١-٢ تعريف الدوال ومجالها ومداها

الدالة علاقة بين مجموعتين يرتبط فيها كل عنصر من المجموعة الأولى بعنصر واحد فقط من عناصر المجموعة الثانية. قد تكون الدالة **واحد إلى واحد** أو **متعدّد إلى واحد**. أمّا العلاقة **واحد إلى متعدّد** أو **متعدّد إلى متعدّد** فليست دالة.

تُسمّى مجموعة المدخلات **مجال** الدالة، وتُسمّى مجموعة المخرجات **مدى** الدالة.

اختبار الخط الرأسي: إذا قطع أيّ خط رأسي المنحنى في نقطة واحدة على الأكثر فالمنحنى يمثّل دالة. **اختبار الخط الأفقي:** إذا قطع أيّ خط أفقي المنحنى في نقطة واحدة على الأكثر فالدالة واحد إلى واحد، وإذا قطعه في أكثر من نقطة فهي متعدّد إلى واحد.

مثال ١

حدّد أيّ المعادلات الآتية تمثّل دالة، وإن كانت دالة فهل هي واحد إلى واحد أم متعدّد إلى واحد: ب) $ص = س^{٢} - ٤$ ج) $س + ص = ٣$ د) $س^{٢} - ص^{٢} = ٤$

الحلّ

ب) $ص = س^{٢} - ٤$: دالة، متعدّد إلى واحد (كل من س و −س يعطي القيمة نفسها).

ج) $س + ص = ٣$: دالة، واحد إلى واحد.

الحلّ (تابع)

د) $س^{٢} - ص^{٢} = ٤$: ليست دالة (للقيمة الواحدة من س قيمتان لـ ص).

١-٢ أمثلة ٢ و ٣

مثال ٢

علاقة تربط كل طالب باليوم الذي يوافق عيد ميلاده من أيام الأسبوع. هذه العلاقة دالة متعدّد إلى واحد (قد يشترك طالبان في اليوم نفسه). المجال: أسماء الطلاب، والمدى: أيام الأسبوع المرتبطة بهم.

مثال ٣

أوجد مدى الدالة د(س) = ٥ − ٢س ، حيث −٤ ≤ س ≤ ٥ .

الحلّ

د(−٤) = ٥ + ٨ = ١٣ ، د(٥) = ٥ − ١٠ = −٥ . الدالة خطية متناقصة، فالمدى: −٥ ≤ د(س) ≤ ١٣ .

مثال ٤

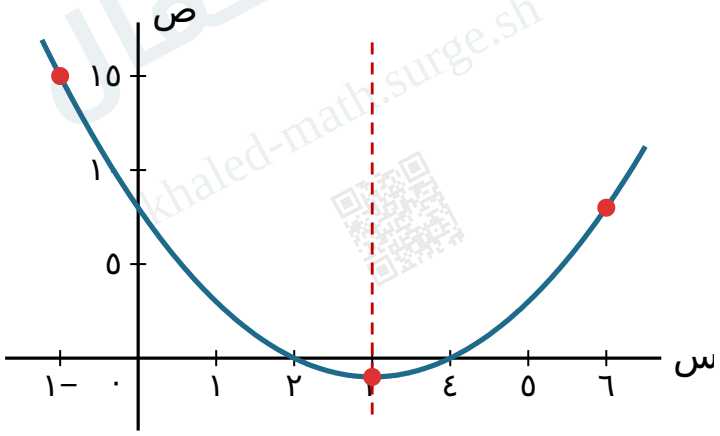
أوجد مدى الدالة د(س) = س^{٢} − ٦س + ٨ ، حيث −١ ≤ س ≤ ٦ .

الحلّ

د(س) = (س − ٣)^{٢} − ١ ، النقطة الصغرى (٣ ، −١) . د(−١) = ١٥ ، د(٦) = ٨ . أكبر قيمة ١٥ وأصغر قيمة −١ .

المدى: −١ ≤ د(س) ≤ ١٥

خالد كمال
khaled-math.surge.sh



١-٢ مثال ٥

مثال ٥

تُحسب فاتورة الكهرباء ك (بالريالات) لمنزل بالدالة ك(م) = ٢٥٠٠ + ٥٠٠م ، حيث م عدد الأشهر ، ٢ ≤ م ≤ ٨ . أوجد مدى الدالة وفسّره.

الحلّ

ك(٢) = ٢٥٠٠ + ١٠٠٠ = ٣٥٠٠ ، ك(٨) = ٢٥٠٠ + ٤٠٠٠ = ٦٥٠٠ .

المدى: ٣٥٠٠ ≤ ك ≤ ٦٥٠٠ ، أي أن الفاتورة تتراوح بين ٣٥٠٠ و ٦٥٠٠ ريال.

تمارين ٢-١

١) أيّة معادلة من المعادلات الآتية تمثّل دالة؟ حدّد ما إذا كانت واحد إلى واحد أو متعدّد إلى واحد:

أ) ص = ٢س − ٣ ، س ∈ ح

ب) ص = س^{٢} − ٣ ، س ∈ ح

ج) ص = ٣س^{٢} + ٤ ، س ∈ ح ، س ≤ ٠

٢) استخدم برمجيات الرسم لتحدّد أيّة معادلة من المعادلات الآتية تمثل دالة. اذكر ما إذا كانت الدالة واحد إلى واحد أو متعدّد إلى واحد:

أ) ص = ٢س^{٣} − ١ ، س ∈ ح

ب) ص = ٢$^{-س}$ ، س ∈ ح

ج) ص = $\frac{١٠}{س}$ ، س ∈ ح ، س > ٠

د) ص = $\sqrt{س}$ ، س ∈ ح ، س ≤ ٠

هـ) ص^{٢} = ٤س ، س ∈ ح

٣) في كل موقف من المواقف الآتية، صف نوع الدالة التي تربط المجال بالمدى:

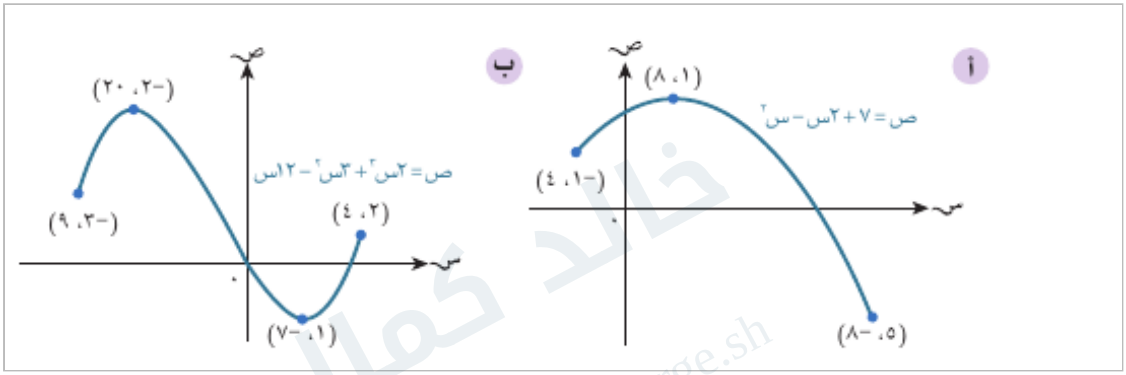
أ) المجال: المسافرون في المطار — المدى: وجهة السفر.

ب) المجال: المرضى في عيادة الطبيب — المدى: المواعيد لدى الطبيب.

ج) المجال: المسافرون في الطائرة — المدى: المقاعد داخل الطائرة.

تمارين ٢-١ (تابع ١)

٤) حدّد المجال والمدى لكل دالة من الدالتين الممثّلتين بالمنحنيين الآتيين:



٥) حدّد مدى كل دالة من الدوال الآتية:

أ) د(س) = س + ٤ حيث س < ٨

ب) د(س) = ٢س − ٧ حيث −٣ ≤ س ≤ ٢

ج) د(س) = ٢س − ٧ حيث −١ ≤ س ≤ ٤

د) د : س ← ٢س٢ حيث ١ ≤ س ≤ ٤

هـ) د(س) = س٢ − ٢ حيث س ∈ ح

تمارين ٢-١ (تابع ٢)

٦) ارسم منحنى كل دالة تربيعية من الدوال الآتية، ثم حدّد مدى كل منها (مساعدة: لتحديد مدى هذه الدوال ارسمها في مجالها المحدد):

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

أ) ص = س^{٢} + ٤س − ١٢ ، حيث س ∈ ح

ب) ص = ١٦ − س^{٢} ، حيث س ∈ ح ، س ≥ −١

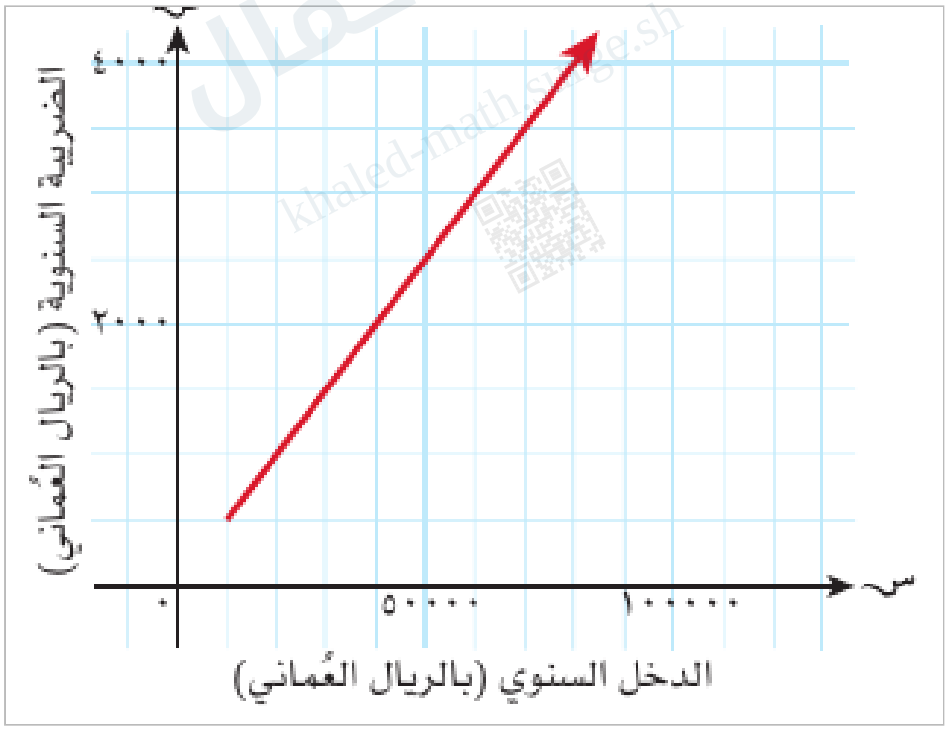
ج) ص = ٢س^{٢} + ٩س + ٧ ، حيث −٤ ≤ س < ٠

د) ص = ١٠ − ٣س − س^{٢} ، حيث س ≤ ٠

٧) د(س) = س^{٢} − ٢س − ٣ حيث س ∈ ح ، أ ≥ س ≥ ب . أوجد قيمة كل من أ ، ب إذا كان مدى الدالة هو −٤ ≤ د(س) ≤ ٥ .

تمارين ٢-١ (تابع ٣)

٨) يمثّل التمثيل البياني أدناه ما يدفعه أحمد كضريبة جديدة على الدخل.



أ) ما مجال الدالة ومداها؟ ب) فسّر المجال ضمن سياق المسألة.

٩) يعتمد إيجار سيارة الأجرة (ك) على رسم ثابت قيمته ٢ ريال عُماني إضافة إلى ٠٫٢٨ ريال عُماني لكل كيلومتر تجتازه السيارة.

أ) اكتب دالة الكلفة ك لإيجار السيارة عندما تجتاز السيارة س كيلومترات. ب) أوجد مجال الدالة ك ومداها.

ورقة الإجابات النموذجية ٢-١

تمرين ١: أ) دالة، واحد إلى واحد | ب) دالة، متعدّد إلى واحد | ج) دالة، واحد إلى واحد (س ≤ ٠)

تمرين ٢: أ) دالة، واحد إلى واحد | ب) دالة، واحد إلى واحد | ج) دالة، واحد إلى واحد | د) دالة، واحد إلى واحد | هـ) ليست دالة (واحد إلى متعدّد)

تمرين ٣: أ) متعدّد إلى واحد | ب) واحد إلى واحد (لكل مريض موعد واحد مختلف) | ج) واحد إلى واحد (لكل مسافر مقعد واحد)

تمرين ٤: أ) المجال −١ ≤ س ≤ ٥ ، المدى −٨ ≤ ص ≤ ٨ | ب) المجال −٣ ≤ س ≤ ٢ ، المدى −٧ ≤ ص ≤ ٢٠

تمرين ٥: أ) د(س) < ١٢ | ب) −١٣ ≤ د(س) ≤ −٣ | ج) −١ ≤ د(س) ≤ ٩ | د) ٢ ≤ د(س) ≤ ٣٢ | هـ) د(س) ≤ −٢

تمرين ٦: أ) ص ≤ −١٦ (النقطة الصغرى (−٢ ، −١٦)) | ب) ص ≥ ١٥ | ج) −٣٫١٢٥ ≤ ص < ٧ | د) ص ≥ ١٠

تمرين ٧: النقطة الصغرى (١ ، −٤) ، و د(س) = ٥ عندما س = −٢ أو س = ٤ . إذن (أ = −٢ و ١ ≥ ب ≥ ٤) أو (ب = ٤ و −٢ ≤ أ ≤ ١) ، وأبسط حالة: أ = −٢ ، ب = ٤ .

تمرين ٨: قراءة تقريبية من الرسم: المجال س ≤ نحو ١٠٠٠٠ ريال (بلا حدّ أعلى، يدلّ السهم)، والمدى ص ≤ نحو ٤٠٠ ريال. التفسير: الضريبة الجديدة تُطبّق على من دخله السنوي لا يقل عن نحو ١٠٠٠٠ ريال.

تمرين ٩: أ) ك(س) = ٠٫٢٨س + ٢ | ب) المجال س ≥ ٠ ، المدى ك ≤ ٢

ملاحظة: الإجابات من حسابي لأن كتاب الطالب لا يتضمن مفتاح إجابات.

٢-٢ الدوال المركبة

(د ∘ هـ)(س) تعني إجراء الدالة هـ بدل س في د، أي د(هـ(س)). تكون (د ∘ هـ)(س) موجودة فقط عندما يكون مدى هـ متضمَّنًا في مجال د. وبصورة عامة (د ∘ هـ)(س) ≠ (هـ ∘ د)(س).

مثال ٦

د(س) = ٢س + ٣ ، هـ(س) = س^{٢} − ١ . أوجد: (د ∘ هـ)(س) و (هـ ∘ د)(س) و (د ∘ د)(س).

الحلّ

(د ∘ هـ)(س) = ٢(س^{٢} − ١) + ٣ = ٢س^{٢} + ١

(هـ ∘ د)(س) = (٢س + ٣)^{٢} − ١ = ٤س^{٢} + ١٢س + ٨

الحلّ (تابع)

(د ∘ د)(س) = ٢(٢س + ٣) + ٣ = ٤س + ٩

٢-٢ أمثلة ٧ و ٨ و ٩

مثال ٧

د(س) = (س − ٤)^{٢} − ١ ، هـ(س) = $\frac{٢س + ٣}{س - ٢}$. أوجد (د ∘ هـ)(٤) .

الحلّ

هـ(٤) = $\frac{١١}{٢}$ = ٥,٥ ، د(٥,٥) = (١,٥)^{٢} − ١ = ١,٢٥ = $\frac{١}{٤}$ ١

مثال ٨

د(س) = $\frac{٥}{س - ٤}$ ، هـ(س) = ٣ − س^{٢} . أوجد (د ∘ هـ)(س) و (د ∘ د)(س).

الحلّ

$$(د \circ هـ)(س) = \frac{٥}{٤ - (٣ - س^{٢})} = \frac{-٥}{١ + س^{٢}}$$

$$(د \circ د)(س) = \frac{٥}{٤ - \frac{٥}{٤ - س}} = \frac{٢٠ - ٥س}{٢١ - ٤س}$$

مثال ٩

ك(ن) = ٢ + ٨,١ان ، ع(ل) = ٠,٤ل . أوجد (ع ∘ ك)(ن) .

الحلّ

(ع ∘ ك)(ن) = ٠,٤(٢ + ٨,١ان) = ٠,٨ + ٠,٧٢ن

تمارين ٢-٢

١) إذا علمت أن د : س ← ٢س + ٣ ، حيث س ∈ ح ، هـ : س ← س^{٢} − ١ ، حيث س ∈ ح ، فأوجد: أ) (د ∘ هـ)(٢) ب) (هـ ∘ د)(٥) .

٢) إذا كانت د(س) = (س + ٢)^{٢} − ١ ، حيث س ∈ ح ، فأوجد (د ∘ د)(٣) .

٣) إذا كانت د(س) = س^{٢} + ٦ ، حيث س ∈ ح ، هـ(س) = $\sqrt{\text{س} + ٣}$ − ٢ ، حيث س ∈ ح ، س ≤ −٣ ، فأوجد: أ) (د ∘ هـ)(٦) ب) (هـ ∘ د)(٤) ج) (د ∘ د)(−٣) .

٤) إذا كانت ع : س ← س + ٥ حيث س ∈ ح ، س > ٠ ، ل : س ← $\sqrt{\text{س}}$ حيث س ∈ ح ، س > ٠ ، فاكتب كل دالة من الدوال الآتية في صورة دالة مركبة، مستخدمًا الدالة ع أو الدالة ل أو كلتيهما: أ) س ← $\sqrt{\text{س}}$ + ٥ ب) س ← $\sqrt{\text{س} + ٥}$ ج) س ← س + ١٠

٥) إذا علمت أن د : س ← ٢س + ٣ ، حيث س ∈ ح ، س ≠ −١ ، هـ : س ← $\frac{١٢}{\text{س} - ١}$ ، حيث س ∈ ح ، س ≠ ١ ، فأ) أوجد (هـ ∘ د)(س) إن أمكن ذلك. ب) حلّ المعادلة (هـ ∘ د)(س) = ٢ .

تمارين ٢-٢ (تابع)

٦) إذا علمت أن هـ(س) = س^{٢} − ٢ ، حيث س ∈ ح ، ل(س) = ٢س + ٥ ، حيث س ∈ ح ، فأ) أوجد (هـ ∘ ل)(س) إن أمكن ذلك. ب) حلّ المعادلة (هـ ∘ ل)(س) = ١٤ .

٧) إذا كانت د : س ← س^{٢} حيث س ∈ ح ، هـ : س ← س + ١ حيث س ∈ ح ، فاكتب كلّ دالة من الدوال الآتية في صورة دالة مركبة، مستخدمًا الدالة د أو الدالة هـ أو كليهما: أ) س ← (س + ١)^{٢} ب) س ← س^{٢} + ١ ج) س ← س + ٢ د) س ← س^{٤}

٨) إذا علمت أن د(س) : س^{٢} − ٥س حيث س ∈ ح ، هـ(س) = ٢س + ٣ حيث س ∈ ح ، فأ) أوجد (د ∘ هـ)(س) . ب) أوجد مدى الدالة (د ∘ هـ)(س) .

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

٩) تمثّل الدالة ك(ن) = ٢ + ٤ن دالة الكلفة لإنتاج ن قطعة من سلعة ما. ولكل س ريال عُماني تمّ صرفه، يتمّ احتساب الربح باستخدام الدالة ر(س) = ٠٫٢س . أوجد (ر ٠ ك)(ن) .

١٠) تمثّل الدالة ع(ن) = ٣٠ن + ٤٩٠ الارتفاع فوق مستوى سطح البحر ع (بالأمتار) لمتسلق جبال حيث كان يتسلق لمدة ن ساعة. ودرجة الحرارة د (بالدرجة السيليزية) لكل س متر فوق سطح البحر تتمثّل بالدالة د(س) = ٢٠ − $\frac{\text{٢س}}{\text{٣٠٠}}$. أوجد (د ٠ ع)(ن) .

ورقة الإجابات النموذجية ٢-٢

١: أ) هـ(٢) = ٣ ، د(٣) = ٩ | ب) د(٥) = ١٣ ، هـ(١٣) = ١٦٨

٢: د(٣) = ٢٤ ، د(٢٤) = ٦٧٥

٣: أ) هـ(٦) = ١ ، د(١) = ٧ | ب) د(٤) = ٢٢ ، هـ(٢٢) = ٣ | ج) د(−٣) = ١٥ ، د(١٥) = ٢٣١

٤: أ) ع ٠ ل | ب) ل ٠ ع | ج) ع ٠ ع

٥: أ) (هـ ٠ د)(س) = $\frac{\text{١٢}}{\text{٢س + ٢}}$ = $\frac{\text{٦}}{\text{س + ١}}$ (موجودة لأن ٢س + ٣ = ١ تعطي س = −١ المستبعدة) | ب) $\frac{\text{٦}}{\text{س + ١}}$ = ٢ ، س = ٢

٦: أ) (هـ ٠ ل)(س) = (٢س + ٥)^{٢} − ٢ = ٤س^{٢} + ٢٠س + ٢٣ | ب) (٢س + ٥)^{٢} = ١٦ ، س = −٠٫٥ أو س = −٤٫٥

٧: أ) د ٠ هـ | ب) هـ ٠ د | ج) هـ ٠ هـ | د) د ٠ د

٨: أ) (٢س + ٣)^{٢} − ٥(٢س + ٣) = ٤س^{٢} + ٢س − ٦ | ب) النقطة الصغرى عند س = −٠,٢٥ قيمتها −٦,٢٥ ، المدى ≤ −٦,٢٥

٩: (ر ∘ ك)(ن) = ٠,٢(٢ + ٤ن) = ٠,٤ + ٠,٨ن

١٠: (د ∘ ع)(ن) = ٢٠ − $\frac{٢(٣٠ن + ٤٩٠)}{٣٠٠}$ = $\frac{٢٥١}{١٥}$ − ٠,٢ن ≈ ١٦,٧٣٣ − ٠,٢ن

ملاحظة: الإجابات من حسابي لأن كتاب الطالب لا يتضمن مفتاح إجابات.

٢-٣ الدوال العكسية

الدالة العكسية د$^{-١}$(س) هي دالة تعكس ما تقوم به الدالة د(س). (د ∘ د$^{-١}$)(س) = (د$^{-١}$ ∘ د)(س) = س . مجال د$^{-١}$(س) هو مدى د(س) ، ومدى د$^{-١}$(س) هو مجال د(س). يمكن إيجاد الدالة العكسية فقط إذا كانت د(س) دالة واحد إلى واحد.

الخطوة ١: اكتب الدالة في صورة ص = **الخطوة ٢:** بادل بين المتغيّرين س ، ص

الخطوة ٣: أوجد ص بدلالة س.

مثال

هـ(س) = $\frac{١}{٤س + ٢}$. ص = $\frac{١}{٤س + ٢}$ ، نبدّل: س = $\frac{١}{٤ص + ٢}$ ، ٤ص + ٢ = $\frac{١}{س}$ ،

فتكون هـ$^{-١}$(س) = $\frac{١}{٤س}$ − $\frac{١}{٢}$

إذا كانت د(س) = د$^{-1}$(س) فتُسمّى الدالة د عكسية لنفسها، وعندها (د ∘ د)(س) = س .

٣-٢ أمثلة ١٠ و ١١

مثال ١٠

د(س) = ٥س − ٣ ، س ≤ ٠ . أوجد د$^{-1}$(س) .

الحلّ

ص = ٥س − ٣ ، س = ٥ص − ٣ ، ص = $\frac{\text{س} + ٣}{٥}$ ، فتكون د$^{-1}$(س) = $\frac{\text{س} + ٣}{٥}$ ، س ≤ −٣ .

مثال ١١

تسافر منى بالسيارة بمعدل ثابت. تمثّل الدالة الآتية المسافة م (بالكيلومترات) من منزل منى بعد ن (٠ ≤ ن ≤ ٣) (ساعات): م(ن) = ١٢٠ − ٤٠ن . أ) أوجد م$^{-1}$. ب) فسّر ما تعنيه الدالة م$^{-1}$ في سياق المسألة. ج) أوجد الزمن الذي تستغرقه منى لتكون على بعد ٤٠ كيلومترًا من منزلها مباشرة.

الحلّ

أ) ص = ١٢٠ − ٤٠ن ، ن = ١٢٠ − ٤٠ص ، ٤٠ص = ١٢٠ − ن ، فتكون م$^{-١}$(ن) = $\frac{١٢٠ - ن}{٤٠}$

ب) تدلّنا م$^{-١}$ على الزمن الذي استغرقته منى عند قطع مسافة ن كيلومترات من منزلها.

ج) م$^{-١}$(٤٠) = $\frac{١٢٠ - ٤٠}{٤٠}$ = ٢ ساعة (استغرقت منى ساعتين).

تمارين ٢-٣

١) أوجد د$^{-١}$(س) لكل دالة من الدوال الآتية:

أ) د(س) = ٥س − ٨ حيث س ∈ ح

ب) د(س) = س^{٢} + ٣ حيث س ∈ ح ، س ≤ ٠

ج) د(س) = (س − ٥)^{٢} + ٣ حيث س ∈ ح ، س ≥ ٥

د) د(س) = $\frac{٨}{٣ - س}$ حيث س ∈ ح ، س ≠ ٣

٢) إذا كانت د : س ← س^{٢} + ٤س حيث س ∈ ح ، س ≥ −٢ ، فأ) أوجد مدى د(س) ، أي مجال د$^{-١}$(س). ب) أوجد مدى د$^{-١}$(س). (مساعدة: ارسم منحنى الدالة التربيعية لتحدد نقطة التحول).

خالد كمال
khaled-math-forge.sh

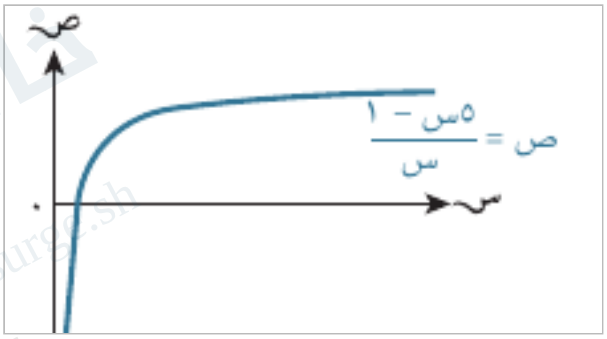
٣) إذا كانت د : س ← $\frac{٥}{١ + ٢س}$ حيث س ∈ ح ، س ≤ ٢ ، فأ) أوجد مدى د(س) ، أي مجال $د^{-١}$(س). ب) أوجد $د^{-١}$(س).

٤) إذا كانت د : س ← $س^{٢}$ − ٦س حيث س ∈ ح ، فأوجد مدى الدالة د .

٥) إذا كانت د(س) = ٣س − ٢٤ حيث س ≥ ٠ ، اكتب مدى $د^{-١}$.

تمارين ٢-٣ (تابع)

٦) يبيّن الشكل المجاور منحنى الدالة ص = $د^{-١}$(س) ، حيث $د^{-١}$(س) = $\frac{٥س - ١}{س}$ لكل س ∈ ح ، ٠ < س ≤ ٣ . أوجد د(س).



٧) تتمثّل الكلفة ك (بمئات الريالات العُمانية) لإنتاج س سلعة بالدالة ك(س) = ٠٫٢س + ١ . تشير الدالة العكسية $ك^{-١}$(س) إلى عدد السلع التي يمكن إنتاجها لكمية محددة من الأموال. أوجد هذه الدالة.

٨) يُملأ خزان مياه حتى ارتفاع ع سم من صنبور ماء جارٍ بكمّية ضخّ ثابتة. تمثّل الدالة أدناه ارتفاع الماء في الخزان في الزمن ن (ثانية) منذ تشغيل الصنبور: ع(ن) = ٠٫٢ن . أ) أوجد $ع^{-١}$(ن). ب) فسّر المقصود من الدالة $ع^{-١}$ في سياق المسألة، واذكر الصيغة المناسبة لها.

ورقة الإجابات النموذجية ٢-٣

١: أ) $د^{-١}(س) = \frac{س + ٨}{٥}$ | ب) $د^{-١}(س) = \sqrt{س - ٣}$ ، $س \geq ٣$ | ج) $د^{-١}(س) = ٥ - \sqrt{س - ٣}$ ، $س \geq ٣$ | د) $د^{-١}(س) = \frac{٨}{س} - ٣$ ، $س \neq ٠$

٢: $د(س) = (س + ٢)^{٢} - ٤$ ، أ) المدى $د(س) \geq -٤$ ، فمجال $د^{-١}$ هو $س \geq -٤$ | ب) $د^{-١}(س) = -٢ - \sqrt{س + ٤}$ ، مداها $د^{-١}(س) \geq -٢$

٣: أ) $د(٢) = ١$ والدالة متناقصة نحو ٠ ، فالمدى $٠ < د(س) \geq ١$ ، أي مجال $د^{-١}$ هو $٠ < س \geq ١$ | ب) $د^{-١}(س) = \frac{٥ - س}{٢س}$

٤: $د(س) = (س - ٣)^{٢} - ٩$ ، المدى $د(س) \geq -٩$

٥: مدى $د^{-١}$ هو مجال د : $س \geq ٠$

٦: ص $= \frac{٥س - ١}{س}$ ، بالتبديل: $س ص = ٥س - ١$ ، $س(ص - ٥) = -١$ ، فتكون $د(س) = \frac{١}{٥ - س}$ ، مجالها $س \geq \frac{١٤}{٣}$ (مدى $د^{-١}$) ومداها $٠ < د(س) \geq ٣$

٧: $ك^{-١}(س) = \frac{س - ١}{٠,٢} = ٥س - ٥$ ، $س \leq ١$

٨: أ) $ع^{-١}(ن) = ٥ن$ | ب) تدلّ على الزمن (بالثواني) الذي يلزم ليصل ارتفاع الماء إلى ن سم ، أي ن = ع٥

خالد كمال
khaled-math-page.sh

ملاحظة: الإجابات من حسابي لأن كتاب الطالب لا يتضمن مفتاح إجابات.

٢-٤ منحنى الدالة ومنحنى دالتها العكسية

نتيجة ١١: منحنى د$^{-١}$(س) هو انعكاس لمنحنى د(س) حول المستقيم ص = س .

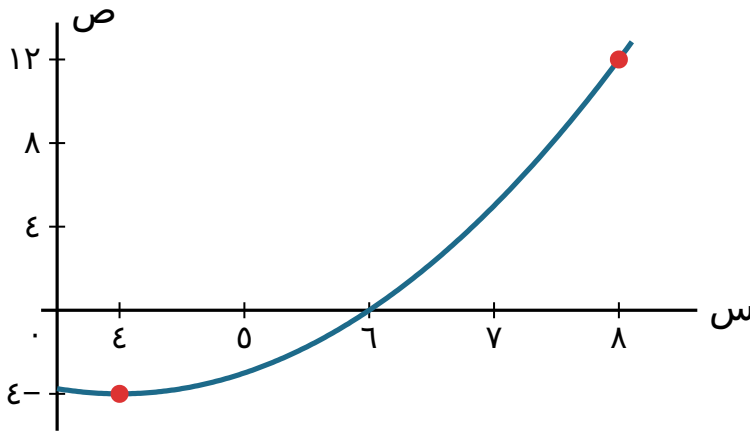
نتيجة ١٢: يكون منحنى الدالة العكسية لنفسها متماثلًا حول المستقيم ص = س .

مثال ١٢

د(س) = س^{٢} − ٨س + ١٢ ، ٤ ≤ س ≤ ٨ . أوجد د$^{-١}$ وارسم المنحنيين.

الحلّ

د(س) = (س − ٤)^{٢} − ٤ ، د(٤) = −٤ ، د(٨) = ١٢ . ص + ٤ = (س − ٤)^{٢} ، فتكون د$^{-١}$(س) = ٤ + $\sqrt{\text{س} + ٤}$ ، مجالها −٤ ≤ س ≤ ١٢ .



مثال ١٣

د(س) = $\frac{٢س + ٧}{س - ٢}$ ، س ≠ ٢ . بيّن أن د عكسية لنفسها.

الحلّ

(د ∘ د)(س) = $\frac{٧ + \frac{٢(٢س + ٧)}{س - ٢}}{٢ - \frac{٢س + ٧}{س - ٢}}$ = $\frac{١١س}{١١}$ = س ، فالدالة عكسية لنفسها

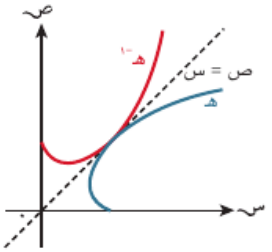
ومنحناها متماثل حول ص = س .

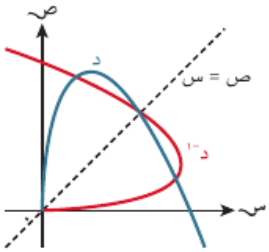
استكشاف ٣

تقول شهد ما يأتي: يبيّن الشكلان الدالتين د ، هـ معًا مع الدالة العكسية لكل منهما د$^{-١}$ ، هـ$^{-١}$. هل ما تقوله شهد صحيح؟ اشرح إجابتك.

خالد كمال
khalid-math.surge.sh

استكشف ٣





تقول شهد ما يأتي:

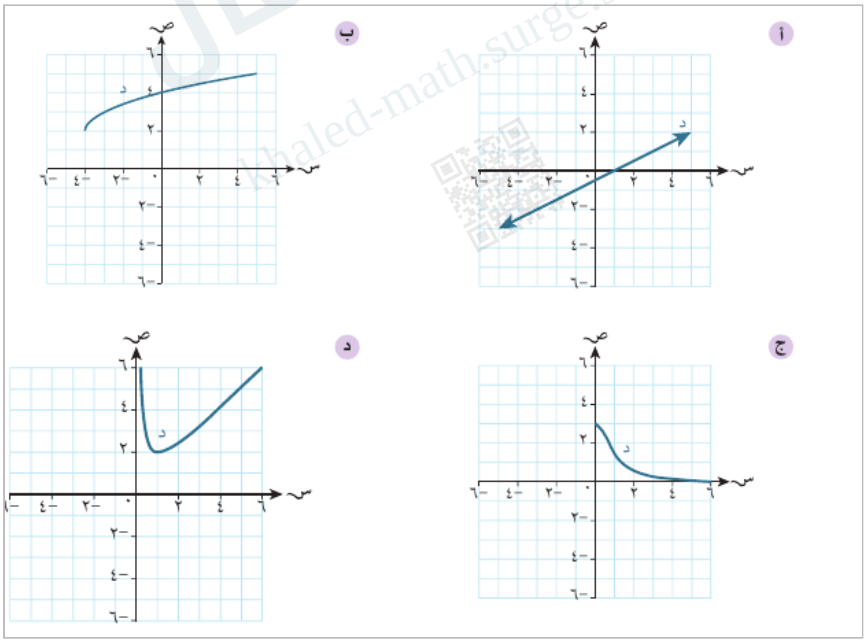
يبيّن الشكلان الدالتَين د، هـ معًا مع الدالة العكسية لكل منهما $د^{-1}$، $هـ^{-1}$

هل ما تقوله شهد صحيح؟

اشرح إجابتك.

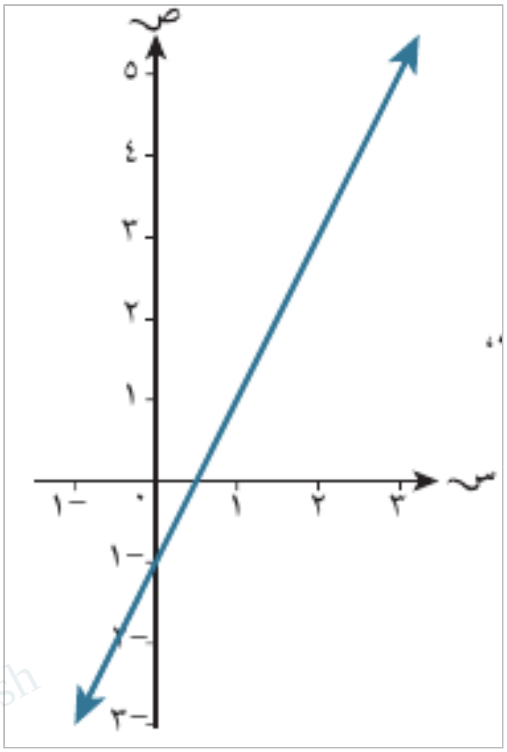
تمارين ٢-٤

١) في كل حالة من الحالات الآتية، ارسم منحنى $د^{-1}(س)$ على المستوى الإحداثي نفسه إن وجد:

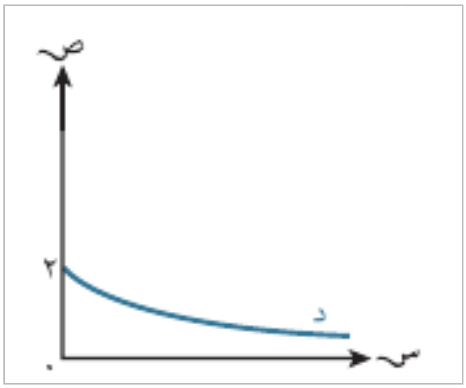


خالد كمال
khaled-math.surge.sh

تمارين ٢-٤ (تابع)



٢) إذا كانت د : س ← ٢س − ١ حيث س ∈ ح ، −١ ≤ س ≤ ٣ . أ) أوجد د$^{-1}$(س). ب) حدّد مدى د(س) ، أي مجال د$^{-1}$(س). ج) أوجد مدى د$^{-1}$(س). د) انسخ الشكل وارسم منحنى ص = د$^{-1}$(س) على المستوى الإحداثي نفسه، موضحًا العلاقة بين المنحنيين.



٣) يبيّن الشكل المجاور منحنى ص = د(س)

عندما د(س) = $\frac{٤}{٢ + س}$ حيث س ∈ ح ، س ≥ ٠ . أ) حدد مدى د(س) ، أي مجال الدالة د$^{-1}$(س). ب) أوجد د$^{-1}$(س). ج) أوجد مدى د$^{-1}$(س). د) انسخ الشكل وارسم منحنى ص = د$^{-1}$(س) على المستوى الإحداثي نفسه، موضحًا العلاقة بين المنحنيين.

ورقة الإجابات النموذجية ٢-٤

استكشاف ٣: سؤال نقاشي في الكتاب، لم أضع له إجابة نموذجية في هذه الورقة.

١: أ) و ب) و ج) واحد إلى واحد فتوجد $د^{-١}$ ويُرسم بانعكاس نقاط المنحنى حول ص = س (تتبادل الإحداثيتان في كل نقطة، وتتبادل نقطتا البداية والنهاية) | د) المنحنى ينزل ثم يصعد (متعدّد إلى واحد) فلا توجد $د^{-١}$

٢: أ) $د^{-١}(س) = \frac{س + ١}{٢}$ | ب) $-٣ \leq س \leq ٥$ | ج) $د^{-١}(س) \geq ١-$ | د) يمرّ منحنى $د^{-١}$ بالنقطتين $(-٣ ، -١)$ و $(٥ ، ٣)$ وهما انعكاس $(-١ ، -٣)$ و $(٣ ، ٥)$ حول ص = س

٣: أ) $٠ < د(س) \geq ٢$ | ب) $د^{-١}(س) = \frac{٤}{س} - ٢$ | ج) $د^{-١}(س) \leq ٠$ | د) يمرّ منحنى $د^{-١}$ بالنقطة $(٢ ، ٠)$ وينعكس حول ص = س

ملاحظة: الإجابات من حسابي لأن كتاب الطالب لا يتضمن مفتاح إجابات.

تمارين مراجعة نهاية الوحدة الثانية

١) إذا كانت د دالة معرفة كالآتي: $د(س) = س^{٢} - ١$ حيث $-١٠ \leq س \leq ٨$: أ) أوجد مدى د ب) اكتب مجالًا مناسبًا للدالة د حيث تكون الدالة $د^{-١}$ موجودة.

٢) إذا كانت الدالتان د ، هـ معرفتين لكل قيم س الحقيقية كالآتي: $د(س) = ٣ - \sqrt{س - ١}$ حيث $س > ١$ ، $هـ(س) = \frac{س - ٢}{٣ - ٢س}$ حيث $س > ٢$: أ) أوجد $(هـ \circ د)(٣٧)$. ب) أوجد $د^{-١}(س)$. ج) أوجد $هـ^{-١}(س)$.

٣) إذا كانت الدالة هـ معرفة كالآتي: $هـ(س) = \frac{١}{١ - ٢س}$ حيث $١ \geq س \geq ٣$: أ) أوجد مدى الدالة هـ. ب) أوجد $هـ^{-١}(س)$. ج) اكتب مجال $هـ^{-١}(س)$.

٤) أ) إذا كانت الدالتان د ، هـ معرفتين حيث س ∋ ح كالآتي: د : س ← ٢س + ٣ ، هـ : س ← س^{٢} − ١ ، فأوجد (د ∘ هـ)(٤). ب) إذا كانت الدالتان ع ، ل معرفتين حيث س > ٠ كالآتي: ع : س ← س + ٤ ، ل : س ← $\sqrt{\text{س}}$ ، فاكتب كل دالة من الدوال الآتية بدلالة دوال مركبة من الدالتين ع ، ل: ١) س ← $\sqrt{\text{س} + ٤}$ ٢) س ← س + ٨

ورقة الإجابات النموذجية للمراجعة

١: أ) النقطة الصغرى (٠ ، −١) ، د(−١٠) = ٩٩ ، د(٨) = ٦٣ ، المدى −١ ≤ د(س) ≤ ٩٩ | ب) مجال مناسب: ٠ ≤ س ≤ ٨ (الدالة تصبح واحد إلى واحد)

٢: أ) د(٣٧) = ٣ − ٦ = −٣ ، هـ(−٣) = $\frac{-٥}{٩}$ | ب) د$^{-١}$(س) = (٣ − س)^{٢} + ١ ، س < ٣ | ج) هـ$^{-١}$(س) = $\frac{٣\text{س} + ٢}{٢\text{س} + ١}$

٣: هـ(١) = −١ ، هـ(٣) = $\frac{-١}{٥}$ | أ) −١ ≤ هـ(س) ≥ $\frac{-١}{٥}$ | ب) هـ$^{-١}$(س) = $\frac{\text{س} - ١}{٢\text{س}}$ | ج) −١ ≤ س ≤ $\frac{-١}{٥}$

٤: أ) هـ(٤) = ١٥ ، د(١٥) = ٣٣ | ب) ١) ل ∘ ع | ٢) ع ∘ ع

ملاحظة: الإجابات من حسابي لأن كتاب الطالب لا يتضمن مفتاح إجابات.

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

ملخص الوحدة الثانية — الدوال

ملخص قوي شامل وقصير: القوانين والقواعد وخطوات الحل، من ملخص الكتاب (قائمة التحقّق من التعلّم والفهم) بنصّه.

أولًا: القوانين والقواعد (من قائمة التحقّق في الكتاب بنصّها)

- الدالة هي علاقة بين مجموعتين بحيث يرتبط كل عنصر من المجموعة الأولى بعنصر واحد فقط من عناصر المجموعة الثانية.
- قد تكون الدالة واحد إلى واحد أو متعدّد إلى واحد.
- تُسمّى مجموعة المدخلات مجال الدالة.
- تُسمّى مجموعة المخرجات مدى الدالة.

تركيب الدوال:

- (د ∘ هـ)(س) تعني إجراء الدالة هـ بدل س في د ، ثم إجراء د على الناتج.
- تكون (د ∘ هـ)(س) موجودة (فقط) عندما يكون مدى هـ متضمَّنًا في مجال د.
- بصورة عامة، (د ∘ هـ)(س) ≠ (هـ ∘ د)(س).

الدوال العكسية:

- الدالة العكسية للدالة د(س) هي دالة تعكس ما تقوم به الدالة د(س).
- (د ∘ د$^{-1}$)(س) = (د$^{-1}$ ∘ د)(س) = س ؛ أو إذا ص = د(س) فإن س = د$^{-1}$(ص).
- تُكتب الدالة العكسية للدالة د(س) في صورة د$^{-1}$(س).
- **خطوات إيجاد الدالة العكسية:** الخطوة ١: اكتب الدالة في صورة ص = ؛ الخطوة ٢: بادل بين المتغيّرين س ، ص ؛ الخطوة ٣: أوجد ص بدلالة س.
- مجال د$^{-1}$(س) هو مدى د(س) ، ومدى د$^{-1}$(س) هو مجال د(س).
- يمكن إيجاد الدالة العكسية د$^{-1}$(س) إذا كانت د(س) دالة واحد إلى واحد فقط.
- منحنى د$^{-1}$(س) هو انعكاس لمنحنى د(س) حول المستقيم ص = س.
- إذا كان د(س) = د$^{-1}$(س) فتسمّى الدالة د عكسية لنفسها، ويكون (د ∘ د)(س) = س ، ومنحناها متماثلًا حول المستقيم ص = س.

ملخص الوحدة الثانية (تابع)

ثانيًا: أهم الدروس

• ٢-١ تعريف الدوال ومجالها ومداها: معنى العلاقة والدالة، واحد إلى واحد ومتعدد إلى واحد، اختبار المستقيم الرأسي، إيجاد المجال والمدى.

• ٢-٢ الدوال المركّبة: ترتيب إجراء الدالتين، تقييم (د ∘ هـ)(س) عدديًّا وجبريًّا، وشرط وجود التركيب.

• ٢-٣ الدوال العكسية: خطوات الإيجاد الثلاث، والتحقّق بأن (د ∘ د$^{-1}$)(س) = س.

• ٢-٤ منحنى الدالة ومنحنى دالتها العكسية: الانعكاس حول المستقيم ص = س ، والدالة العكسية لنفسها.

ثالثًا: أهم المسائل في المذكرة

• أمثلة ٢-١ وتمارينها: تحديد ما إذا كانت العلاقة دالة، وإيجاد المجال والمدى من المخططات والقواعد.

• أمثلة ٢-٢ (٧ ، ٨ ، ٩) وتمارينها: إيجاد (د ∘ هـ)(س) و (هـ ∘ د)(س) وتقييمهما عند عدد.

• أمثلة ٢-٣ (١٠ ، ١١) وتمارينها: إيجاد د$^{-1}$(س) بالخطوات الثلاث والتحقق بالتركيب.

• أمثلة ٢-٤ وتمارينها: رسم منحنى الدالة العكسية بالانعكاس حول ص = س.

أهم المسائل — مراجعة نهاية الوحدة:

• تمارين مراجعة نهاية الوحدة الثانية كاملة.

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

رابعًا: مسائل متوقَّعة في الاختبار — توقّع استرشادي من الكتاب والمنهج فقط، وليست معلومة مؤكدة عن الامتحان:

• إيجاد الدالة العكسية د$^{-1}$(س) والتحقق منها بتركيب الدالتين.

• تقييم دالة مركّبة عند قيمة عددية، وإيجاد صورة (د ∘ هـ)(س) المبسّطة.

• إيجاد مجال دالة ومداها (ومنها ما فيه مقام أو جذر) وتحديد ما إذا كانت واحد إلى واحد.

• الحكم على علاقة معطاة (مخطط أسهم أو تمثيل بياني) هل هي دالة باستخدام اختبار المستقيم الرأسي.

• رسم منحنى الدالة العكسية انعكاسًا حول المستقيم ص = س ، والتعرّف على الدالة العكسية لنفسها.

خالد كمال
khaled-math.surge.sh