ملخص الوحدة ٦: المصفوفات

ملخص مبني على مذكرة الوحدة ٦ نفسها دون تغييرها. المصفوفات مكتوبة بالاتجاه العربي: الصف يُقرأ من اليمين إلى اليسار.

أولًا: أهم الدروس

٦-١ العمليات: الرتبة م × ن (صفوف × أعمدة). الجمع والطرح بين مصفوفتين من الرتبة نفسها عنصرًا بعنصر. الضرب في عدد يضرب كل عنصر. حاصل الضرب ا × ب ممكن فقط إذا كان عدد أعمدة ا = عدد صفوف ب، والرتبة الناتجة: صفوف ا × أعمدة ب. الضرب غير تبديلي في العموم: ا × ب ≠ ب × ا.

٦-٢ المحدد: للمصفوفة ٢×٢ المحدد = أ د − ب ج. للمصفوفة ٣×٣ نفكّ على الصف الأول بالإشارات + − +. الخاصية: |ا × ب| = |ا| × |ب| = |ب × ا|. المصفوفة **منفردة** إذا كان محددها ٠.

٦-٣ المعكوس: يوجد فقط إذا كان المحدد ≠ ٠. للمصفوفة ٢×٢: ا$^{-١}$ = $\frac{\text{ا}}{|\text{ا}|}$ × (نبدّل العنصرين القطريين ونغيّر إشارة العنصرين الآخرين). ا × ا$^{-١}$ = م. (ا × ب)$^{-١}$ = ب$^{-١}$ × ا$^{-١}$ (الترتيب ينعكس).

٦-٤ أنظمة المعادلات: النظام ا س = ب له الحل س = ا$^{-١}$ ب عندما |ا| ≠ ٠. لثلاث معادلات نكوّن المصفوفة المعزّزة ونختزل الصفوف: صف ٠ ٠ ٠ | عدد غير صفري ← لا حل. صف أصفار كامل ← عدد لا نهائي من الحلول (مستقيم تقاطع). غير ذلك ← حل وحيد (نقطة).

ثانيًا: أمثلة محسوبة على الأفكار الأساسية

$$\text{ا} = \begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٥ & ٣ \end{pmatrix} \leftarrow |\text{ا}| = ٦ - ٥ = ١ \leftarrow \text{ا}^{-١} = \begin{pmatrix} ٣ & -١ \\ -٥ & ٢ \end{pmatrix}$$

$$\text{ب} = \begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ٠ & ٣ \end{pmatrix} \leftarrow |\text{ا} \times \text{ب}| = |\text{ا}| \times |\text{ب}|$$

$= ١ \times ٣ = ٣$.

النظام ٢س + ص = ٤ ، ٣س − ص = ٧: المصفوفة $\begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٣ & -١ \end{pmatrix}$ ← المحدد = −٥ ← الحل

س = $\frac{١١}{٥}$ ، ص = $-\frac{٢}{٥}$.

ثالثًا: أهم المسائل (من تمارين الوحدة)

١) ٦-١ س٥-٧: ترتيب العمليات والرتب، وتحديد إن كان الضرب ممكنًا (مثلًا ٢×٤ ثم ٢×٢ غير ممكن).

٢) ٦-٢: إيجاد المحدد ٣×٣، وإيجاد قيمة وسيط تجعل المصفوفة منفردة (مثل ٢أ + ٢ = ٠ ← أ = −١)، وإثبات |ا × ب| = |ا| × |ب|.

٣) ٦-٣: إيجاد المعكوس ٢×٢ و٣×٣، وحلّ معادلة مصفوفية مثل ج × ب = ا + ا² بالضرب في ب⁻¹.

٤) ٦-٤: نظام له حل وحيد أو لا حل أو عدد لا نهائي، وإيجاد قيمة ك التي تعطي عددًا لا نهائيًا من الحلول.

رابعًا: مسائل متوقعة في الاختبار (تخمين غير مؤكد)

تنبيه: الأسئلة المتوقعة أدناه تخمين موجَّه مبني على نمط تمارين الكتاب. هي **غير مؤكدة** وليست أسئلة الاختبار الفعلية.

١) أوجد قيمة الوسيط التي تجعل مصفوفة ٢×٢ أو ٣×٣ منفردة، ثم أوجد المعكوس لقيمة أخرى للوسيط.

٢) حلّ نظام معادلات من ثلاثة مجاهيل بالمصفوفة المعزّزة وحدّد نوع الحل (وحيد / لا حل / لا نهائي) بحسب قيمة وسيط.

٣) معادلة مصفوفية من الشكل ج × ب = ا² + ا أو ا × د × ب = م، وإيجاد المصفوفة المجهولة بالمعكوس.

٤) إثبات |ا × ب| = |ب × ا| = |ا| × |ب| بمصفوفتين معطاتين.

٥) مساواة مصفوفتين لإيجاد قيم مجاهيل (مثل س ، ن ، م في مراجعة الوحدة).

خالد كمال
khaled-math.forge.sh