ ، \ أ(١ - ر) = ٩ \ ... \ (١)$$

الحلّ (تابع)

$ح_{٢} + ح_{٣} = ٣٠ : أر + أر^{٢} = ٣٠ ، أر(١ + ر) = ٣٠ \dots (٢)$

بقسمة (٢) على (١): $\frac{ر(١ + ر)}{١ - ر} = \frac{٣٠}{٩}$ ، $٣ر^{٢} + ١٣ر - ١٠ = ٠ ، (٣ر - ٢)(ر + ٥) = ٠ ، ر$

$= \frac{٢}{٣}$ أو $ر = -٥$

جميع الحدود موجبة $\Longleftarrow ر > ٠ : ر = \frac{٢}{٣}$ ، عوّض في (١): $أ(١ - \frac{٢}{٣}) = ٩ ، أ = ٢٧$

$\therefore ح_{١} = ٢٧$

مثال ١٣

تخطّط شركة ما لزيادة دعمها المجتمعي بنسبة ٢٪ كل سنة لمدة ٥ سنوات. كانت قيمة التبرّع سنة ٢٠٢٢م تبلغ ١٣٠٠٠٠ ريال عُماني. أوجد: أ) قيمة ما ستتبرّع به الشركة للمجتمع سنة ٢٠٢٧م. ب) مقدار الدعم الإضافي الكلي على مدار الخمس سنوات.

الحلّ

أ) كل سنة تُضرب القيمة في ١٫٠٢ (الزيادة ٢٪ كل سنة تقابل معامل ضرب مقداره ١٫٠٢): $أ = ١٣٠٠٠٠ ، ر = ١٫٠٢$

الحلّ (تابع)

٢٠٢٧ هي السنة السادسة: $ح_٦ = ١٣٠٠٠٠ \times ١{,}٠٢^{٥} = ١٤٣٥٣٠{,}٥٠٤$ ريالًا عُمانيًّا

ب) $ج_٦ = \dfrac{أ(ر^{ن} - ١)}{ر - ١} = \dfrac{١٣٠٠٠٠(١{,}٠٢^{٦} - ١)}{١{,}٠٢ - ١} = ٨٢٠٠٥٧{,}٢٥٢$

مجموع ما تتبرّع به الشركة إذا لم يكن هناك زيادة: ٦ × ١٣٠٠٠٠ = ٧٨٠٠٠٠

الفرق بين القيمتَين: ٨٢٠٠٥٧٫٢٥٢ − ٧٨٠٠٠٠ = ٤٠٠٥٧٫٢٥٢

الدعم الإضافي الكلي: ٤٠٠٥٧٫٢٥ ريالًا عُمانيًّا لأقرب منزلتين عشريتين.

تمارين ٢-٣

١) حدّد ما إذا كانت كل متتالية من المتتاليات الآتية هندسية. إذا كانت هندسية، فاكتب الأساس والحدّ الثامن:

أ) ١ ، ٢ ، ٤ ، ٦ ، …

ب) ١ ، −٤ ، ١٦ ، −٦٤ ، …

ج) ٨١ ، ٢٧ ، ٩ ، ٣ ، …

د) $\frac{٢}{١١}$ ، $\frac{٣}{١١}$ ، $\frac{٥}{١١}$ ، $\frac{٨}{١١}$ ، …

هـ) ٢ ، ٠٫٤ ، ٠٫٠٨ ، ٠٫٠١٦ ، …

و) −٥ ، ٥ ، −٥ ، ٥ ، …

٢) متتالية هندسية حدّها الأول (أ) وأساسها (ر). اكتب الحد التاسع والحد العشرين بدلالة أ ، ر .

٣) متتالية هندسية حدّها الثالث ١٠٨ وحدها السادس −٣٢ : أوجد أساس المتتالية والحدّ الأول.

٤) متتالية هندسية حدّها الأول ٧٥ وحدّها الثالث ٢٧ ، أوجد القيمتَين الممكنتَين للحدّ الرابع.

٥) متتالية هندسية فيها $ح_{٢} = ١٢$ ، $ح_{٤} = ٢٧$ ، إذا علمت أن جميع الحدود موجبة فأوجد أساس المتتالية وحدّها الأول.

٦) متتالية هندسية فيها $ح_{٦} = \frac{٥}{٢}$ ، $ح_{١٢} = ٣٢٠$ ، أوجد أساس المتتالية وحدَّيها الأول والعاشر.

٧) متتالية هندسية مجموع حدَّيها الثاني والثالث هو ٣٠ ، ويقلّ الحدّ الثاني عن الحد الأول بمقدار ٩ . إذا علمت أن جميع الحدود موجبة فأوجد الحدّ الأول.

٨) إذا كانت (س) ، (س + ٦) ، (س + ٩) ثلاثة حدود في متتالية هندسية على الترتيب، فأوجد قيمة س .

٩) أوجد مجموع أول ثمانية حدود في كل متسلسلة من المتسلسلات الهندسية الآتية:

أ) ٤ + ٨ + ١٦ + ٣٢ + ...

ب) ٧٢٩ + ٢٤٣ + ٨١ + ٢٧ + ...

ج) ٢ − ٦ + ١٨ − ٥٤ + ...

د) −٥٠٠٠ + ١٠٠٠ − ٢٠٠ + ٤٠ − ...

١٠) تقدّم شركة تبرُّعًا سنويًّا لجمعية خيرية. تتزايد قيمة التبرُّع بمقدار ١٠٪ سنويًّا. فإذا كانت قيمة التبرُّع ١٠٠٠٠ ريال عُماني في سنة ٢٠١٥م: أ) أوجد قيمة التبرُّع سنة ٢٠٢١م. ب) أوجد مجموع التبرُّعات من سنة ٢٠١٥م حتى نهاية ٢٠٢١م.

١١) متتالية هندسية حدّها الثالث يساوي تسعة أمثال حدّها الأول، ومجموع أول أربعة حدود يساوي ك أمثال الحدّ الأول. أوجد قيم ك الممكنة.

ورقة الإجابات النموذجية ٢-٣

استكشف ٢: ١) أ) $ج_{١٠} = ٥ + ٥^{٢} + ... + ٥^{١٠}$ | ب) بالطرح تتوسط الحدود المتشابهة وتُحذف: $٤ج_{١٠} = ٥^{١٠} - ١$ | ج) $ج_{١٠} = \frac{٥^{١٠} - ١}{٤}$ | ٢) أ) $ج = ٣(٢^{١٢} - ١) = ١٢٢٨٥$ | ب) $ج = \frac{٨١}{٢}(١ - (\frac{١}{٣})^{١٥}) \approx ٤٠٫٥$ | ج) $ج = \frac{٨١}{٥}(١ - (\frac{٢}{٣})^{٢٠}) \approx ١٦٫٢$

١: أ) ليست هندسية (النسبة بين الحدود غير ثابتة) | ب) هندسية، ر = −٤ ، $ح_{٨} = (-٤)^{٧} = -١٦٣٨٤$ | ج) هندسية، ر = $\frac{١}{٣}$ ، $ح_{٨} = ٨١(\frac{١}{٣})^{٧} = \frac{١}{٢٧}$ | د) ليست هندسية | هـ) هندسية، ر = ٠٫٢ ، $ح_{٨} = ٢ \times ٠٫٢^{٧} = ٠٫٠٠٠٠٢٥٦$ | و) هندسية، ر = −١ ، $ح_{٨} = ٥$

٢: $ح_{٩} = أر^{٨}$ ، $ح_{٢٠} = أر^{١٩}$

٣: $ر^{٣} = \frac{-٣٢}{١٠٨} = -\frac{٨}{٢٧}$ ، ر = $-\frac{٢}{٣}$ ، أ = ١٠٨ ÷ $\frac{٤}{٩}$ = ٢٤٣

٤: $ر^{٢} = \frac{٢٧}{٧٥} = \frac{٩}{٢٥}$ ، ر = $\pm\frac{٣}{٥}$ ، $ح_{٤} = ٢٧ \times (\pm\frac{٣}{٥}) = \pm\frac{٨١}{٥} = \pm١٦٫٢$

٥: $ر^{٢} = \frac{٢٧}{١٢} = \frac{٩}{٤}$ ، $ر = \frac{٣}{٢}$ (الحدود موجبة) ، $أ = ١٢ \div \frac{٣}{٢} = ٨$

٦: المطبوع $ح_{٦} = \frac{٥}{٢}$ لا يعطي أساسًا ثابتًا مناسبًا مع $ح_{١٢} = ٣٢٠$ ؛ بافتراض المقصود $ح_{٥} = \frac{٥}{٢}$: $ر^{٧} = ١٢٨$ ، $ر = ٢$ ، $أ = \frac{٥}{٣٢}$ ، $ح_{١٠} = \frac{٥}{٣٢} \times ٢^{٩} = ٨٠$

٧: $أ(١ - ن) = ٩$ ، $أر(١ + ن) = ٣٠$ ، بالقسمة: $٣ر^{٢} + ١٣ر - ١٠ = ٠$ ، $ر = \frac{٢}{٣}$ ، $ح_{١} = ٢٧$

٨: $(س + ٦)^{٢} = س(س + ٩)$ ، $س^{٢} + ١٢س + ٣٦ = ٩س$ ، $س = -١٢$ ، المتتالية $-١٢ ، -٦ ، -٣ ، ر = (\frac{١}{٢})$

٩: أ) $ح_{٨} = ٤(٢^{٨} - ١) = ١٠٢٠$ | ب) $ح_{٨} = \frac{٢٧٩(١ - (\frac{١}{٣})^{٨})}{\frac{٢}{٣}} = \frac{٣٢٨٠}{٣}$ | ج) $ح_{٨} =$

$\frac{٢((-٣)^{٨} - ١)}{-٤} = -٣٢٨٠$ | د) $ح_{٨} = \frac{-٥٠٠٠(١ - (\frac{١}{٥})^{٨})}{\frac{٦}{٥}} = -\frac{١٢٥٠٠}{٣} \approx -٤١٦٦,٦٧$

١٠: أ) سنة ٢٠٢١ هي السنة السابعة: $ح_{٧} = ١٠٠٠٠ \times ١,١^{٦} = ١٧٧١٥,٦١$ ريالًا | ب) $ح_{٧} =$

$\frac{١٠٠٠٠(١,١^{٧} - ١)}{٠,١} = ٩٤٨٧١,٧١$ ريالًا

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

ll: $ر^{٢} = ٩$ ، $ر = \pm ٣$. عندما $ر = ٣$: $ك = \frac{١ - ٨١}{١ - ٣} = ٤٠$ ، وعندما $ر = -٣$: $ك = \frac{١ - ٨١}{١ - ٣-} =$ ٢٠-

ملاحظة: الإجابات من حسابي لأن كتاب الطالب لا يتضمن مفتاح إجابات.

٣-٣ المتسلسلات الهندسية غير المنتهية

المتتالية غير المنتهية هي متتالية تستمرّ حدودها من دون توقّف. المتسلسلة الهندسية غير المنتهية حيث $أ = ٢$ ، $ر = \frac{١}{٢}$ هي: $٢ + ١ + \frac{١}{٢} + \frac{١}{٤} + \frac{١}{٨} + ...$

وفيها $ج_{١} = ٢$ ، $ج_{٢} = ٣$ ، $ج_{٣} = ٣ \frac{١}{٢}$ ، $ج_{٤} = ٣ \frac{٣}{٤}$ ، $ج_{٥} = ٣ \frac{٧}{٨}$ ، ... وهذه المجاميع تقترب أكثر فأكثر من العدد ٤ .

في الشكل المجاور مربّع بُعداه ٢ في ٢ ، وهو تمثيل بصري لهذه المتتالية؛ إذا استُمرّ نمط أشكال المستطيلات داخل المربّع فإن مجموع مساحاتها يقترب من مساحة المربّع وهي ٤ . لذا نقول إن مجموع المتسلسلة غير المنتهية $٢ + ١ + \frac{١}{٢} + \frac{١}{٤} + ...$ هو ٤ . هذا مثال للمتسلسلات **المتقاربة** convergent ، وتكون فيها: أ) $-١ < ر < ١$ ؛ ب) المجموع إلى مالانهاية يتقارب من عدد ما.

افترض أن المتسلسلة الهندسية أ + أر + أر^{٢} + ... + أر$^{ن-١}$ يُعطى مجموعها جـ$_{ن}$ بالصيغة جـ$_{ن}$ = $\frac{أ(١ - ر^{ن})}{١ - ر}$. إذا كان −١ < ر < ١ ، فكلما زاد عدد الحدود ن فإنّ ر^{ن} تقترب أكثر فأكثر من الصفر (نقول عندما تقترب ن من مالانهاية فإنّ ر^{ن} ← ٠).

وعليه: $\frac{أ(١ - ر^{ن})}{١ - ر}$ ← $\frac{أ(١ - ٠)}{١ - ر}$ = $\frac{أ}{١ - ر}$ عندما ن ← ∞ .

نتيجة ٥: مجموع حدود متسلسلة هندسية غير منتهية (متقاربة) جـ$_{∞}$ يعطى بالصيغة: جـ$_{∞}$ = $\frac{أ}{١ - ر}$ ، حيث −١ < ر < ١ . (يُستخدم الرمز جـ$_{∞}$ لتمثيل مجموع حدود متسلسلة غير منتهية.)

٣-٣ أمثلة ١٤ و ١٥

مثال ١٤

أول ثلاثة حدود من متتالية هندسية غير منتهية هي ٢٥ ، ١٥ ، ٩ ، ... أ) اكتب أساس المتتالية. ب) أوجد مجموع المتسلسلة الهندسية المتقاربة.

الحلّ

أ) الأساس = $\frac{\text{الحدّ الثاني}}{\text{الحدّ الأول}}$ = $\frac{١٥}{٢٥}$ = $\frac{٣}{٥}$

الحلّ (تابع)

ب) $ج_{\infty} = \frac{أ}{١ - ر} = \frac{٢٥}{١ - \frac{٣}{٥}} = ٦٢,٥$

مثال ١٥

متتالية هندسية أساسها $-\frac{٤}{٥}$ ومجموع أول أربعة حدود فيها ١٦٤ ، أوجد كلًّا مما يأتي: أ) الحدّ الأول في المتتالية. ب) المجموع إلى مالانهاية.

الحلّ

أ) $ج_{٤} = \frac{أ(١ - ر^{٤})}{١ - ر} : ١٦٤ = \frac{أ(١ - (-\frac{٤}{٥})^{٤})}{١ - (-\frac{٤}{٥})} = أ \times \frac{٤١}{١٢٥}$ ، $أ = ٥٠٠$

ب) $ج_{\infty} = \frac{أ}{١ - ر} = \frac{٥٠٠}{١ - (-\frac{٤}{٥})} = ٢٧٧\frac{٧}{٩}$

٣-٣ أمثلة ١٦ و ١٧

مثال ١٦

سقطت كرة من ارتفاع ١٥ م. بعد كل ارتطام ترتفع الكرة ٨٠٪ من الارتفاع السابق. أوجد طول مسار الكرة الكلي.

الحلّ

بعد الارتطام الأول ستكون الارتفاعات متتالية هندسية: ١٥ × ٠٫٨ ، ١٥ × ٠٫٨٢ ، ١٥ × ٠٫٨٣ ، …

سقطت الكرة مسافة ١٥ م في البداية، ثم ستقطع ضعف المسافة صعودًا وهبوطًا: ١٥ + ٢(١٥ × ٠٫٨ + ١٥ × ٠٫٨٢ + ١٥ × ٠٫٨٣ + …)

مجموع المسافات الرأسية إلى مالانهاية التي تقطعها الكرة بعد الارتطام الأول (أ = ١٥ × ٠٫٨ ، ر = ٠٫٨): $ج_{\infty} = \frac{أ}{١ - ر} = \frac{١٥ \times ٠٫٨}{١ - ٠٫٨} = ٦٠$

الكرة تصعد وتهبط بعد كل ارتطام، أي قطعت ضعف المجموع إلى مالانهاية: ٢ × ٦٠ = ١٢٠

يُضاف الارتفاع الذي سقطت منه الكرة إلى مجموع المسافات الرأسية: ١٢٠ + ١٥ = ١٣٥ م

مثال ١٧

حوّل الكسر العشري الدوري ٠,٣٤٥٣٤٥٣٤٥... إلى كسر عادي في صورة متتالية هندسية.

الحلّ

الكسر الدوري يُكتب في صورة مجموع كسور عادية لها البسط نفسه:

$$٠,٣٤٥٣٤٥٣٤٥... = \frac{٣٤٥}{١٠٠٠} + \frac{٣٤٥}{١٠٠٠٠٠} + \frac{٣٤٥}{١٠٠٠٠٠٠٠٠٠} + ...$$

$$أ = \frac{٣٤٥}{١٠٠٠} \text{ ، } ر = \frac{١}{١٠٠٠}$$

$$ج_{\infty} = \frac{أ}{١ - ر} = \frac{\frac{٣٤٥}{١٠٠٠}}{١ - \frac{١}{١٠٠٠}} = \frac{٣٤٥}{٩٩٩}$$

الناتج بعد التبسيط: $ج_{\infty} = \frac{١١٥}{٣٣٣}$

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

٣-٣ استكشف ٣ وتمارين ٣-٣

استكشف ٣

ا) استقصِ ما إذا كانت كل متسلسلة من المتسلسلات الهندسية غير المنتهية متقاربة أم لا (يمكنك أن تستخدم جدول بيانات لتساعدك على إجراء الحسابات). إذا كانت المتسلسلة متقاربة، فأوجد مجموعها إلى مالانهاية: أ) $أ = \frac{٣}{٥}$ ، $ر = ٢$ ب) $أ = -٣$ ، $ر = \frac{١}{٢}$ ج) $أ = ٠,٥$ ، $ر = \frac{٢}{٣}$ د) $أ = \frac{١}{٢}$ ، $ر = -٥$

٢) اكتب متسلسلات هندسية متقاربة أخرى، وأوجد مجموعها في كل حالة إلى مالانهاية.

٣) هل يمكنك أن توجد شرطًا على ر لتكون المتسلسلة الهندسية متقاربة؟

ا) حوّل الكسر العشري الدوري ٠,٣٧٣٧٣٧... إلى كسر عادي في صورة متتالية هندسية.

٢) أوجد مجموع كلّ متسلسلة من المتسلسلات الهندسية الآتية إلى مالانهاية:

أ) $٣ + ١ + \frac{١}{٣} + \frac{١}{٩} + \dots$

ب) $١ - \frac{١}{٢} + \frac{١}{٤} - \frac{١}{٨} + \frac{١}{١٦} - \dots$

ج) $٨ + \frac{٨}{٥} + \frac{٨}{٢٥} + \frac{٨}{١٢٥} + \dots$

د) −١٦٢ + ١٠٨ − ٧٢ + ٤٨ − ...

٣) متتالية هندسية حدّها الأول ١٠ وحدّها الثاني ٨ : أوجد $ج_{\infty}$ مجموع المتتالية إلى مالانهاية.

٤) متتالية هندسية حدّها الأول ٣٠٠ وحدّها الرابع $-\frac{٢}{٥}$ ٢ ، أوجد أساس المتتالية ومجموعها إلى مالانهاية ($ج_{\infty}$).

٥) متتالية هندسية حدودها الأربع الأولى هي ١ ، $(٠,٨)^{٢}$ ، $(٠,٨)^{٤}$ ، $(٠,٨)^{٦}$ على الترتيب. أوجد مجموع المتتالية إلى مالانهاية.

٦) أ) اكتب الكسر العشري الدوري ٠,٤٢ في صورة مجموع متتالية هندسية. ب) استخدم إجابتك في الجزئية (أ) لتبيّن أنه يمكن كتابة ٠,٤٢ في صورة $\frac{١٤}{٣٣}$.

٧) متتالية هندسية حدّها الأول −١٢٠ مجموعها إلى مالانهاية −٧٢ : أوجد أساس المتتالية ومجموع أول ثلاثة حدود فيها.

٨) متتالية هندسية حدّها الثاني −٩٦ وحدّها الخامس هو ٤٠ $\frac{١}{٢}$. أوجد كلًّا مما يلي:
أ) أساس المتتالية وحدّها الأول. ب) مجموع حدود المتتالية إلى مالانهاية.

٩) متتالية هندسية حدّها الثاني ١٨ وحدها الرابع ١,٦٢ ، إذا علمت أن أساس المتتالية موجب، فأوجد: أ) الأساس والحدّ الأول. ب) مجموع الحدود إلى مالانهاية.

تمارين ٣-٣ (تابع)

١٠) متتالية هندسية حدها الأول (ك + ١٥)، الحد الثاني ك والحد الثالث (ك − ١٢). أوجد: أ) قيمة ك. ب) مجموع الحدود إلى مالانهاية.

١١) متتالية هندسية حدها الرابع ٨٤ ومجموع حدودها إلى مالانهاية يساوي ثلاثة أمثال الحدّ الأول. أوجد الحدّ الأول.

١٢) متتالية هندسية حدّها الأول (أ) وأساسها (ر) ومجموع أول ثلاثة حدود فيها ٦٢ ومجموع الحدود إلى مالانهاية يساوي ٦٢٫٥ . أوجد قيمة (أ) وقيمة (ر).

١٣) سقطت كرة من ارتفاع ١٢ م، ثم ارتطمت بالأرض وارتدّت. بعد كلّ ارتطام تعود وترتفع $\frac{٣}{٤}$ الارتفاع السابق لهذا الارتداد. أوجد مجموع المسافة الرأسية التي تخطّتها الكرة.

١٤) سقطت كرة من ارتفاع ٥ م. مجموع المسافة الرأسية التي قطعتها الكرة ٣٠ مترًا بعد أن توقفت عن الارتطام. ما الارتفاع الذي تصل إليه الكرة بعد الارتداد الأول؟

١٥) سقطت كرة من ارتفاع س متر. مجموع المسافة الرأسية التي قطعتها الكرة ٢٠ مترًا. بعد كل ارتطام ينقص الارتفاع الذي ترتد إليه الكرة $\frac{١}{٥}$ الارتفاع السابق. أوجد الارتفاع الذي سقطت منه الكرة.

ورقة الإجابات النموذجية ٣-٣

استكشف ٣: ١) أ) متباعدة (ر = ٢ > ١) | ب) متقاربة، ∞ج = −٣ ÷ $\frac{١}{٢}$ = −٦ | ج) متقاربة، ∞ج = ٠,٥ ÷ $\frac{١}{٣}$ = ١,٥ | د) متباعدة (ر = −٥ < −١) | ٣) الشرط: −١ < ر < ١

١: ٠,٣٧٣٧٣٧... = $\frac{٣٧}{١٠٠}$ + $\frac{٣٧}{١٠٠٠٠}$ + ... = $\frac{٣٧}{٩٩}$

٢: أ) ر = $\frac{١}{٣}$ ، ∞ج = $\frac{٩}{٢}$ | ب) ر = −$\frac{١}{٢}$ ، ∞ج = $\frac{٢}{٣}$ | ج) ر = $\frac{١}{٥}$ ، ∞ج = ١٠ | د) ر = −$\frac{٢}{٣}$ ، ∞ج = −$\frac{٤٨٦}{٥}$

٣: ر = $\frac{٤}{٥}$ ، ∞ج = ١٠ ÷ $\frac{١}{٥}$ = ٥٠

٤: ر^{٣} = $\frac{-١٢}{٥}$ ÷ ٣٠٠ = −$\frac{١}{١٢٥}$ ، ر = −$\frac{١}{٥}$ ، ∞ج = ٣٠٠ ÷ $\frac{٦}{٥}$ = ٢٥٠

٥: ر = (٠,٨)^{٢} = ٠,٦٤ ، ∞ج = ١ ÷ ٠,٣٦ = $\frac{٢٥}{٩}$

٦: أ) ٠,٤٢ = $\frac{٤٢}{١٠٠}$ + $\frac{٤٢}{١٠٠٠٠}$ + ... | ب) ∞ج = $\frac{٤٢}{٩٩}$ = $\frac{١٤}{٣٣}$

٧: −٧٢ = −١٢٠ ÷ (ا − ل) ، ا − ر = $\frac{٥}{٣}$ ، ر = −$\frac{٢}{٣}$ ، ٣ج = −١٢٠ × $\frac{٣٥}{٢٧}$ × $\frac{٣}{٥}$ = −$\frac{٢٨٠}{٣}$

٨: أ) ر^{٣} = ٤٠,٥ ÷ (−٩٦) = −$\frac{٢٧}{٦٤}$ ، ر = −$\frac{٣}{٤}$ ، أ = ١٢٨ | ب) ∞ج = ١٢٨ ÷ $\frac{٧}{٤}$ = $\frac{٥١٢}{٧}$

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

٩: أ) $ر^{٢} = ٠,٠٩$ ، $ر = ٠,٣$ ، $أ = ٦٠$ | ب) $ج_{\infty} = ٦٠ \div ٠,٧ = \frac{٦٠٠}{٧}$

١٠: أ) $ك^{٢} = (ك + ١٥)(ك - ١٢)$ ، $٣ك = ١٨٠$ ، $ك = ٦٠$ | ب) الحدود ٧٥ ، ٦٠ ، ٤٨ ، $ر = \frac{٤}{٥}$ ، $ج_{\infty} = ٣٧٥$

١١: $\frac{أ}{١ - ر} = ٣أ$ ، $ر = \frac{٢}{٣}$ ، $أ(\frac{٢}{٣})^{٣} = ٨٤$ ، $أ = ٢٨٣,٥$

١٢: $\frac{أ}{١ - ر} = ٦٢,٥$ ، $٦٢ = أ(١ + ر + ر^{٢})$ ، بالقسمة: $١ - ر^{٣} = ٠,٩٩٢$ ، $ر = ٠,٢$ ، $أ = ٥٠$

١٣: $أ = ١٢ \times \frac{٣}{٤} = ٩$ ، $ج_{\infty} = ٩ \div \frac{١}{٤} = ٣٦$ ، المسار $= ١٢ + ٢ \times ٣٦ = ٨٤$ م

١٤: $٥ + ٢ \times \frac{٥ر}{١ - ر} = ٣٠$ ، $\frac{٥ر}{١ - ر} = ١٢,٥$ ، $ر = \frac{٥}{٧}$ ، الارتفاع بعد الارتداد الأول $= ٥ \times \frac{٥}{٧} = \frac{٢٥}{٧}$ م

١٥: $ر = ١ - \frac{١}{٥} = \frac{٤}{٥}$ ، $س + ٢ \times \frac{س \times \frac{٤}{٥}}{\frac{١}{٥}} = ٢٠$ ، $س + ٨س = ٢٠$ ، $س = \frac{٢٠}{٩}$ م

ملاحظة: الإجابات من حسابي لأن كتاب الطالب لا يتضمن مفتاح إجابات.

خالد كمال
khaledmath.surge.sh

تمارين مراجعة نهاية الوحدة الثالثة

١) إذا كان الحدّ الأول في متتالية هندسية ٣٥ والحدّ الثاني −١٤ : فأوجد: أ) الحدّ الرابع في المتتالية. ب) مجموع الحدود إلى مالانهاية.

٢) متتالية هندسية أول ثلاثة حدود فيها هي (٢ك + ٦) ، (ك + ١٢) ، (ك) على الترتيب. جميع حدود المتتالية موجبة. أوجد: أ) قيمة ك. ب) مجموع الحدود إلى مالانهاية.

٣) متتالية هندسية الحدّ الأول فيها (أ) والأساس (د). إذا علمت أن مجموع أول ١٠٠ حدّ يساوي ٢٥ مرة مجموع أول ٢٠ حدًّا: أ) أوجد (د) بدلالة (أ). ب) اكتب عبارة بدلالة (أ) للحدّ الخمسين.

٤) إذا كان الحدّ الخامس عشر في متتالية حسابية ٣ ومجموع أول ثمانية حدود ١٩٤ : أ) أوجد الحدّ الأول في المتتالية وأساسها. ب) إذا علمت أن الحدّ النوني −٢٢ ، فأوجد قيمة ن.

٥) إذا كان الحدّ الثاني في متتالية هندسية −٥٧٦ والحدّ الخامس ٢٤٣ : فأوجد: أ) أساس المتتالية. ب) الحدّ الأول في المتتالية. ج) مجموع حدود المتتالية إلى مالانهاية.

٦) أ) إذا كان الحدّ السادس في متتالية حسابية ٣٥ ومجموع أول عشرة حدود ٢٣٥ : فأوجد الحدّ الثامن. ب) الحدّ الأول في متتالية هندسية ٨ وأساسها (ر)، والحدّ الأول في متتالية هندسية أخرى ١٠ وأساسها $\frac{١}{٤}$ ر. مجموع المتتاليتَين إلى مالانهاية متساويان ويساوي كل منهما (ج): أوجد قيمة ر وقيمة ج.

خالد كمال
khaled-math.store

٧) أ) إذا كان الحدّ العاشر في متتالية حسابية ٤ ومجموع أول سبعة حدود −٢٨ : فأوجد الحدّ الأول وأساس المتتالية. ب) إذا كان الحدّ الأول في متتالية هندسية ٤٠ والحدّ الرابع ٥ : فأوجد مجموع حدود المتتالية إلى مالانهاية.

ورقة الإجابات النموذجية للمراجعة

١: ر = $-\frac{١٤}{٣٥} = -\frac{٢}{٥}$ | أ) $ح_{٤} = ٣٥ + (-\frac{٢}{٥})^{٣} = -\frac{٥٦}{٢٥}$ | ب) $ج_{\infty} = \frac{٣٥}{\frac{٧}{٥}} = ٢٥$

٢: أ) $(ك + ١٢)^{٢} = ك(٢ك + ٦) ، ك^{٢} - ١٨ك - ١٤٤ = ٠ ، ك = ٢٤$ أو ك = −٦ (مرفوضة لأن الحدود موجبة) | ب) الحدود ٥٤ ، ٣٦ ، ٢٤ ، ر = $\frac{٢}{٣}$ ، $ج_{\infty} = \frac{٥٤}{\frac{١}{٣}} = ١٦٢$

٣: (تنبيه: المطبوع «متتالية هندسية ... والأساس (د)»، والمعطيات لا تتسق إلا باعتبارها متتالية حسابية أساسها د) أ) ٥٠(٢أ + ٩٩د) = ٢٥ × ١٠(٢أ + ١٩د) ، ٢٠٠د = ٤٠٠أ ، د = ٢أ | ب) $ح_{٥٠} = أ + ٤٩د = ٩٩أ$

٤: (تنبيه: المطبوع $ج_{٨} = ١٩٤$ لا يتسق مع باقي المعطيات ويعطي ن غير صحيحة؛ بافتراض المقصود ٢٣٤) أ) أ + ١٤د = ٣ ، ٢أ + ٧د = ٥٨,٥ ، د = −٢,٥ ، أ = ٣٨ | ب) ٣٨ − ٢,٥(ن − ١) = −٢٢ ، ن = ٢٥

٥: أ) $ر^{٣} = ٢٤٣ \div (-٥٧٦) = -\frac{٢٧}{٦٤}$ ، $ر = -\frac{٣}{٤}$ | ب) $أ = -٥٧٦ \div (-\frac{٣}{٤}) = ٧٦٨$ | ج) $ج_{\infty} = ٧٦٨ \div \frac{٧}{٤} = \frac{٣٠٧٢}{٧}$

٦: أ) ٢أ + ٩د = ٤٧ ، أ + ٥د = ٣٥ ، د = ٢٣ ، أ = −٨٠ ، ح٨ = ٨١ | ب) $\frac{٨}{١ - ر} = \frac{١٠}{١ - \frac{ل}{٤}}$ ،

٨ − ٢ر = ١٠ − ١٠ر ، ر = $\frac{١}{٤}$ ، ج = ٨ ÷ $\frac{٣}{٤}$ = $\frac{٣٢}{٣}$

٧: أ) أ + ٩د = ٤ ، أ + ٣د = −٤ ، د = $\frac{٤}{٣}$ ، أ = −٨ | ب) ر^{٣} = $\frac{٥}{٤٠}$ = $\frac{١}{٨}$ ، ر = $\frac{١}{٢}$ ، ∞ج

= ٤٠ ÷ $\frac{١}{٢}$ = ٨٠

ملاحظة: الإجابات من حسابي لأن كتاب الطالب لا يتضمن مفتاح إجابات.

ملخص الوحدة الثالثة — المتتاليات والمتسلسلات

ملخص قوي شامل وقصير: القوانين والقواعد وخطوات الحل، من ملخص الكتاب (قائمة التحقّق من التعلّم والفهم) بنصّه.

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

أولًا: القوانين والقواعد (من قائمة التحقّق في الكتاب بنصّها)

المتتاليات الحسابية — في المتتالية الحسابية التي حدّها الأول (أ) وأساسها (د) وعدد حدودها (ن):

• الحدّ رقم ك هو حك = أ + (ك − ١)د

• الحدّ الأخير (الحدّ النوني) = ل = أ + (ن − ١)د

• مجموع الحدود = جن = $\frac{ن}{٢}$ (أ + ل) = $\frac{ن}{٢}$ [٢أ + (ن − ١)د]

المتتاليات والمتسلسلات الهندسية — في المتتالية الهندسية التي حدّها الأول أ وأساسها ر وعدد حدودها ن:

• الحدّ رقم ك هو حك = أ $ر^{ك - ١}$

• الحدّ الأخير (الحدّ النوني) = أ $ر^{ن - ١}$

• مجموع الحدود = جن = $\frac{أ(١ - ر^{ن})}{١ - ر}$ = $\frac{أ(ر^{ن} - ١)}{ر - ١}$

• تكون المتتالية الهندسية متقاربة عندما −١ < ر < ١ ؛ عندما تكون المتتالية الهندسية متقاربة، فإن ج∞ = $\frac{أ}{١ - ر}$

ثانيًا: أهم الدروس

• ٣-١ المتتاليات الحسابية: الحدّ النوني، إيجاد أ و د من معلومتين، عدد الحدود، مجموع الحدود بصيغتيه.

• ٣-٢ المتتاليات الهندسية: الحدّ النوني أ $ر^{ن - ١}$ ، إيجاد أ و ر من حدّين (قسمة الحدود)، مجموع ن حدًّا.

• ٣-٣ المتسلسلات الهندسية غير المنتهية: شرط التقارب −١ < ر < ١ والمجموع إلى مالانهاية ج∞ = $\frac{أ}{١ - ر}$ ، وتطبيقاته.

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

ملخص الوحدة الثالثة (تابع)

ثالثًا: أهم المسائل في المذكرة

• أمثلة ١-٧ وتمارين ٣-١: الحدّ النوني والمجموع في الحسابية، وإيجاد عدد الحدود.

• أمثلة ٨-١٣ وتمارين ٣-٢: إيجاد أ و ر من حدّين، والمجموع جن في الهندسية.

• أمثلة ١٤-١٧ وتمارين ٣-٣: ج∞ بشرط التقارب — منها س٩ (ح٢ = ١٨ ، ح٤ = ١,٦٢) وس١٠ (إيجاد ك من ثلاثة حدود).

أهم المسائل — مراجعة نهاية الوحدة:

• مراجعة نهاية الوحدة: الجمع بين الحدّ النوني والمجموع في مسألة واحدة، ومسائل إيجاد الثوابت.

رابعًا: مسائل متوقَّعة في الاختبار — توقّع استرشادي من الكتاب والمنهج فقط، وليست معلومة مؤكدة عن الامتحان:

• إيجاد الحدّ الأول والأساس من حدّين معلومين (حسابية أو هندسية) ثم إيجاد حدّ نوني أو مجموع.

• مجموع متسلسلة هندسية غير منتهية بعد التحقق من شرط التقارب.

• إيجاد قيمة مجهول (ك) من حدود متتالية هندسية باستخدام (الحدّ الأوسط)^{٢} = الأول × الثالث.

• مسألة كلامية على متتالية هندسية (نموّ أو تناقص) ومجموعها إلى مالانهاية.

• حساب عدد حدود متتالية حسابية من حدّها الأول وحدّها الأخير باستخدام ن = $\frac{\text{ل} - \text{أ}}{\text{د}}$ + ١.