١-٦ المصفوفات والعمليات عليها

المصفوفة جدول مستطيل من الأعداد في صفوف وأعمدة. رتبة المصفوفة م × ن: م صفوف و ن أعمدة. العنصر $أ_{ij}$ في الصف i والعمود j.

ملاحظة: الكتاب يكتب المصفوفات بالاتجاه العربي: الصف يُقرأ من اليمين إلى اليسار (أول عنصر في الصف على اليمين). المذكرة تتبع الكتاب. وصف العنصر ١٢ في مقدمة الدرس يبدو معكوسًا بسبب هذا الاتجاه، فالتزم بالقاعدة: $أ_{ij}$ الصف i ثم العمود j.

• **تساوي مصفوفتين:** نفس الرتبة وكل عنصر يساوي نظيره. • **الجمع والطرح:** للمصفوفتين من نفس الرتبة فقط، عنصرًا بعنصر. • **الضرب في عدد:** نضرب كل عنصر في العدد.

• **ضرب مصفوفتين:** ا × ب ممكن فقط إذا كان عدد أعمدة ا = عدد صفوف ب. إذا كانت رتبة ا م × ن ورتبة ب ن × ك فرتبة الناتج م × ك. عنصر الصف i والعمود j في الناتج = حاصل ضرب الصف i من ا في العمود j من ب (الأول في الأول + الثاني في الثاني + ...).

• ا × ب ≠ ب × ا عمومًا. • (ا × ب) × ج = ا × (ب × ج). • المصفوفة المحايدة م: أحاد على القطر الرئيسي وأصفار في الباقي، ا × م = م × ا = ا.

مثال ٢

$$\text{ا} = \begin{pmatrix} ٤ & ٣ \\ ٢ & ١ \end{pmatrix}\text{، ب} = \begin{pmatrix} ٨ & ٧ \\ ٦ & ٥ \end{pmatrix}$$

مثال ٢ (تابع)

$$\text{ا} \times \text{ب} = \begin{bmatrix} ٥٠ & ٤٣ \\ ٢٢ & ١٩ \end{bmatrix} \qquad \text{ب} \times \text{ا} = \begin{bmatrix} ٤٦ & ٣١ \\ ٣٤ & ٢٣ \end{bmatrix}$$

تمارين ٦-١

١) $\text{ا} = \begin{bmatrix} ٥ & ٧ & -٣ & ٠ \\ -٢ & ٨ & ١١ & ٦ \end{bmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{bmatrix} ٤ & ٦ & ٢ \\ -٦ & ٢ & ٥٢ \\ ٦ & ٨ & ٧٢ \end{bmatrix}$ ، $\text{ج} = \begin{bmatrix} ٧ \\ -١٢ \\ ٤ \end{bmatrix}$. أوجد: (أ) رتبة كل مصفوفة. (ب) قيم ا٢٣ ، ب١٢ ، ج٢١. (ج) −٤ج ، −ا٢ ، ½ب.

٢) أوجد ناتج الضرب إن أمكن: (أ) $\text{ا} = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & ٥ \end{bmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{bmatrix} ٠ \\ ٤ \end{bmatrix}$ ، ا × ب (ب) $\times \begin{bmatrix} ٥ \\ ٦ \end{bmatrix}$

(ج) $\begin{bmatrix} ٧ & ٨ \\ ١٠ & -٢ \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} ٥ & ٢ & ١ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٢ & ٦ \\ ٤ & ٠ \\ ٣ & ٨ \end{bmatrix}$ (د) $\begin{bmatrix} ٢ & ٧ & ٥ & -١ \\ ٤ & -٤ & ٠ & ٣ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ١٢ & ٣ \\ ٢ & ٥ \end{bmatrix}$

٣) أوجد المجاهيل: (أ) $\begin{bmatrix} ٥ & -٦ \\ ٤ & ١٢ + \text{س} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥ & ٢\text{ص} + ٥ \\ ١٤ & ٤ \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} ٦ & ⅔\text{س} \\ -٤ & \text{ص} + ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٦ & ٣ + \text{س} \\ -٤ & ½\text{ص} + ٥ \end{bmatrix}$

٤) تحقق أن ا × ب ≠ ب × ا حيث $\text{ا} = \begin{bmatrix} ٢ & ٧ \\ -٩ & ٤ \end{bmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{bmatrix} ٣ & -٥ \\ ٤ & ١٢ \end{bmatrix}$

٥) $أ = \begin{bmatrix} ٦ & ٧ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ٢ & ٠ \\ ١ & ٤- \end{bmatrix}$. أوجد: (أ) $أ^{٢} + ٢أ \times ب$ (ب) $ب^{٢} \times أ$ (ج) $أ^{٢} - ب \times أ$

٦) $أ = \begin{bmatrix} ٢ & ٥- & ١ \\ ٦ & ١ & ٠ \\ ٣ & ٠ & ٢- \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ١ & ٢- & ١ \\ ٠ & ٤ & ٢ \\ ٠ & ٠ & ٢ \end{bmatrix}$. أوجد: (أ) $ب^{٢} \times أ$ (ب) $أ^{٢} - أ \times ب$

٧) $أ = \begin{bmatrix} ١- & ٥- & ١٠ \\ ٠ & ٩ & ٣ \\ ١ & ٢ & ٥- \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ٣ & ١ & ٢- \\ ٠ & ٠ & ٤ \\ ٥ & ٣- & ٦- \end{bmatrix}$. أوجد: (أ) $٢أ + ٥ب$ (ب) $ب^{٢} \times أ$ (ج) $أ^{٢} \times ب$ (د) $٢أ + ٣أ^{٢}$

ورقة الإجابات النموذجية: تمارين ٦-١

ملاحظة: الإجابات من حسابي لأن كتاب الطالب لا يتضمن مفتاح إجابات. المصفوفات في الكتاب مكتوبة بالاتجاه العربي: الصف يُقرأ من اليمين إلى اليسار، وكذلك في هذه المذكرة.

١) (أ) $أ$: ٢ × ٤ ، $ب$: ٣ × ٣ ، $ج$: ٣ × ١. (ب) $أ_{٢٣} = ١١$ ، $ب_{١٢} = ٦$ ، $ج_{٢١} = -١٢$. (ج) $-٤ج =$ $\begin{bmatrix} ٢٨- \\ ٤٨ \\ ١٦- \end{bmatrix}$، $-١٢ =$ $\begin{bmatrix} ١٠- & ١٤- & ٦ & ٠ \\ ٤ & ١٦- & ٢٢- & ١٢- \end{bmatrix}$، $½ب =$ $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ & ١ \\ ٣- & ١ & ٢٦ \\ ٣ & ٤ & ٣٦ \end{bmatrix}$

٢) (أ) $\begin{bmatrix} ١٢ \\ ٢٠ \end{bmatrix}$ (ب) غير ممكن: عدد أعمدة المصفوفة الأولى (١) لا يساوي عدد صفوف الثانية (٢). (ج) $\begin{bmatrix} ٢١ & ٣٨ \end{bmatrix}$ (د) غير ممكن: الأولى ٢ × ٤ والثانية ٢ × ٢.

٣) (أ) س + ١٢ = ١٤ ← س = ٢ ، ٢ص + ٥ = −٦ ← ص = $-\frac{١١}{٢}$. (ب) $\frac{٢}{٣}$ س = س + ٣

← س = −٩ ، ص + ١ = ½ص + ٥ ← ص = ٨.

٤) ا × ب = $\begin{bmatrix} ٣٤ & ٧٤ \\ -١١ & ٩٣ \end{bmatrix}$ ، ب × ا = $\begin{bmatrix} ٥١ & ١ \\ -١٠٠ & ٧٦ \end{bmatrix}$ ، النتيجتان مختلفتان فـ ا × ب ≠ ب × ا.

٥) (أ) $\begin{bmatrix} ٨١ & ٠ \\ -٥ & ١٦ \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} ٢٤ & ٢٨ \\ ٤ & ١٨ \end{bmatrix}$ (ج) $\begin{bmatrix} ٣١ & ٤٢ \\ ٦ & ١٢ \end{bmatrix}$

ملاحظة: ترتيب الضرب في ٥ و٦ و٧ قُرئ بالاتجاه العربي (من اليمين). عند الشك راجع الصورة في الكتاب ص ١٧٢.

٦) (أ) $\begin{bmatrix} -٦١ & -١٥ & ٣ \\ ١٣٢ & ١٦ & -٢٤ \\ ١٢ & ٠ & -٨ \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} -٢٥ & ٩ & ٦ \\ ١٢ & -٢١ & -٢ \\ -٣ & -٩ & ٨ \end{bmatrix}$

٧) (أ) $\begin{bmatrix} ١٣ & -٥ & ١٠ \\ ٠ & ١٨ & ٢٦ \\ ٢٧ & -١١ & -٤٠ \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} ١١ & ١٠٦ & -٣٣ \\ -٤٤ & -٢٥٦ & ٢٨٤ \\ ٢٩ & ٣١٠ & -١٥١ \end{bmatrix}$ (ج) $\begin{bmatrix} -٣٤٢ & ٢٣٦ & ٣٤٨ \\ ٦٩ & -٣٣ & ٢٧٠ \\ ١٨٧ & -١٢٩ & -٢٢٢ \end{bmatrix}$ (د) $\begin{bmatrix} ٣١ & -٧٠ & -٢٠٥ \\ ٩ & ٢٧٩ & ٤٢ \\ -١٦ & ١٣ & ١١٣ \end{bmatrix}$

٦-٢ محدد المصفوفة

• محدد مصفوفة ٢ × ٢ ا = $\begin{bmatrix} أ & ب \\ ج & د \end{bmatrix}$ هو |ا| = أ د − ب ج.

• محدد ٣ × ٣: نفكّ على الصف الأول: |أ| = أ × (محدد الصغرى) − ب × (...) + ج × (...) بإشارات + − +.

• المصفوفة **منفردة** إذا كان محددها ٠، و**غير منفردة** إذا كان محددها ≠ ٠. • |أ × ب| = |أ| × |ب| = |ب × أ|.

مثال

$$أ = \begin{pmatrix} ٢ & ٥ \\ ١ & ٨ \end{pmatrix}\text{، }ب = \begin{pmatrix} ٣ & ٤ \\ ١- & ٦ \end{pmatrix}\text{: }|أ| = ١١\text{، }|ب| = ٢٢\text{، }أ \times ب = \begin{pmatrix} ١ & ٣٨ \\ ٥- & ٥٢ \end{pmatrix}\text{، }|أ| \times |ب| = ٢٤٢ = ١١ \times ٢٢.$$

$$\text{٣ × ٣: }أ = \begin{pmatrix} ١ & ٢ & ١ \\ ٠ & ١ & ٣ \\ ١- & ٠ & ١ \end{pmatrix}\text{، }ب = \begin{pmatrix} ٢ & ١ & ٠ \\ ١ & ١- & ١ \\ ٣ & ٠ & ٢ \end{pmatrix}\text{: }|أ| = ٨\text{، }|ب| = -٣\text{، }أ \times ب = \begin{pmatrix} ٧ & ١- & ٤ \\ ١٠ & ١- & ٧ \\ ١- & ٢ & ١ \end{pmatrix}\text{، }|أ| \times |ب| = -٢٤.$$

تمارين ٦-٢

١) أي المصفوفات الآتية غير منفردة؟ (أ) $\begin{pmatrix} ٥ & ٨ \\ ٤ & ٢ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ٣ & ٧ \\ ٦- & ١٤- \end{pmatrix}$ (ج) $\begin{pmatrix} ١ & ٤ \\ ١- & ٠ \end{pmatrix}$

٢) أوجد قيم س التي تجعل المصفوفة $\begin{pmatrix} س & ٤ \\ ١ & ٣ - س \end{pmatrix}$ منفردة.

٣) بيّن أن المصفوفة $\begin{bmatrix} س & -٢ \\ ٥ & س + ١ \end{bmatrix}$ ليست منفردة لجميع قيم س الحقيقية.

٤) $أ = \begin{bmatrix} ٣ & ٤ \\ ١ & ٥ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} -١ & ٢ \\ ٦ & -٣ \end{bmatrix}$. أثبت أن: $|أ| \times |ب| = |ب| \times |أ|$ و $|أ ب| = |ب أ| = |أ| \times |ب|$

٥) أوجد محدد كل مصفوفة: (أ) $\begin{bmatrix} ٣ & ٣ & ٥ \\ ٣ & ١ & ٤ \\ ٣ & -٥ & ٣ \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} ١ & ٢ & ٧ \\ -٣ & ٠ & -١٣ \\ ٤ & ١١ & ٣٢ \end{bmatrix}$ (ج) $\begin{bmatrix} ١ & ٨ & ٦ \\ ٠ & -٨ & ٤ \\ ٠ & ٠ & ١٢ \end{bmatrix}$

٦) إذا كان $\begin{bmatrix} أ & أ & ٢أ \\ ٣أ & -أ & ٠ \\ ٤أ & ٢أ & أ \end{bmatrix}$ محدده = ٢ فأوجد قيمة أ.

٧) $أ = \begin{bmatrix} ١ & ٥ & ١ \\ ٢ & ٣ & ٠ \\ ١ & -١ & ٠ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٠ & ١ & ٤ \\ ١ & ٢ & ٠ \end{bmatrix}$. أوجد $|أ \times ب|$.

خالد كمال
khaled-math-surgi.sh

ورقة الإجابات النموذجية: تمارين ٦-٢

ملاحظة: الإجابات من حسابي لأن كتاب الطالب لا يتضمن مفتاح إجابات. المصفوفات في الكتاب مكتوبة بالاتجاه العربي: الصف يُقرأ من اليمين إلى اليسار، وكذلك في هذه المذكرة.

١) $|أ| = ٢\times٥ - ٤\times٨ = -٢٢$ ، $|ب| = ٣\times(-١٤) - ٧\times(-٦) = ٠$ ، $|ج| = ١\times٠ - ٤\times(-١) = ٤$.
المنفردة (ب) فقط؛ غير المنفردتين: (أ) و(ج).

٢) $س(س - ٣) - ٤\times١ = ٠ \leftarrow س^{٢} - ٣س - ٤ = ٠ \leftarrow (س - ٤)(س + ١) = ٠ \leftarrow$ **$س = ٤$ أو $س = -١$**

٣) المحدد = س(س + ١) + ١٠ = س^{٢} + س + ١٠. المميز = ١ − ٤٠ = −٣٩ < ٠، فلا يساوي المحدد صفرًا لأي س حقيقية.

٤) |أ| = ١٥ − ٤ = ١١ ، |ب| = ٣ − ١٢ = −٩ ، أ × ب = $\begin{pmatrix} ٢١ & -٦ \\ -١٣ & ٢٩ \end{pmatrix}$ ، |أ × ب| = −٩٩ = ١١ × (−٩). ب × أ = $\begin{pmatrix} ٦ & -١ \\ ٩ & ١٥ \end{pmatrix}$ ، |ب × أ| = −٩٩ = −٩ × ١١.

٥) (أ) −١٢ (ب) ٠ (ج) −٩٦

٦) المحدد = أ(−أ^{٢} − ٠) − أ(٣أ^{٢} − ٠) + ٢أ(٦أ^{٢} + ٤أ^{٢}) = ١٦أ^{٣} = ٢ ← أ^{٣} = $\frac{١}{٨}$ ← أ = $\frac{١}{٢}$

٧) |أ| = −١٠ ، |ب| = −٣ ← |أ × ب| = ٣٠

٣-٦ معكوس المصفوفة

معكوس المصفوفة المربعة أ هو المصفوفة أ$^{-١}$ التي تحقق أ × أ$^{-١}$ = أ$^{-١}$ × أ = م. لا يوجد معكوس إلا للمصفوفة غير المنفردة (محددها ≠ ٠).

٢ × ٢: إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} أ & ب \\ ج & د \end{pmatrix}$ فإن أ$^{-١}$ = $\frac{١}{أ د − ب ج}$ $\begin{pmatrix} د & -ب \\ -ج & أ \end{pmatrix}$

٣ × ٣: نكتب المصفوفة المعززة [أ | م] ونستخدم عمليات الصف حتى تصبح [م | أ$^{-١}$]. عمليات الصف: تبديل صفين، ضرب صف في عدد ≠ ٠، إضافة مضاعف صف إلى صف آخر. وإذا ظهر صف أصفار في الجزء الأيمن (المصفوفة الأصلية) فهي منفردة.

• حل المعادلة أ س = ب: س = أ$^{-١}$ ب. • (أ × ب)$^{-١}$ = ب$^{-١}$ × أ$^{-١}$ (الترتيب يتبدّل). • لحل أ × ج × ب = م نضرب بـ أ$^{-١}$ من جهة وبـ ب$^{-١}$ من الجهة الأخرى: ج = أ$^{-١}$ × ب$^{-١}$.

خالد كمال
khaled-kamal-math.surge.sh

تمارين ٦-٣

١) أوجد معكوس كل مصفوفة: (أ) $\begin{bmatrix} ١ & ٧ \\ -٢ & -٥ \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ -٨ & ١٢ \end{bmatrix}$ (ج) $\begin{bmatrix} ٤ & ٥ \\ ٣ & -٤ \end{bmatrix}$ (د) $\begin{bmatrix} ٠ & ٣ \\ ٨ & ١١ \end{bmatrix}$

٢) $ا = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٥ & ك \end{bmatrix}$. (أ) أوجد قيمة ك التي لا يوجد عندها معكوس. (ب) إذا ك = ٨ فأوجد ب حيث ب × $ا^{٢}$ = م.

٣) $ا = \begin{bmatrix} ٣ & ١ \\ ٠ & ٥ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٣ & ١ \end{bmatrix}$. أوجد ج حيث ا × ج × ب = م.

٤) أوجد معكوس $ا = \begin{bmatrix} ١ & ٣ & -٢ \\ ٠ & ٤ & ١ \\ ١ & ١ & ٢ \end{bmatrix}$

٥) $ا = \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٤ & ٣ \end{bmatrix}$. (أ) أوجد $ا^{٢}$ (ب) بيّن أن ا(ا − ٥م) = ٢م (ج) استخدم (ب) لتبيّن أن $ا^{-١}$ = $-\frac{١}{٢}\begin{bmatrix} ٤ & -٢ \\ -٣ & ١ \end{bmatrix}$

٦) $ا = \begin{bmatrix} ١ & ٠ & ٢ \\ ٢ & ١ & ١ \\ ٠ & ١ & ١ \end{bmatrix}$. (أ) $ا^{٢}$ ، $ا^{٣}$ (ب) قيمة ك بحيث $ا^{٣}$ − ك $ا^{٢}$ + ٢ا − ٤م = ٠ (ج) $ا^{-١}$

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

٧) $أ = \begin{bmatrix} ١ & ٠ & ٢ \\ ٠ & ٢ & ١ \\ ١- & ١- & ٠ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ٠ & ١ & ٠ \\ ١- & ٠ & ٢ \\ ٠ & ٠ & ٢ \end{bmatrix}$. أوجد ج حيث $أ \times ج = ب$ = م.

ورقة الإجابات النموذجية: تمارين ٦-٣

ملاحظة: الإجابات من حسابي لأن كتاب الطالب لا يتضمن مفتاح إجابات. المصفوفات في الكتاب مكتوبة بالاتجاه العربي: الصف يُقرأ من اليمين إلى اليسار، وكذلك في هذه المذكرة.

١) (أ) $|أ| = ٩$ ، $أ^{-١} = \begin{bmatrix} \frac{٧}{٩} & -\frac{٥}{٩} \\ \frac{١}{٩} & \frac{٢}{٩} \end{bmatrix}$ (ب) $|أ| = ٥٢$ ، $أ^{-١} = \begin{bmatrix} \frac{١}{٢٦} & -\frac{٣}{١٣} \\ \frac{٣}{٥٢} & \frac{٢}{١٣} \end{bmatrix}$ (ج) $|أ| = -٣١$ ،

$أ^{-١} = \begin{bmatrix} \frac{٥}{٣١} & \frac{٤}{٣١} \\ -\frac{٤}{٣١} & \frac{٣}{٣١} \end{bmatrix}$ (د) $|أ| = -٢٤$ ، $أ^{-١} = \begin{bmatrix} \frac{١}{٨} & -\frac{١١}{٢٤} \\ ٠ & \frac{١}{٣} \end{bmatrix}$

٢) (أ) المحدد = ٢ك − ١٥ = ٠ ← **ك** = $\frac{١٥}{٢}$. (ب) عند ك = ٨: $|أ| = ١$ ، $|أ|^{٢} = ١$ ، $\begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٨ & ٥ \end{bmatrix}$

$ب = (أ^{٢})^{-١} = \begin{bmatrix} ١٩ & ٣٠ \\ ٧٩ & ٥٠ \end{bmatrix}^{-١} = \begin{bmatrix} ٧٩ & -٣٠ \\ ١٩ & -٥٠ \end{bmatrix}$

٣) $|أ| = ١٥$ ، $|أب| = -١$ ← $ج = أ^{-١} \times ب^{-١} = \begin{bmatrix} \frac{١}{٣} & \frac{١}{١٥}- \\ ٠ & \frac{١}{٥} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ١- & ١ \\ ٣ & ٢- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{٨}{١٥}- & \frac{٧}{١٥} \\ \frac{٣}{٥}- & \frac{٢}{٥} \end{bmatrix}$

خالد كمال
khaledkamah.surge.sh

٤) $|أ| = ١٨$ ، $أ^{-١} = \begin{pmatrix} \frac{١١}{١٨} & -\frac{٤}{٩} & \frac{٧}{١٨} \\ \frac{١}{١٨} & \frac{٢}{٩} & \frac{١}{١٨} \\ \frac{٢}{٩} & \frac{١}{٩} & -\frac{٢}{٩} \end{pmatrix}$

٥) (أ) $أ^{٢} = \begin{pmatrix} ٧ & ١٠ \\ ١٥ & ٢٢ \end{pmatrix}$. (ب) $٥م - أ = \begin{pmatrix} ٤- & ٢ \\ ١- & ٣ \end{pmatrix} \leftarrow |أ - ٥م| = \begin{pmatrix} ٢ & ٠ \\ ٠ & ٢ \end{pmatrix} = ٢م$. (ج) $أ^{٢} - ١٥ = ٢م \leftarrow أ \times (أ - ٥م) = ٠$ م $= \frac{١}{٢}(أ - ٥م) = أ^{-١} \leftarrow$ م $= \frac{١}{٢} \times (أ - ٥م)$ ، وهي نفسها $\begin{pmatrix} ١ & ٢- \\ \frac{١}{٢} & \frac{٣}{٢} \end{pmatrix}$.

$-\frac{١}{٢}\begin{pmatrix} ٤ & ٢- \\ ٣- & ١ \end{pmatrix}$.

٦) (أ) $أ^{٢} = \begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٤ \\ ٤ & ٢ & ٦ \\ ٢ & ٢ & ٢ \end{pmatrix}$ ، $|أ|^{٣} = \begin{pmatrix} ٥ & ٦ & ٨ \\ ٨ & ٨ & ١٦ \\ ٦ & ٤ & ٨ \end{pmatrix}$. (ب) ك = ٣ (تحقّق: المعادلة تعطي المصفوفة الصفرية). (ج) $|أ| = ٤$ ، $أ^{-١} = \begin{pmatrix} ٠ & \frac{١}{٢} & -\frac{١}{٢} \\ -\frac{١}{٢} & \frac{١}{٤} & \frac{٣}{٤} \\ \frac{١}{٢} & -\frac{١}{٤} & \frac{١}{٤} \end{pmatrix}$

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

٧) |ا| = ٥ ، |ب| = ٤ ، ج = ا$^{-١}$ × ب$^{-١}$ = $\begin{pmatrix} \frac{١}{٥} & -\frac{٢}{٥} & -\frac{٢}{٥} \\ \frac{١}{٥} & -\frac{١}{١٠} & -\frac{٣}{٢٠} \\ \frac{١}{٥} & -\frac{٢}{٥} & -\frac{١}{١٠} \end{pmatrix}$

٦-٤ استخدام المصفوفات في حل أنظمة المعادلات

نظام ثلاث معادلات خطية يُكتب ا س = ب حيث ا مصفوفة المعاملات و س مصفوفة المتغيرات و ب مصفوفة الثوابت. نكوّن المصفوفة المعززة [ا | ب] ونطبق عمليات الصف حتى نصل إلى صيغة أيشلون.

• **حل وحيد:** يظهر في الجزء الأيسر المبسّط صف لكل متغير (ثلاثة أصفار غير صفرية قطريًا). • **لا يوجد حل:** يظهر صف على الصورة ٠ ٠ ٠ | عدد ≠ ٠ (مثل ٠ = −١). • **عدد لا نهائي من الحلول:** يظهر صف أصفار كامل ٠ ٠ ٠ | ٠، فيبقى أقل من ثلاث معادلات مستقلة ونعبّر عن المتغيرات بدلالة متغير حر.

هندسيًا: المعادلات الثلاث ثلاثة مستويات. الحل الوحيد نقطة تقاطعها، وعدد الحلول اللانهائي يعني تقاطعها في مستقيم، ولا حل يعني أنها لا تتقاطع معًا.

تمارين ٦-٤

١) حدّد إن كان لكل نظام حل وحيد ثم أوجده: (أ) ٣س − ص = ٦ ، −٦س + ٢ص = −١٣
(ب) ٢س + ص = ٤ ، ٣س − ص = ٧ (ج) ٥س − ٤ص = ٢ ، ١٠س − ٨ص = ٤

٢) ا = $\begin{bmatrix} ٢ & ج \\ -٢ & ٣ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٣ \\ د \end{bmatrix}$ ، ا س = ب. أوجد قيمتي ج ، د عندما: (أ) لا يوجد حل (ب) يوجد عدد لا نهائي من الحلول (ج) يوجد حل وحيد.

٣) حدّد نوع الحل ثم أوجده: (أ) س + ٤ص − ٢ع = ٢ ، −٢س − ١٠ص − ٦ع = ٣ ، ٣س + ١٤ص + ٤ع = ٧ (ب) ٢س + ص + ع = ١ ، ٢س + ٣ص + ١٠ع = ٣ ، ٤س − ع = ١ (ج) س + ٥ص − ع = ١ ، ٢س + ٧ص − ٤ع = ٠ ، ٤س + ١١ص − ١٠ع = −٢

٤) في النظام س − ص = ١ ، ٢س − ص + ٥ع = ٤ ، س + ٢ص + ١٥ع = ك: أوجد ك ليكون عدد الحلول لا نهائيًا.

٥) أوجد نقطة تقاطع المستويات: س − ٤ص + ٤ع = ٣ ، س − ٧ص + ١١ع = ٤ ، ٢س − ٥ص + ٣ع = ٥

٦) أوجد نقطة تقاطع المستويات: س − ٦ص = ٢ ، ٢س + ٤ص − ١٧ع = ٤ ، ٣س + ١٢ص − ٣٣ع = ٦

٧) للنظام س + ص + ٣ع = ١ ، س − ٢ص + ٢ع = −١ ، ٣س + ٦ص + ل ع = ك: حدّد عدد الحلول عندما: (أ) ل = ٥ ، ك = ٥ (ب) ل = ١٠ ، ك = ١٠ (ج) ل = ١٠ ، ك = ٥

ورقة الإجابات النموذجية: تمارين ٦-٤

ملاحظة: الإجابات من حسابي لأن كتاب الطالب لا يتضمن مفتاح إجابات. المصفوفات في الكتاب مكتوبة بالاتجاه العربي: الصف يُقرأ من اليمين إلى اليسار، وكذلك في هذه المذكرة.

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

١) (أ) نضرب الأولى في ٢: ٦س − ٢ص = ١٢ ثم نجمع مع الثانية فنحصل ٠ = −١: **لا يوجد حل**. (ب) بالجمع ٥س = ١١ ← س = $\frac{١١}{٥}$ ، ص = $-\frac{٢}{٥}$: **حل وحيد**. (ج) المعادلة الثانية ضعف الأولى: **عدد لا نهائي من الحلول** ، ص = $\frac{٥س - ٢}{٤}$.

٢) المحدد = −٤ − ٣ج. (أ) −٤ − ٣ج = ٠ ← ج = $-\frac{٤}{٣}$ ، والمعادلة الثانية ٣س − ٢ص = د لا تتفق مع $\frac{٣}{٢}$ × الأولى (٣س − ٢ص = $\frac{٩}{٢}$) ← **د ≠ $\frac{٩}{٢}$**. (ب) ج = $-\frac{٤}{٣}$ ، **د = $\frac{٩}{٢}$**. (ج) **ج ≠ $-\frac{٤}{٣}$** وأي قيمة لـ د.

٣) (أ) بالاختزال يظهر الصف ٠ ٠ ٠ | ٨: **لا يوجد حل**. (ب) **حل وحيد**: س = $\frac{٧}{٢٤}$ ، ص = $\frac{١}{٤}$ ، ع = $\frac{١}{٦}$. (ج) يظهر صف أصفار كامل: **عدد لا نهائي من الحلول**: ع = ه (حر) ، س = $\frac{-٧ + ١٣ه}{٣}$ ، ص = $\frac{٢ - ٥ه}{٣}$.

ملاحظة: في ٣(ج) رمز المتغير الحر ه اختيار مني.

٤) ص + ٥ع = ٢ ، ثم المعادلة الثالثة − الأولى: ٣ص + ١٥ع = ك − ١ ← ٦ = ك − ١ ← **ك = ٧**.

٥) $(\frac{٥}{٣} ، -\frac{١}{٣} ، ٠)$

٦) **(٢ ، ٠ ، ٠)**

٧) (أ) ل = ٥ ، ك = ٥: **حل وحيد** $(\frac{١}{٣}\ ،\ \frac{٢}{٣}\ ،\ ٠)$. (ب) ل = ١٠ ، ك = ١٠: يظهر ٠ = ٥ ← **لا يوجد حل**. (ج) ل = ١٠ ، ك = ٥: صف أصفار كامل ← **عدد لا نهائي من الحلول**.

تمارين مراجعة نهاية الوحدة السادسة

١) إذا علمت أن ا = $\begin{bmatrix} ٦ & ٥ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} -١ & ٢ \\ ١ & -٤ \end{bmatrix}$ ، فأوجد: (أ) ج حيث ج × ب = ا + ا^{٢} (ب) د حيث ا × د × ب = م (م المصفوفة المحايدة)

٢) ا = $\begin{bmatrix} ١ & ٢ & أ \\ ٠ & ٢ & أ - ٣ \\ ١ & ٠ & أ + ٤ \end{bmatrix}$. (أ) أوجد قيمة أ إذا كانت المصفوفة منفردة. (ب) أوجد ا$^{-١}$ عندما أ = ٤.

٣) حدّد إن كانت كل مصفوفة منفردة أم لا: (أ) $\begin{bmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٢ & ٨ & ٧ \\ ١ & ١٠ & ١١ \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} ١ & ٢ & ١ \\ -١ & -٢ & ٠ \\ ٣ & ٦ & ٦ \end{bmatrix}$

٤) إذا كانت $\begin{bmatrix} -٣ & ١ \\ ٢ن & \sqrt{(م + ١)} \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} ١ & ٢ - س \\ ٥ & ن^{٢} + ١ \end{bmatrix}$ فأوجد قيمة كلًّا من: س ، ن ، م.

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

ورقة الإجابات النموذجية: مراجعة الوحدة ٦

ملاحظة: الإجابات من حسابي لأن كتاب الطالب لا يتضمن مفتاح إجابات. المصفوفات في الكتاب مكتوبة بالاتجاه العربي: الصف يُقرأ من اليمين إلى اليسار، وكذلك في هذه المذكرة.

١) $A^{٢} = \begin{bmatrix} ٤٦ & ٤٥ \\ ١٨ & ١٩ \end{bmatrix}$، $A + I = \begin{bmatrix} ٥٢ & ٥٠ \\ ٢٠ & ٢٢ \end{bmatrix}$، $|B| = ٢$، $B^{-١} = \begin{bmatrix} -١ & -٢ \\ -\frac{١}{٢} & \frac{١}{٢} \end{bmatrix}$. (أ) $ج = (A + I)^{٢}$

$C^{-١} = \begin{bmatrix} -٧٧ & -١٢٩ \\ -٣١ & -٥١ \end{bmatrix}$. (ب) $A \times د \times B = م \leftarrow د = A^{-١} B^{-١}$

$= \begin{bmatrix} \frac{٥}{٨} & -\frac{٣}{٨} \\ \frac{٣}{٤} & -\frac{١}{٤} \end{bmatrix}$.

٢) (أ) $|A| = ٢أ^{٢} + ٢ = ٠ \leftarrow$ **أ = −١**. (ب) عند أ = ٤: $|A| = ١٠$، $A^{-١} =$

$$\begin{bmatrix} \frac{٨}{٥} & -\frac{٨}{٥} & \frac{٣}{٥} \\ \frac{١}{١٠} & \frac{٢}{٥} & -\frac{١}{١٠} \\ -\frac{١}{٥} & \frac{١}{٥} & \frac{١}{٥} \end{bmatrix}$$

٣) (أ) المحدد = ٢٤ ≠ ٠ ← غير منفردة. (ب) المحدد = ٠ ← منفردة (العمود الثاني = ضعف العمود الأول).

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

٤) بالمساواة: ٢ − س = −٣ ← **س = ٥**. √(م + ١) = ٥ ← م + ١ = ٢٥ ← **م = ٢٤**. ٢ن = ن^{٢} + ١ ← (ن − ١)^{٢} = ٠ ← **ن = ١**.

ملاحظة: قرأت مصفوفات مراجعة الوحدة بالاتجاه العربي (الصف من اليمين إلى اليسار). في ٤ القراءة مدعومة بأن القيم الناتجة أعداد صحيحة (س = ٥ ، م = ٢٤ ، ن = ١). في ١ التحقق: ج × ب = ١ + ١^{٢}.

خالد كمال
khaled-math.surge.sh