الوحدة الخامسة: الهندسة الإحداثية

ستتعلّم في هذه الوحدة كيف:

٥-١ تحسب طول القطعة المستقيمة ، وتجد إحداثيات منتصفها.

٥-٢ تجد ميل مستقيم بمعلومية نقطتين ، وميل المستقيم العمودي عليه.

٥-٣ تجد معادلة المستقيم عند توفر المعلومات الكافية ، بما في ذلك معادلة المستقيمات المتوازية أو العمودية لمستقيم آخر.

٥-٤ تجد معادلة الدائرة (باستخدام الإكمال إلى مربّع عند الضرورة).

٥-٥ تستخدم طرقًا جبرية لحلّ مسائل تتضمّن المستقيمات والدوائر ، والعلاقة فيما بينها.

٥-٦ تجد مجموعة قيم ك حيث المستقيم ص = س + ك يتقاطع أو يماسّ أو لا يتقاطع مع منحنى الدالة التربيعية أو الدائرة.

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

ملاحظة: الدرس ٥-٦ مذكور في مقدمة الوحدة بالكتاب لكن صفحات الكتاب (١٣٧ إلى ١٦٤) لا تتضمن درسًا بهذا العنوان ؛ تنتهي الدروس عند ٥-٥ ، ولذلك لا يوجد ٥-٦ في هذه المذكرة.

معرفة قبلية

اختبر مهاراتك: ١) أوجد إحداثيات نقطة المنتصف وطول القطعة المستقيمة التي تصل بين (−٧ ، ٤) ، (−٢ ، −٨). ٢) (أ) أوجد ميل المستقيم المار بالنقطتين (−١ ، ٣) ، (٥ ، ٢) ؛ (ب) ميل المستقيم العمودي عليه. ٣) مستقيم معادلته ص = $\frac{٢}{٣}$ س − ٥ : اكتب ميله ، والجزء المقطوع من المحور الصادي ، والجزء المقطوع من المحور السيني. ٤) (أ) ضع $س^{٢}$ − ٨س − ٥ في صورة مربع كامل ؛ (ب) حلّ المعادلة $س^{٢}$ − ٨س − ٥ = ٠. ٥) ما قياس الزاوية المحدّدة في كل شكل (نظريات الدوائر)؟

المفردات

قطعة مستقيمة line segment • نقطة المنتصف midpoint • ميل المستقيم gradient • المستقيمات المتوازية parallel lines • المستقيمات المتعامدة perpendicular lines • مركز الدائرة centre • نصف قطر الدائرة radius • مماس الدائرة tangent • الصورة القياسية للدائرة standard form • الصورة العامة للدائرة general form

إجابة اختبر مهاراتك (من حسابي)

١) المنتصف = $(-\frac{٩}{٢}\ ،\ -٢)$ ، الطول = $\sqrt{٢٥ + ١٤٤} = ١٣$. ٢) (أ) الميل = $\frac{٣ - ٢}{(-١) - ٥} = -\frac{١}{٦}$ (ب) ميل العمودي = ٦. ٣) الميل $\frac{٢}{٣}$ ، الجزء المقطوع من الصادي −٥ ، ومن السيني ٧٫٥ (عند ص = ٠: س = $\frac{١٥}{٢}$). ٤) (أ) $(س - ٤)^{٢} - ٢١$ (ب) س = $٤ \pm \sqrt{٢١}$. ٥) (أ) ٩٠° (زاوية في نصف دائرة) ، (ب) ٩٠° (القطر العمودي على الوتر ينصفه) ، (ج) ٩٠° (المماس عمودي على نصف القطر).

ملاحظة: الأشكال الثلاثة في الكتاب فيها زوايا قائمة ؛ تأكّد من الأشكال في الكتاب.

١-٥ طول القطعة المستقيمة وإحداثيات نقطة منتصفها

سبق أن درست في الصف التاسع كيف تجد إحداثيات نقطة المنتصف م للقطعة المستقيمة و ل التي تصل بين النقطتين و$(س_١ ، ص_١)$ ، ل$(س_٢ ، ص_٢)$ ، وطولها.

نتيجة ١

إحداثيات منتصف القطعة و ل: م = $(\frac{س_١ + س_٢}{٢}\ ،\ \frac{ص_١ + ص_٢}{٢})$

طول القطعة و ل = $\sqrt{(س_٢ - س_١)^{٢} + (ص_٢ - ص_١)^{٢}}$

مساعدة: من المهم أن العمليات الحسابية المناسبة في أسئلة الهندسة الإحداثية لا يمكن الاعتماد فيها على الرسم لعدم دقة قياس الرسم.

مثال ١

إذا علمت أن النقطة م($\frac{٣}{٢}$ ، −١١) هي منتصف القطعة المستقيمة و(−٧ ، ٤) ، ل(أ ، ب) ، فأوجد قيمتَي أ ، ب.

الحلّ: نحدّد القيم: (س١ ، ص١) = (−٧ ، ٤) ، (س٢ ، ص٢) = (أ ، ب). بمساواة الإحداثي السيني: $\frac{-٧ + أ}{٢} = \frac{٣}{٢}$ ← −٧ + أ = ٣ ← **أ = ١٠**.

بمساواة الإحداثي الصادي: $\frac{٤ + ب}{٢}$ = −١١ ← ٤ + ب = −٢٢ ← **ب = −٢٦**. إذن أ = ١٠ ، ب = −٢٦.

مثال ٢

متوازي أضلاع ا ب ج و إحداثيات ثلاثة من رؤوسه هي ا(−٥ ، −١) ، ب(−١ ، −٤) ، ج(٦ ، −٢). أوجد: (أ) إحداثيات نقطة منتصف القطعة ا ج. (ب) إحداثيات الرأس و.

الحلّ: (أ) منتصف ا ج = ($\frac{-٥ + ٦}{٢}$ ، $\frac{-١ + (-٢)}{٢}$) = ($\frac{١}{٢}$ ، $-\frac{٣}{٢}$).

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

مثال ٢ (تابع)

(ب) قطرا متوازي الأضلاع ينصف كل منهما الآخر ، فمنتصف ب و هو منتصف ا ج نفسه. نفرض و(م ، ن): $\frac{-١ + م}{٢} = \frac{١}{٢} \leftarrow م = ٢$ ؛ $\frac{-٤ + ن}{٢} = -\frac{٣}{٢} \leftarrow ن = ١$.

و(٢ ، ١).

مثال ٣

إذا علمت أن المسافة بين النقطتين و(−٢ ، أ) ، ل(أ − ٢ ، −٧) تساوي ١٧ ، فأوجد قيمتَي أ.

الحلّ: الطول = $\sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$ = ١٧ ← $(أ - ٧-)^٢ + أ^٢$ = ٢٨٩

(بتربيع الطرفين ؛ لأن (أ − ٢) − (−٢) = أ) ← $أ^٢ + ٤٩ + ١٤أ + أ^٢$ = ٢٨٩ ← $٢أ^٢ + ١٤أ -$ ٢٤٠ = ٠ ← $أ^٢ + ٧أ - ١٢٠$ = ٠ ← (أ − ٨)(أ + ١٥) = ٠ ← **أ = ٨ أو أ = −١٥**.

استكشاف ١

في الشكل مثلث أطوال أضلاعه $٧\sqrt{٢}$ سم ، $٣\sqrt{١٤}$ سم ، $٣\sqrt{٥}$ سم. يدّعي تركي أن هذا المثلث قائم الزاوية. ناقش ما إذا كان ما يدّعيه تركي صائبًا أم لا. فسّر إجابتك.

*إجابة الاستكشاف (من حسابي): مربعات الأطوال: (٢√٧)² = ٢٨ ، (٤√٣)² = ٤٨ ، (٥√٣)² = ٧٥. ٢٨ + ٤٨ = ٧٦ ≠ ٧٥ ← حسب عكس نظرية فيثاغورث المثلث **ليس** قائم الزاوية (الفرق صغير جدًّا لكن النتيجة لا تتحقق) ، فادّعاء تركي غير صائب.*

تمارين ٥-١

١) في كل حالة من الحالتين الآتيتين ، احسب طول كل ضلع من أضلاع المثلث و ل ر ، ثم استخدم إجاباتك لتحدد ما إذا كان المثلث قائم الزاوية أم لا:

أ و(−٤ ، ٦) ، ل(١ ، ٦) ، ر(٢ ، ٩).

ب و(−٥ ، ٢) ، ل(٩ ، ٣) ، ر(−٢ ، ٨).

٢) إذا علمت أن رؤوس المثلث هي: و(١ ، ٦) ، ل(−٢ ، ١) ، ر(٣ ، −٢) ، فبيّن أن المثلث و ل ر قائم الزاوية ومتطابق الضلعَين ، ثم احسب مساحته.

٣) إذا علمت أن المسافة بين النقطتين و(أ ، −١) ، ل(−٥ ، أ) تساوي ٤√٥ ، فأوجد القيمتين الممكنتين لـ أ.

٤) إذا علمت أن المسافة بين النقطتين و(−٣ ، −٢) ، ل(ب ، ٢ب) تساوي ١٠ ، فأوجد القيمتين الممكنتين لـ ب.

٥) النقطة (−٢ ، −٣) هي منتصف القطعة المستقيمة التي تصل بين و(−٦ ، −٥) ، ل(أ ، ب). أوجد قيمتَي أ ، ب.

٦) متوازي الأضلاع ا ب ج و إحداثيات ثلاثة من رؤوسه هي: ا(−٧ ، ٣) ، ب(−٣ ، −١١) ، ج(٣ ، −٥). أوجد:

أ إحداثيات نقطة منتصف القطعة المستقيمة ا ج.

ب إحداثيات الرأس و.

ج طول كل من القطرَين: ا ج ، ب و.

٧) ★ تقع النقطة و(ك ، ٢ك) على مسافة واحدة من النقطتين ا(٨ ، ١١) ، ب(١ ، ١٢). إذا علمت أن النقاط ا ، ب ، و لا تقع على استقامة واحدة ، فأوجد قيمة ك.

٨) المثلث ا ب ج إحداثيات رؤوسه ا(−٦ ، ٣) ، ب(٣ ، ٥) ، ج(١ ، −٤). بيّن أن المثلث ا ب ج متطابق الضلعَين ، وأوجد مساحته.

٩) المثلث ا ب ج إحداثيات رؤوسه ا(−٧ ، ٨) ، ب(٣ ، ك) ، ج(٨ ، ٥). أوجد قيمة ك إذا علمت أن طول ا ب = ٢ × طول ب ج.

١٠) يتقاطع المستقيم س + ص = ٤ ، والمنحنى ص = ٨ − $\frac{٥}{\text{س}}$ في النقطتين ا ، ب. أوجد إحداثيات نقطة منتصف القطعة المستقيمة ا ب.

١١) يتقاطع المستقيم ص = س − ٣ ، والمنحنى ص^{٢} = ٤س في النقطتين ا ، ب:

أ أوجِد إحداثيات نقطة منتصف القطعة المستقيمة ا ب.

ب أوجِد طول القطعة المستقيمة ا ب.

١٢) ★ في المثلث ا ب ج ، إحداثيات نقاط منتصف الأضلاع ا ب ، ب ج ، ا ج هي: (١ ، ٤) ، (٢ ، ٠) ، (−٤ ، ١) على الترتيب. أوجد إحداثيات الرؤوس ا ، ب ، ج.

ورقة الإجابات النموذجية: تمارين ٥-١

ملاحظة: الإجابات من حسابي لأن كتاب الطالب لا يتضمن مفتاح إجابات.

١) (أ) و ل = ٥ ، ل ر = $\sqrt{١٠}$ ، و ر = $\sqrt{٤٥}$ = $٣\sqrt{٥}$ ؛ ٢٥ + ١٠ = ٣٥ ≠ ٤٥ ← **غير قائم الزاوية**. (ب) و ل = $\sqrt{١٩٧}$ ، ل ر = $\sqrt{١٤٦}$ ، و ر = $\sqrt{٤٥}$ = $٣\sqrt{٥}$ ؛ ١٤٦ + ٤٥ = ١٩١ ≠ ١٩٧ ← **غير قائم الزاوية**.

٢) و ل^{٢} = ٩ + ٢٥ = ٣٤ ، ل ر^{٢} = ٢٥ + ٩ = ٣٤ ، و ر^{٢} = ٤ + ٦٤ = ٦٨. و ل = ل ر (متطابق الضلعين) ، و٣٤ + ٣٤ = ٦٨ ← قائم الزاوية عند ل. المساحة = $\frac{١}{٢}$ × $\sqrt{٣٤}$ × $\sqrt{٣٤}$ = **١٧ وحدة مربعة**.

٣) (أ + ٥)^{٢} + (−١ − أ)^{٢} = ٨٠ ← ٢أ^{٢} + ١٢أ + ٢٦ = ٨٠ ← أ^{٢} + ٦أ − ٢٧ = ٠ ← (أ − ٣)(أ + ٩) = ٠ ← **أ = ٣ أو أ = −٩**.

٤) (ب + ٣)^{٢} + (٢ب + ٢)^{٢} = ١٠٠ ← ٥ب^{٢} + ١٤ب − ٨٧ = ٠ ← (ب − ٣)(٥ب + ٢٩) = ٠ ← **ب = ٣ أو ب = −٥٫٨** (أي $-\frac{٢٩}{٥}$).

٥) $-٢ = \frac{-٦ + أ}{٢}$ ← أ = ٢ ؛ $-٣ = \frac{-٥ + ب}{٢}$ ← ب = $-ا$. **أ = ٢ ، ب = $-ا$.**

٦) (أ) (٢− ، $-ا$). (ب) منتصف ب و = منتصف ا ج ← $\frac{-٣ + م}{٢} = -٢$ ← م = $-ا$ ؛

$\frac{-١١ + ن}{٢} = -ا$ ← ن = ٩ ← **و(١− ، ٩)**. (ج) ا ج = $\sqrt{١٦٤} = ٢\sqrt{٤١} \approx ١٢,٨١$ ، ب و = $\sqrt{٤٠٤} = ٢\sqrt{١٠١} \approx ٢٠,١$

٧) $(ك - ٨)^٢ + (٢ك - ١١)^٢ = (ك - ا)^٢ + (٢ك - ١٢)^٢$ ← $٥ك^٢ - ٦٠ك + ١٨٥ = ٥ك^٢ - ٥٠ك$ + ١٤٥ ← $-١٠ك = -٤٠$ ← **ك = ٤** ، و(٤ ، ٨) ، والنقاط ا ، ب ، و ليست على استقامة واحدة (ميل ا ب = $-\frac{ا}{٧}$ ، ميل ا و = $\frac{٣}{٤}$).

٨) $ا ب^٢ = ٨١ + ٤ = ٨٥$ ، $ب ج^٢ = ٤ + ٨١ = ٨٥$ ← ا ب = ب ج = $\sqrt{٨٥}$ (متطابق الضلعين). $ا ج^٢ = ٤٩ + ٤٩ = ٩٨$. المساحة = $\frac{ا}{٢}|-٦(٥ + ٤) + ٣(-٤ - ٣) + ا(٣ - ٥)| = \frac{٧٧}{٢}$ = **٣٨,٥ وحدة مربعة**.

٩) $ا ب^٢ = ١٠٠ + (ك - ٨)^٢$ ، $ب ج^٢ = ٢٥ + (ك - ٥)^٢$ ؛ $ا ب^٢ = ٤ ب ج^٢$ ← $٣ك^٢ - ٢٤ك + ٣٦$ = ٠ ← $ك^٢ - ٨ك + ١٢ = ٠$ ← **ك = ٢ أو ك = ٦**.

١٠) س + ٨ − $\frac{٥}{س}$ = ٤ ← $س^٢ + ٤س - ٥ = ٠$ ← س = ١ أو ٥− ← ا(١ ، ٣) ، ب(٥− ، ٩). المنتصف = **(٢− ، ٦)**.

١١) $(س - ٣)^٢ = ٤س$ ← $س^٢ - ١٠س + ٩ = ٠$ ← س = ١ أو ٩ ← ا(١ ، ٢−) ، ب(٩ ، ٦). (أ) المنتصف = **(٥ ، ٢)**. (ب) ا ب = $\sqrt{٦٤ + ٦٤} = ٨\sqrt{٢} \approx ١١,٣١$

١٢) مجموع الرؤوس كلها = ٢ × (مجموع نقاط المنتصف) ؛ ا = م١ ب + م١ ج − م٢ ب ج = (ا − ٤ − ٢ ، ٤ + ا − ٠) = **(٥− ، ٥)** ، ب = م١ ب + م٢ ب ج − م١ ج = (ا + ٢ + ٤ ، ٤ + ٠ − ا) = **(٧ ، ٣)** ، ج = م٢ ب ج + م١ ج − م١ ب = (٢ − ٤ − ا ، ٠ + ا − ٤) = **(٣− ، ٣−)**.

٢-٥ المستقيمات المتوازية والمستقيمات المتعامدة

سبق أن درست في الصف التاسع كيف توجد ميل مستقيم يصل بين النقطتين و(س١ ، ص١) ، هـ(س٢ ، ص٢).

نتيجة ٢

$$\text{ميل المستقيم و هـ} = \frac{\text{ص}_٢ - \text{ص}_١}{\text{س}_٢ - \text{س}_١}$$

المستقيمات المتوازية: إذا توازى مستقيمان (ل١ // ل٢) فإن ميليهما متساويان.

المستقيمات المتعامدة: إذا تعامد مستقيمان (ل١ ⊥ ل٢) وكان ميل ل١ هو م ، فإن ميل ل٢ يساوي $-\frac{١}{\text{م}}$.

نتيجة ٣

إذا كان م١ ميل المستقيم الأول ، م٢ ميل المستقيم الثاني ، فإن:

- م١ = م٢ إذا كان المستقيمان متوازيين.
- م١ × م٢ = −١ إذا كان المستقيمان متعامدين.

مثال ٤

إحداثيات ثلاث نقاط هي: ا(ك − ٥ ، −١٥) ، ب(١٠ ، ك) ، ج(٦ ، −ك). أوجد قيم ك الممكنة إذا علمت أن النقاط ا ، ب ، ج تقع على استقامة واحدة.

الحلّ: إذا كانت ا ، ب ، ج على استقامة واحدة فميل ا ب = ميل ب ج:

$$\frac{ك - (-١٥)}{١٠ - (ك - ٥)} = \frac{-ك - ك}{٦ - ١٠} \leftarrow \frac{ك}{٢} = \frac{ك + ١٥}{ك - ١٥} \leftarrow ٢(ك + ١٥) = ك(ك - ١٥) \leftarrow$$

$$٢ك + ٣٠ = ١٥ك - ك^{٢} \leftarrow ك^{٢} - ١٣ك + ٣٠ = ٠ \leftarrow (ك - ٣)(ك - ١٠) = ٠ \leftarrow \textbf{ك = ٣ أو ك = ١٠}.$$

مثال ٥

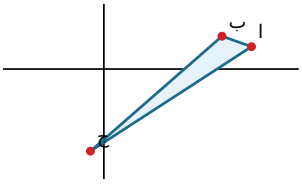
إحداثيات ثلاثة رؤوس لمثلث هي: ا(١١ ، ٣) ، ب(٢ك ، ك) ، ج(−١ ، −١١). (أ) أوجد قيم ك الممكنة إذا كان قياس ∠ا ب ج يساوي ٩٠°. (ب) ارسم شكلًا يبيّن المثلثات الممكنة.

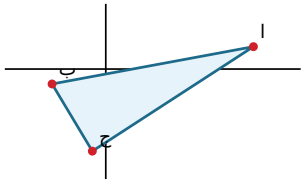
الحلّ: (أ) ميل ا ب × ميل ب ج = −١: $\frac{ك - ٣}{٢ك - ١١} \times \frac{-١١ - ك}{-١ - ٢ك} = -١ \leftarrow (ك - ٣)(ك + ١١) = -(٢ك - ١١)$

$(٢ك + ١) \leftarrow ك^{٢} + ٨ك - ٣٣ = -٤ك^{٢} + ٢٠ك + ١١ \leftarrow ٥ك^{٢} - ١٢ك - ٤٤ = ٠ \leftarrow (٥ك - ٢٢)(ك + ٢) = ٠$

$\leftarrow$ **ك = ٤,٤ أو ك = −٢**.

(ب) إذا كان ك = ٤,٤ فإن ب(٨,٨ ، ٤,٤) ؛ وإذا كان ك = −٢ فإن ب(−٤ ، −٢). المثلثان الممكنان في الشكل.





تمارين ٥-٢

١) إحداثيات ثلاث نقاط هي ا(−٦ ، ٤) ، ب(٤ ، ٦) ، جـ(١٠ ، ٧).

أ أوجِد ميل كل من: ا ب ، ب جـ.

ب استخدم إجابتك في الجزئية (أ) لتحدد ما إذا كانت النقاط ا ، ب ، جـ تقع على استقامة واحدة أم لا.

٢) إذا علمت أن م نقطة منتصف المسافة بين و(−٤ ، ٥) ، ل(٦ ، ١) ، فبيّن أن م ر ⊥ و ل حيث ر(−٣ ، −٧).

٣) مستطيل ا ب جـ و إحداثيات رأسَين من رؤوسه هما: ا(−٦ ، −٤) ، ب(٤ ، −٨). أوجِد ميل كل من: جـ و ، ب جـ.

٤) شبه المنحرف ا ب جـ و إحداثيات ثلاثة من رؤوسه هي: ا(٣ ، ٥) ، ب(−٥ ، ٤) ، جـ(١ ، −٥). ا و // ب جـ ، ق(ا و جـ) = ٩٠°. أوجِد إحداثيات النقطة و.

٥) إحداثيات ثلاث نقاط هي: ا(٥ ، ٨) ، ب(ك ، ٥) ، جـ(−ك ، ٤). أوجِد قيمة ك إذا علمت أن النقاط ا ، ب ، جـ تقع على استقامة واحدة.

٦) إحداثيات رؤوس المثلث ا ب جـ هي: ا(−٩ ، ٢ك − ٨) ، ب(٦ ، ك) ، جـ(ك ، ١٢). أوجِد قيمتَي ك الممكنتين إذا كان ق(ا ب جـ) = ٩٠°.

٧) إحداثيات النقطة ا هي (٠ ، ٨) ، وإحداثيات النقطة ب هي (٨ ، ٦). أوجِد إحداثيات النقطة جـ الواقعة على المحور الصادي بحيث يكون ق(ا ب جـ) = ٩٠°.

خالد كمال
khaled-math-page.sh

٨) إحداثيات ثلاث نقاط هي: ا(٧ ، ٤) ، ب(١٩ ، ٨) ، ج(ك ، ٢ك). أوجِد قيمة ك في كل حالة من الحالات الآتية:

أ تقع النقطة ج على المستقيم الذي يمرّ بالنقطتين ا ، ب.

ب ∠(ج ا ب) = ٩٠°.

٩) يقطع المستقيم $\frac{\text{س}}{\text{أ}} - \frac{\text{ص}}{\text{ب}} = ١$ المحور السيني في النقطة و ، والمحور الصادي في النقطة ل ، وكان ميل و ل يساوي $\frac{٢}{٥}$ ، وطول و ل = $٢\sqrt{٢٩}$ ، فأوجِد قيمة كلٍّ من أ ، ب (علمًا بأن أ ، ب عددان موجبان).

١٠) إذا علمت أن إحداثيات النقطة و هي (أ ، أ − ٢) ، وإحداثيات النقطة ل هي (٤ − ٣أ ، −أ) ، فأوجِد:

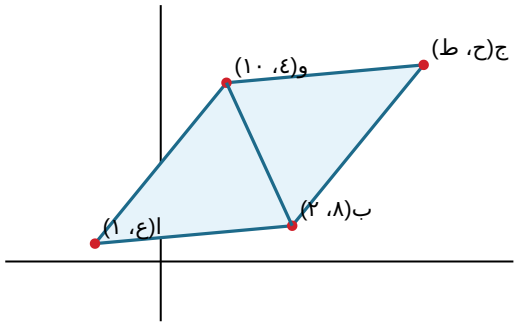
أ ميل المستقيم و ل.

ب ميل المستقيم العمودي على المستقيم و ل.

ج قيم أ الممكنة إذا علمت أن طول و ل = $١٠\sqrt{٥}$.

١١) في الشكل أدناه ا ب ج و معيّن ، م نقطة منتصف القطعة المستقيمة ب و. أوجِد: (أ) إحداثيات النقطة م. (ب) قيمة كلّ من: ع ، ح ، ط. (ج) محيط المعيّن. (د) مساحة المعيّن. [ا(ع ، ١) ، ب(٨ ، ٢) ، ج(ح ، ط) ، و(٤ ، ١٠)]

مساعدة: مساحة المعيّن تساوي نصف حاصل ضرب طولَي القطرين.



ورقة الإجابات النموذجية: تمارين ٥-٢

ملاحظة: الإجابات من حسابي لأن كتاب الطالب لا يتضمن مفتاح إجابات.

١) (أ) ميل ا ب = $\frac{٤ - ٦}{(-٦) - ٤} = \frac{١}{٥}$ ، ميل ب ج = $\frac{٦ - ٧}{٤ - ١٠} = \frac{١}{٦}$. (ب) الميلان مختلفان ← النقاط **ليست** على استقامة واحدة.

٢) م = $(\frac{-٤ + ٦}{٢} ، \frac{٥ + ١}{٢}) = (١ ، ٣)$. ميل م ر = $\frac{-٧ - ٣}{-٣ - ١} = \frac{٥}{٢}$ ، ميل و ل = $\frac{١ - ٥}{٦ - (-٤)} = -\frac{٢}{٥}$. الجداء = −١ ← م ر ⊥ و ل ✓.

٣) ميل ا ب = $\frac{-٨ + ٤}{٤ + ٦} = -\frac{٢}{٥}$. و ج // ا ب ← ميل ج و = $-\frac{٢}{٥}$ ؛ ب ج ⊥ ا ب ← ميل ب ج = $\frac{٥}{٢}$.

٤) ميل ب ج = $\frac{-٥ - ٤}{(-٥) - ١} = -\frac{٣}{٢}$ = ميل ا و (لأن ا و // ب ج). و ج ⊥ ا و ← ميل و ج = $\frac{٢}{٣}$. ا و: ص − ٥ = $-\frac{٣}{٢}$ (س − ٣) ، و ج: ص + ٥ = $\frac{٢}{٣}$ (س − ١). بحلّهما: س = ٧ ، ص = −١ ← **و(٧ ، −١)**.

٥) ميل ا ب = $\frac{-٣}{ك - ٥}$ ، ميل ا ج = $\frac{-٤}{-ك - ٥} = \frac{٤}{ك + ٥}$ ← −٣(ك + ٥) = ٤(ك − ٥) ← −٣ك − ١٥ = ٤ك − ٢٠ ← **ك** = $\frac{٥}{٧}$.

٦) ميل ب ا × ميل ب ج = −١: $\frac{(٢ك - ٨) - ك}{-٩ - ٦} \times \frac{١٢ - ك}{ك - ٦}$ = −١ ← (ك − ٨)(١٢ − ك) = ١٥(ك − ٦) ← −ك^{٢} + ٢٠ك − ٩٦ = ١٥ك − ٩٠ ← ك^{٢} − ٥ك + ٦ = ٠ ← **ك = ٢ أو ك = ٣**.

٧) ج(٠ ، ص): ميل ب ا = $\frac{٦ - ٨}{٨ - ٠} = -\frac{١}{٤}$ ؛ ميل ب ج = $\frac{ص - ٦}{-٨} = \frac{٦ - ص}{٨}$. الجداء = −١ ← $\frac{٦ - ص}{٣٢}$ = ١ ← ص = −٢٦ ← **ج(٠ ، −٢٦)**.

٨) ميل ا ب = $\frac{٨ - ٤}{١٩ - ٧} = \frac{١}{٣}$. (أ) ميل ا ج = ميل ا ب ← $\frac{٢ك - ٤}{ك - ٧} = \frac{١}{٣}$ ← ٦ك − ١٢ = ك − ٧ ← **ك = ١**. (ب) ميل ا ج = −٣ ← ٢ك − ٤ = −٣ك + ٢١ ← **ك = ٥**.

٩) و(أ ، ٠) ، ل(٠ ، −ب): ميل و ل = $\frac{-ب}{-أ} = \frac{ب}{أ} = \frac{٢}{٥}$ ← ب = $\frac{٢أ}{٥}$. الطول^{٢} = أ^{٢} + ب^{٢} = ١١٦ ← أ^{٢}(١ + $\frac{٤}{٢٥}$) = ١١٦ ← أ^{٢} = ١٠٠ ← **أ = ١٠ ، ب = ٤**.

١٠) (أ) ميل و ل = $\frac{-أ - (أ - ٢)}{أ - (أ٣ - ٤)} = \frac{٢ - أ٢}{٤ - أ٤} = \frac{١}{٢}$ (أ ≠ ١). (ب) ميل العمودي = -٢.

(ج) $(٤ - أ٤)^{٢} + (٢ - أ٢)^{٢} = ٢٠(١ - أ)^{٢} = ٥٠٠ \leftarrow ٢٥ = (١ - أ)^{٢}$ ← **أ = ٦ أو أ = -٤**.

١١) (أ) م = $(\frac{٤ + ٨}{٢}\ ،\ \frac{٢ + ١٠}{٢})$ = **(٦ ، ٦)**. (ب) ميل ب و = $\frac{١٠ - ٢}{٨ - ٤} = ٢$؛ القطران متعامدان ← ميل ا ج = $\frac{١}{٢}$ ، وا ج تمرّ بـ م(٦ ، ٦) و ا(ع ، ١): $\frac{٦ - ١}{٦ - ع} = \frac{١}{٢} \leftarrow$ **ع = -٤**.

م منتصف ا ج: $\frac{-٤ + ح}{٢} = ٦ \leftarrow$ **ح = ١٦**؛ $\frac{١ + ط}{٢} = ٦ \leftarrow$ **ط = ١١**. (ج) ا ب = $\sqrt{١٤٤ + ١} = \sqrt{١٤٥}$ ← المحيط = $٤\sqrt{١٤٥} \approx$ **٤٨,١٧**. (د) ا ج = $\sqrt{٥٠٠} = ١٠\sqrt{٥}$ ، ب و = $\sqrt{٨٠} = ٤\sqrt{٥}$ ← المساحة = $\frac{١}{٢} \times ١٠\sqrt{٥} \times ٤\sqrt{٥} =$ **١٠٠ وحدة مربعة**.

٣-٥ معادلة الخط المستقيم

درست في الصف التاسع معادلة المستقيم ص = م س + جـ ، حيث م الميل ، جـ الجزء المقطوع من المحور الصادي. توجد صيغة بديلة يمكن استخدامها عندما نعرف ميل المستقيم وإحداثيات نقطة واقعة عليه.

افترض أن المستقيم الذي ميله م يمرّ بالنقطة (س١ ، ص١) ، ولتكن (س ، ص) أيّة نقطة عليه. الميل م = $\frac{\text{ص} - \text{ص}_١}{\text{س} - \text{س}_١}$ ، نضرب طرفي المعادلة في (س − س١) فيكون:

ص − ص١ = م(س − س١).

نتيجة ٤

معادلة المستقيم الذي ميله م ، ويمرّ بالنقطة (س١ ، ص١) هي: ص − ص١ = م(س − س١)

مثال ٦

أوجِد معادلة المستقيم الذي ميله −٢ ، ويمرّ بالنقطة (٤ ، ١).

الحلّ: نستخدم ص − ص١ = م(س − س١) حيث م = −٢ ، س١ = ٤ ، ص١ = ١ ← ص − ١ = −٢(س − ٤) ← ص − ١ = −٢س + ٨ ← **٢س + ص = ٩**.

مثال ٧

أوجِد معادلة المستقيم الذي يمرّ بالنقطتين (−٤ ، ٣) ، (٦ ، −٢).

الحلّ: الميل م = $\frac{\text{ص}_٢ - \text{ص}_١}{\text{س}_٢ - \text{س}_١}$ = $\frac{-٢ - ٣}{٦ - (-٤)}$ = $-\frac{١}{٢}$. باستخدام ص − ص١ = م(س − س١) مع (−٤ ، ٣): ص − ٣ = $-\frac{١}{٢}$(س + ٤) ← ٢ص − ٦ = −س − ٤ ← **س + ٢ص = ٢**.

مثال ٨

أوجِد معادلة العمود المنصّف للقطعة المستقيمة التي تصل بين ا(−٥ ، ١) ، ب(٧ ، −٢).

الحلّ: ميل ا ب = $\frac{-٢ - ١}{٧ - (-٥)} = -\frac{٣}{١٢} = -\frac{١}{٤}$. ميل العمودي عليه = ٤ (م١ × م٢ = −١). منتصف ا ب = $(\frac{-٥ + ٧}{٢} ، \frac{١ + (-٢)}{٢}) = (١ ، -\frac{١}{٢})$. المعادلة: ص + $\frac{١}{٢}$ = ٤(س − ١) ← ٢ص + ١ = ٨س − ٨ ← **٢ص = ٨س − ٩**.

تمارين ٥-٣

١) أوجِد معادلة المستقيم الذي:

أ ميله ٢ ، ويمرّ بالنقطة (٤ ، ٩).

ب ميله −٣ ، ويمرّ بالنقطة (١ ، −٤).

ج ميله $-\frac{٢}{٣}$ ، ويمرّ بالنقطة (−٤ ، ٣).

٢) أوجِد معادلة المستقيم الذي يمرّ بالنقطتين في كل ممّا يأتي:

أ (١ ، ٠) ، (٥ ، ٦).

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

ب (٣ ، −٥) ، (−٢ ، ٤).

ج (٣ ، −١) ، (−٣ ، −٥).

٣) أوجِد معادلة المستقيم الذي:

أ يوازي المستقيم ص = ٣س − ٥ ، ويمرّ بالنقطة (١ ، ٧).

ب يوازي المستقيم س + ٢ص = ٦ ، ويمرّ بالنقطة (٤ ، −٦).

ج يعامد المستقيم ص = ٢س − ٣ ، ويمرّ بالنقطة (٦ ، ١).

د يعامد المستقيم ٢س − ٣ص = ١٢ ، ويمرّ بالنقطة (٨ ، −٣).

٤) أوجِد معادلة المستقيم العمودي المنصّف للقطعة المستقيمة التي تصل بين النقطتين:

أ (٥ ، ٢) ، (−٣ ، ٦).

ب (−٢ ، −٥) ، (٨ ، ١).

ج (−٢ ، −٧) ، (٥ ، −٤).

٥) ل١ ، ل٢ مستقيمان متوازيان بحيث يمرّ المستقيم ل١ بالنقطتين و(−١٠ ، ١) ، ع(٢ ، ١٠) ، والمستقيم ل٢ بالنقطة (٤ ، −١). إذا علمت أن النقطة ر تقع على المستقيم ل٢ بحيث يكون ر ع عموديًّا على المستقيم ل٢ ، فأوجِد إحداثيات النقطة ر.

٦) إحداثيات النقطة د هي (−٤ ، ٢) ، وإحداثيات النقطة ع هي (٥ ، −٤). رُسم من النقطة د المستقيم ل العمودي على د ع ، ويقطع المحور الصادي في النقطة ر. أوجِد:

أ معادلة المستقيم ل.

ب إحداثيات النقطة ر.

ج مساحة المثلث د ع ر.

ملاحظة: الحرف الأول من الاسم في السؤال (٥) و(٦) مقروء من شكل صغير في الكتاب (ر ، د) ؛ المعنى الرياضي لا يتغيّر.

٧) معادلة المستقيم ل١ هي ٣س − ٢ص = ١٢ ، ومعادلة المستقيم ل٢ هي ص = ١٥ − ٢س ، ويتقاطع المستقيمان ل١ ، ل٢ في النقطة ا. أوجِد:

أ إحداثيات النقطة ا.

ب معادلة المستقيم الذي يمرّ بالنقطة ا ، ويكون عموديًّا على المستقيم ل١.

٨) العمودي المنصّف للمستقيم الواصل بين النقطتين ا(−١٠ ، ٥) ، ب(−٢ ، −١) يقطع المحور السيني في النقطة د ، ويقطع المحور الصادي في النقطة ل. أوجِد:

أ معادلة المستقيم د ل.

ب إحداثيات النقطة د ، والنقطة ل.

ج طول القطعة المستقيمة د ل.

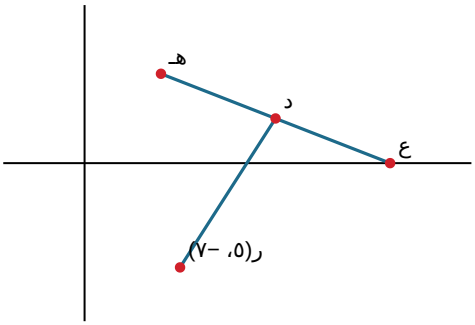
٩) معادلة المستقيم ل١ هي ٢س + ٥ص = ١٠. يمرّ المستقيم ل٢ بالنقطة ا(−٩ ، −٦) ويكون عموديًّا على المستقيم ل١.

أ أوجِد معادلة المستقيم ل٢.

ب إذا علمت أن المستقيمَين ل١ ، ل٢ يتقاطعان في النقطة ب ، فأوجِد مساحة المثلث ا ب و حيث و نقطة الأصل.

١٠) ★ يبيّن الشكل أدناه النقاط هـ ، د ، ع الواقعة على المستقيم س + ٢ص = ١٦ ، تقع النقطة ع على المحور السيني ، كما أن هـ د = د ع ، والمستقيم د ر عمودي على المستقيم هـ ع ، حيث ر(٥ ، −٧). أوجِد إحداثيات النقطتين هـ ، د.

خالد كمال
khaled-math.edu



ملاحظة: في الكتاب اسم النقطة (٥ ، −٧) غير واضح وقد سمّيتها ر ؛ وموقعها في الشكل: أسفل المحور السيني وعلى يمين المحور الصادي ، لذلك إحداثياتها (٥ ، −٧).

١١) إحداثيات ثلاث نقاط هي: ا(−٤ ، −١) ، ب(٨ ، −٩) ، ج(ك ، ٧). م منتصف ا ب ، والمستقيم م ج عمودي على المستقيم ا ب. أوجِد قيمة ك.

١٢) النقطة و صورة للنقطة (−٢ ، ١٠) بالانعكاس حول المستقيم ٤س − ٣ص = ١٢. أوجِد إحداثيات النقطة و.

١٣) إحداثيات رؤوس المثلث ا ب ج هي: ا(−٧ ، ٣) ، ب(٣ ، −٧) ، ج(٨ ، ٨). و نقطة تقاطع العمود النازل من ب على المستقيم ا ج. أوجِد:

أ معادلة المستقيم ب و.

ب إحداثيات النقطة و.

ج طول كل من: ا ج ، ب و.

د مساحة المثلث ا ب ج ، مستخدمًا إجابتك في الجزئية (ج).

١٤) إذا علمت أن إحداثيات رؤوس المثلث و ل ر هي: و(١ ، ١) ، ل(١ ، ٨) ، ر(٦ ، ٦) ، فأوجِد:

أ معادلة العمود المنصّف للقطعة المستقيمة: (١) و ل (٢) و ل.

ب إحداثيات النقطة م التي تقع على مسافات متساوية من النقاط و ، ل ، ر.

١٥) ★ إذا علمت أن معادلتَي ضلعَين من أضلاع المثلث ا ب ج هما س + ٢ص = ٨ ، ٢س + ص = ١ ، وإحداثيات ا(٢ ، −٣) ، ∠(ا ب ج) = ٩٠° ، فأوجِد:

أ معادلة الضلع الثالث في المثلث ا ب ج.

ب إحداثيات النقطة ب.

⚠ **خطأ في الكتاب:** في التمرين ١٥ المستقيمان س + ٢ص = ٨ (ميله $-\frac{١}{٢}$) و ٢س + ص = ١ (ميله −٢) غير متعامدين ، فلا يمكن أن يكونا الضلعَين ا ب ، ب ج لزاوية قائمة عند ب. النقطة ا(٢ ، −٣) تحقّق المعادلة ٢س + ص = ١ فقط. ما يمكن حسابه دون تناقض: نقطة تقاطع المستقيمين = (−٢ ، ٥). لذلك لا أستطيع إعطاء معادلة الضلع الثالث من المعطيات كما كُتبت ، وأرجّح وجود خطأ مطبعي في إحدى المعادلتين.

ورقة الإجابات النموذجية: تمارين ٥-٣

ملاحظة: الإجابات من حسابي لأن كتاب الطالب لا يتضمن مفتاح إجابات.

١) (أ) ص = ٢س + ١ (ب) ص = −٣س − ١ (ج) ص − ٣ = −$\frac{٢}{٣}$(س + ٤) ← ص = −$\frac{٢}{٣}$س + $\frac{١}{٣}$ (أي ٢س + ٣ص = ١)

٢) (أ) الميل $\frac{٣}{٢}$ ← ص = $\frac{٣}{٢}$س − ٣ (ب) الميل −$\frac{٩}{٥}$ ← ص = −$\frac{٩}{٥}$س + $\frac{٢}{٥}$

(ج) الميل $\frac{٢}{٣}$ ← ص = $\frac{٢}{٣}$س − ٣

٣) (أ) الميل ٣: ص = ٣س + ٤ (ب) الميل −$\frac{١}{٢}$: ص = −$\frac{١}{٢}$س − ٤ (ج) الميل −$\frac{١}{٢}$: ص = −$\frac{١}{٢}$س + ٤ (د) ميل ٢س − ٣ص = ١٢ هو $\frac{٢}{٣}$ ← الميل المطلوب −$\frac{٣}{٢}$: ص = −$\frac{٣}{٢}$س + ٩

٤) (أ) المنتصف (١ ، ٤) ، ميل القطعة −$\frac{١}{٢}$ ← ميل العمودي ٢ . المعادلة: ص = ٢س + ٢.

(ب) المنتصف (٣ ، −٢) ، ميل القطعة $\frac{٣}{٥}$ ← ميل العمودي −$\frac{٥}{٣}$: ص = −$\frac{٥}{٣}$س + ٣.

(ج) المنتصف ($\frac{٣}{٢}$ ، −$\frac{١١}{٢}$) ، ميل القطعة $\frac{٣}{٧}$ ← ميل العمودي −$\frac{٧}{٣}$: ص = −$\frac{٧}{٣}$س − ٢

خالد كمال
khaled-math.sure.sh

٥) ميل ل١ = $\frac{١ - ١٠}{(-١٠) - ٢}$ = $\frac{٣}{٤}$ = ميل ل٢ ← ل٢: ص = $\frac{٣}{٤}$(س − ٤) + ١ ← ص = $\frac{٣}{٤}$ س − ٤. ر ع ⊥ ل٢ ← ميل ر ع = $-\frac{٤}{٣}$ ، وتمرّ بـ ع(٢ ، ١٠): ص − ١٠ = $-\frac{٤}{٣}$(س − ٢).

بحلّهما: $\frac{٣}{٤}$ س − ٤ = $-\frac{٤}{٣}$ س + $\frac{٣٨}{٣}$ ← ٢٥س = ٢٠٠ ← س = ٨ ، ص = ٢ ← **ر(٨ ، ٢)**.

٦) (أ) ميل د ع = $\frac{-٤ - ٢}{٤ + ٥}$ = $-\frac{٢}{٣}$ ← ميل ل = $\frac{٣}{٢}$ ، ويمرّ بـ د: ص − ٢ = $\frac{٣}{٢}$(س + ٤) ← **ص** = $\frac{٣}{٢}$ **س** + **٨**. (ب) عند س = ٠: ص = ٨ ← **ر(٠ ، ٨)**. (ج) المساحة = $\frac{١}{٢}$|−٤|(−٤ − ٨) + ٥(٨ − ٢) + |١٠ = $\frac{١}{٢}$(٤٨ + ٣٠) = **٣٩ وحدة مربعة**.

٧) (أ) ل١: ص = $\frac{٣}{٢}$ س − ٦ ؛ بالمساواة: $\frac{٣}{٢}$ س − ٦ = ١٥ − ٢س ← ٧س = ٤٢ ← **ا(٦ ، ٣)**. (ب) ميل العمودي $-\frac{٢}{٣}$: ص − ٣ = $-\frac{٢}{٣}$(س − ٦) ← **ص** = $-\frac{٢}{٣}$ **س** + **٧**.

٨) ميل ا ب = $\frac{-١ - ٥}{-٢ + ١٠}$ = $-\frac{٣}{٤}$ ، المنتصف (−٦ ، ٢) ، ميل العمودي $\frac{٤}{٣}$. (أ) ص − ٢ = $\frac{٤}{٣}$(س + ٦) ← **ص** = $\frac{٤}{٣}$ **س** + **١٠**. (ب) ص = ٠ ← س = $-\frac{١٥}{٢}$ ← **د(−٧,٥ ، ٠)** ؛ س = ٠ ← **ل(٠ ، ١٠)**. (ج) د ل = $\sqrt{٧,٥^٢ + ١٠^٢}$ = $\sqrt{١٥٦,٢٥}$ = **١٢,٥**.

٩) (أ) ميل ل١ = $-\frac{٢}{٥}$ ← ميل ل٢ = $\frac{٥}{٢}$: ص + ٦ = $\frac{٥}{٢}$(س + ٩) ← **ص** = $\frac{٥}{٢}$ **س** + $\frac{٣٣}{٢}$. (ب) ٢س + ٥($\frac{٥}{٢}$ س + $\frac{٣٣}{٢}$) = ١٠ ← $\frac{٢٩}{٢}$ س = $-\frac{١٤٥}{٢}$ ← س = −٥ ، ص = ٤ ← ب(−٥ ، ٤). المساحة = $\frac{١}{٢}$|(−٩)(٤) − (−٥)(−٦)| = $\frac{١}{٢}$ × ٦٦ = **٣٣ وحدة مربعة**.

١٠) ع على المحور السيني ← س + ٢(٠) = ١٦ ← ع(١٦ ، ٠). ميل هـ ع = $-\frac{١}{٢}$ ← ميل د ر = ٢ ، ويمرّ بـ ر(٥ ، −٧): ص + ٧ = ٢(س − ٥) ← ص = ٢س − ١٧. د على المستقيمين: س + ٢(٢س − ١٧) = ١٦ ← ٥س = ٥٠ ← س = ١٠ ، ص = ٣ ← **د(١٠ ، ٣)**. د منتصف هـ ع ← هـ = (٢٠ − ١٦ ، ٦ − ٠) = **هـ(٤ ، ٦)** (تحقّق: ٤ + ١٢ = ١٦ ✓).

١١) م = (٢ ، −٥) ، ميل ا ب = $-\frac{٢}{٣}$ ← ميل م ج = $\frac{٣}{٢}$ = $\frac{٧ + ٥}{ك − ٢}$ ← ك − ٢ = ٨ ← **ك = ١٠**.

١٢) ميل المستقيم $\frac{٤}{٣}$ ← ميل العمودي من (−٢ ، ١٠) هو $-\frac{٣}{٤}$: ص = $-\frac{٣}{٤}$ س + $\frac{١٧}{٢}$. التقاطع مع ٤س − ٣ص = ١٢: ٤س + $\frac{٩}{٤}$ س − $\frac{٥١}{٢}$ = ١٢ ← $\frac{٢٥}{٤}$ س = $\frac{٧٥}{٢}$ ← س = ٦ ، ص = ٤ (قدم العمود (٦ ، ٤) هو منتصف النقطة وصورتها). و = (٢ × ٦ + ٢ ، ٢ × ٤ − ١٠) = **و(١٤ ، −٢)**.

١٣) ميل ا ج = $\frac{٣ − ٨}{٧ + ٨}$ = $\frac{١}{٣}$ ← ميل ب و = −٣ (أ) ص + ٧ = −٣(س − ٣) ← **ص = −٣س + ٢**. (ب) ا ج: ص − ٣ = $\frac{١}{٣}$(س + ٧) ← ص = $\frac{س}{٣}$ + $\frac{١٦}{٣}$ ؛ بالمساواة $\frac{س}{٣}$ + $\frac{١٦}{٣}$ = −٣س + ٢ ← س = −١ ← **و(−١ ، ٥)**. (ج) ا ج = $\sqrt{٢٥٠}$ = ١٠$\sqrt{٢}$ ، ب و = $\sqrt{١٦٠}$ = ٤$\sqrt{١٠}$. (د) المساحة = $\frac{١}{٢}$ × ١٠$\sqrt{٢}$ × ٤$\sqrt{١٠}$ = **١٠٠ وحدة مربعة**.

خالد كمال
khaled-math.stage.sh

١٤) (أ) (ا) و ل رأسية (س = ا) ، منتصفها (ا ، $\frac{٩}{٢}$) ← العمود المنصّف **ص** = $\frac{٩}{٢}$. (٢)

ميل و ر = ١ ، منتصفها ($\frac{٧}{٢}$ ، $\frac{٧}{٢}$) ← ص − $\frac{٧}{٢}$ = −(س − $\frac{٧}{٢}$) ← **ص = ٧ − س**. (ب)

م مركز الدائرة المارّة بالرؤوس: ص = $\frac{٩}{٢}$ ، س = ٧ − $\frac{٩}{٢}$ = $\frac{٥}{٢}$ ← **م**($\frac{٥}{٢}$ ، $\frac{٩}{٢}$)

(تحقّق: م و^{٢} = م ل^{٢} = م ر^{٢} = ١٤٫٥).

١٥) الإجابة غير ممكنة كما كُتب السؤال (انظر ملاحظة خطأ الكتاب في صفحة التمرين). ما يمكن إثباته: المستقيمان يتقاطعان في (−٢ ، ٥) ، والنقطة ا(٢ ، −٣) تقع على ٢س + ص = ١.

٥-٤ معادلة الدائرة

عُرّفت الدائرة بأنها مجموعة نقاط تبعد مسافة ثابتة (نصف القطر) عن نقطة ثابتة (المركز). لإيجاد معادلة دائرة: نفترض أن أيّة نقطة (س ، ص) على محيط دائرة مركزها (أ ، ب) ونصف قطرها نق. بتطبيق نظرية فيثاغورث على المثلث القائم الذي ضلعاه (س − أ) ، (ص − ب) ووتره نق نحصل على المعادلة:

نتيجة ٦ (الصورة القياسية لمعادلة الدائرة)

الدائرة التي مركزها (أ ، ب) ونصف قطرها نق (نق > ٠): (س − أ)^{٢} + (ص − ب)^{٢} = نق^{٢}

استكشاف ١: برسم الدوائر ببرمجية رسم المنحنيات يتبيّن أن مركز الدائرة (أ ، ب) ونصف القطر نق = الجذر التربيعي للطرف الأيمن ، مثلًا (س − ٣)^{٢} + (ص + ٥)^{٢} = ١٦ مركزها (٣ ، −٥) ونصف قطرها ٤. استكشاف ٢: زيادة أ تحرّك الدائرة يمينًا ، ونقصانه يسارًا ؛ زيادة ب تحرّكها للأعلى ونقصانه للأسفل ، ولا يتغيّر حجمها.

مثال ٩

اكتب إحداثيات المركز (م) ، واحسب نصف القطر (نق) لكل من الدوائر الآتية: (أ) $س^{٢} + ص^{٢} = ٤$ (ب) $(س - ٢)^{٢} + (ص - ٤)^{٢} = ١٠٠$ (ج) $(س + ١)^{٢} + (ص - ٨)^{٢} = ١٢$.

الحلّ: (أ) م = (٠ ، ٠) ، نق = $\sqrt{٤}$ = ٢. (ب) م = (٢ ، ٤) ، نق = $\sqrt{١٠٠}$ = ١٠. (ج) م = (−١ ، ٨) ، نق = $\sqrt{١٢}$ = $٢\sqrt{٣}$.

مثال ١٠

دائرة مركزها (−٤ ، ٣) ونصف قطرها ٦ ، أوجِد معادلتها.

الحلّ: $(س - أ)^{٢} + (ص - ب)^{٢} = نق^{٢}$ حيث أ = −٤ ، ب = ٣ ، نق = ٦ ← $(س - (-٤))^{٢} + (ص - ٣)^{٢} = ٦^{٢}$ ← **$(س + ٤)^{٢} + (ص - ٣)^{٢} = ٣٦$**.

مثال ١١

إحداثيات النقطة و هي (٣ ، ٠) ، وإحداثيات النقطة ل هي (٧ ، −٤). أوجِد معادلة الدائرة التي قطرها و ل.

الحلّ: مركز الدائرة منتصف و ل = $\left(\frac{٣ + ٧}{٢} ، \frac{٠ + (-٤)}{٢}\right)$ = (٥ ، −٢). نصف القطر = طول م و = $\sqrt{(٥ - ٣)^{٢} + (-٢ - ٠)^{٢}}$ = $\sqrt{٨}$. المعادلة: $(س - ٥)^{٢} + (ص + ٢)^{٢} = (\sqrt{٨})^{٢}$ ← **$(س - ٥)^{٢} + (ص + ٢)^{٢} = ٨$** (يمكن إيجاد نصف القطر بطرائق أخرى).

الصورة العامة لمعادلة الدائرة

فكّ أقواس $(س - أ)^{٢} + (ص - ب)^{٢} = نق^{٢}$ يعطي $س^{٢} - ٢أس + أ^{٢} + ص^{٢} - ٢بص + ب^{٢} = نق^{٢}$ ← $س^{٢} + ص^{٢} - ٢أس - ٢بص + (أ^{٢} + ب^{٢} - نق^{٢}) = ٠$. تمثّل هذه المعادلة دائرة إذا تحقّقت الشروط: (١) تربيعية في س ، ص. (٢) معامل $س^{٢}$ ومعامل $ص^{٢}$ متساويان. (٣) لا يوجد حدّ س ص. (٤) $نق^{٢} > ٠$ (وفي حالة نق = ٠ تكون الدائرة نقطة).

نتيجة ٧ (الصورة العامة)

$س^{٢} + ص^{٢} + ل س + ن ص + جـ = ٠$ ، حيث المركز م $= (-\frac{ل}{٢} ، -\frac{ن}{٢})$ ونصف القطر نق $= \frac{١}{٢}\sqrt{ل^{٢} + ن^{٢} - ٤جـ}$

مثال ١٢

أوجِد مركز ونصف قطر الدائرة $س^{٢} + ص^{٢} + ١٠س - ٨ص - ٤٠ = ٠$.

الحلّ: نُكمل المربّع: $(س + ٥)^{٢} - ٢٥ + (ص - ٤)^{٢} - ١٦ - ٤٠ = ٠$ ← $(س + ٥)^{٢} + (ص - ٤)^{٢} = ٨١$ ← **المركز (−٥ ، ٤) ونصف القطر ٩**. بطريقة بديلة: ل = ١٠ ، ن = −٨ ، جـ = −٤٠ ← المركز (−٥ ، ٤) ونصف القطر $\frac{١}{٢}\sqrt{١٠٠ + ٦٤ + ١٦٠} = \frac{١}{٢} \times ١٨ = ٩$.

حقائق عن الزوايا القائمة في الدوائر: مماس الدائرة عند نقطة يكون عموديًّا على نصف القطر المارّ بنقطة التماس. العمود النازل من مركز الدائرة على الوتر ينصفه. الزاوية المحيطية المرسومة على قطر الدائرة قائمة. ونستنتج: إذا كان المثلث قائم الزاوية عند النقطة ج فإن النقاط ا ، ب ، ج تقع على محيط دائرة قطرها ا ب ؛ والعمود المنصّف للوتر يمرّ بمركز الدائرة ؛ وإذا كانت الزاوية بين مستقيم ونصف قطر قائمة فالمستقيم مماس.

مثال ١٣

تمرّ دائرة بالنقاط الثلاث (−١ ، ٤) ، (١ ، ٦) ، (٥ ، ٤). أوجِد معادلة الدائرة.

الحلّ: يقع مركز الدائرة على العمود المنصّف لكل وتر. القطعة بين (−١ ، ٤) ، (١ ، ٦): منتصفها (٠ ، ٥) وميلها ١ ← العمودي المنصّف: ص − ٥ = −(س − ٠) ← ص = −س + ٥ ...(١). القطعة بين (١ ، ٦) ، (٥ ، ٤): منتصفها (٣ ، ٥) وميلها $-\frac{١}{٢}$ ← ميل العمودي ٢: ص − ٥ = ٢(س − ٣) ← ص = ٢س − ١ ...(٢). بحلّ (١) ، (٢): س = ٢ ، ص = ٣ ← المركز (٢ ، ٣) ، ونصف القطر = $\sqrt{(٥-٢)^{٢}+(٤-٣)^{٢}}$ = $\sqrt{١٠}$.

المعادلة: **(س − ٢)^{٢} + (ص − ٣)^{٢} = ١٠**.

تمارين ٥-٤

١) أوجِد مركز ونصف قطر كل دائرة من الدوائر الآتية:

أ) س^{٢} + ص^{٢} = ١٦

ب $٢س^{٢} + ٢ص^{٢} = ٩$

ج $س^{٢} + (ص - ٢)^{٢} = ٢٥$

د $(س - ٥)^{٢} + (ص + ٣)^{٢} = ٤$

هـ $(س + ٧)^{٢} + ص^{٢} = ١٨$

و $٢(س - ٣)^{٢} + ٢(ص + ٤)^{٢} = ٤٥$

ز $س^{٢} + ص^{٢} - ٨س + ٢٠ص + ١١٠ = ٠$

ح $٢س^{٢} + ٢ص^{٢} - ١٤س - ١٠ص - ١٦٣ = ٠$

٢) أوجِد معادلة كل دائرة من الدوائر الآتية:

أ م(٠ ، ٠) ، نق ٨

ب م(٥ ، −٢) ، نق ٤

ج م(−١ ، ٣) ، نق $\sqrt{٧}$

د م$(\frac{١}{٢} ، -\frac{٣}{٢})$ ، نق $\frac{٥}{٢}$

٣) أوجِد معادلة دائرة مركزها (٢ ، ٥) ، وتمرّ بالنقطة (٦ ، ٨).

٤) طرفا قطر دائرة هما ا(−٦ ، ٨) ، ب(٢ ، −٤). أوجِد معادلة هذه الدائرة.

٥) أوجِد معادلة الدائرة التي تمسّ محور السينات ، ومركزها (٦ ، −٥).

٦) تقع النقطتان و(١ ، −٢) ، ل(٧ ، ١) على محيط دائرة. بيّن أن مركز الدائرة يقع على المستقيم ٤س + ٢ص = ١٥.

٧) تمرّ دائرة بالنقطتين (٣ ، ٢) ، (٧ ، ٢) ، ونصف قطرها $٢\sqrt{٢}$. أوجِد المعادلتين الممكنتين لهذه الدائرة.

٨) تمرّ دائرة بالنقاط و(٠ ، ٠) ، ا(٨ ، ٤) ، ب(٦ ، ٦). بيّن أن و ا قطر في الدائرة ، وأوجِد معادلة الدائرة.

٩) بيّن أنه يمكن كتابة $س^٢ + ص^٢ − ٦س + ٢ص = ٦$ في صورة $(س − أ)^٢ + (ص − ب)^٢ = نق^٢$ ، حيث أ ، ب ، نق أعداد ثابتة. اكتب إحداثيات مركز الدائرة ونصف قطرها.

١٠) دائرة معادلتها $(س − ٣)^٢ + (ص + ٢)^٢ = ٢٥$:

أ بيّن أن النقطة ا(٦ ، −٦) تقع على الدائرة.

ب أوجِد معادلة مماس الدائرة عند النقطة ا.

١١) يقطع المستقيم ٢س + ٥ص = ٢٠ المحور السيني في النقطة ا ، ويقطع المحور الصادي في النقطة ب. النقطة ج هي نقطة منتصف ا ب.

أ أوجِد معادلة الدائرة التي مركزها ج ، وتمرّ بالنقطتين ا ، ب.

ب بيّن أن الدائرة تمرّ بالنقطة و(٠ ، ٠).

١٢) تشكّل النقاط و(−٥ ، ٦) ، ل(−٣ ، ٨) ، ر(٣ ، ٢) مثلثًا.

أ بيّن أن ∠و ل ر قائمة.

ب أوجِد معادلة الدائرة التي تمرّ بالنقاط و ، ل ، ر.

١٣) أوجِد معادلة الدائرة التي تمرّ بالنقطتين (٧ ، ٣) ، (١١ ، −١) ، ويقع مركزها على المستقيم ٢س + ص = ٧.

١٤) أوجِد معادلة الدائرة التي تمرّ بالنقاط و(٠ ، ٠) ، د(٣ ، ٩) ، ل(١١ ، ١١).

١٥) دائرة نصف قطرها ١٠ وحدات ، وتمرّ بالنقطة (٥ ، −١٦) ، وتمسّ محور السينات. أوجِد المعادلات الممكنة لهذه الدائرة.

١٦) ★ التصميم المجاور مكوّن من أربع دوائر خضراء اللون ودائرة برتقالية: (أ) نصف قطر كل دائرة خضراء وحدة واحدة ، أوجِد نصف قطر الدائرة البرتقالية. (ب) تمّ توسيع التصميم كما هو مبيّن في الرسم في الكتاب ، نصف قطر كل دائرة خضراء وحدة واحدة ، أوجِد نصف قطر الدائرة الزرقاء. (استخدم برمجية رسم المنحنيات لرسم التصميم.)

ورقة الإجابات النموذجية: تمارين ٥-٤

ملاحظة: الإجابات من حسابي لأن كتاب الطالب لا يتضمن مفتاح إجابات.

خالد كمال
khaled-math-page.sh

١) (أ) م(٠ ، ٠) ، نق ٤. (ب) $س^{٢} + ص^{٢} = \frac{٩}{٢}$ ← م(٠ ، ٠) ، نق = $\frac{٣}{٢}\sqrt{٢}$ ≈ ٢٫١٢. (ج) م(٠ ، ٢) ، نق ٥. (د) م(٥ ، −٣) ، نق ٢. (هـ) م(−٧ ، ٠) ، نق = $\sqrt{١٨} = ٣\sqrt{٢}$. (و) س − ٣ ، ص + ٤ ، نق$^{٢} = \frac{٤٥}{٢}$ ← م(٣ ، −٤) ، نق = $\sqrt{٢٢٫٥}$ ≈ ٤٫٧٤. (ز) $(س − ٤)^{٢} + (ص + ١٠)^{٢} = ١٦$ + ١٠٠ − ١١٠ = ٦ ← م(٤ ، −١٠) ، نق = $\sqrt{٦}$ ≈ ٢٫٤٥. (ح) $س^{٢} + ص^{٢} − ٧س − ٥ص − ٨١٫٥ = ٠$ ← $(س − ٣٫٥)^{٢} + (ص − ٢٫٥)^{٢} = ٨١٫٥ + ١٢٫٢٥ + ٦٫٢٥ = ١٠٠$ ← م($\frac{٧}{٢}$ ، $\frac{٥}{٢}$) ، نق ١٠.

٢) (أ) $س^{٢} + ص^{٢} = ٦٤$ (ب) $(س − ٥)^{٢} + (ص + ٢)^{٢} = ١٦$ (ج) $(س + ١)^{٢} + (ص − ٣)^{٢} = ٧$ (د) $(س − \frac{١}{٢})^{٢} + (ص + \frac{٣}{٢})^{٢} = \frac{٢٥}{٤}$

٣) نق$^{٢} = (٦ − ٢)^{٢} + (٨ − ٥)^{٢} = ٢٥$ ← **$(س − ٢)^{٢} + (ص − ٥)^{٢} = ٢٥$**

٤) المركز = منتصف ا ب = (−٢ ، ٢) ، نق$^{٢} = (−٦ + ٢)^{٢} + (٨ − ٢)^{٢} = ٥٢$ ← **$(س + ٢)^{٢} + (ص − ٢)^{٢} = ٥٢$**

٥) يمسّ محور السينات ← نق = |ص$_{المركز}$| = ٥ ← **$(س − ٦)^{٢} + (ص + ٥)^{٢} = ٢٥$**

٦) مركز الدائرة على العمود المنصّف للوتر و ل. منتصف و ل = (٤ ، −$\frac{١}{٢}$) ، ميل و ل = $\frac{٣}{٦} = \frac{١}{٢}$ ← ميل العمودي −٢: ص + $\frac{١}{٢} = −٢(س − ٤)$ ← ص = −٢س + $\frac{١٥}{٢}$ ← ٤س + ٢ص = ١٥ ✓.

٧) المركز على العمود المنصّف للوتر (س = ٥) ← (٥ ، ص): $(٥ − ٣)^{٢} + (ص − ٢)^{٢} = ٨$ ← $(ص − ٢)^{٢} = ٤$ ← ص = ٤ أو ٠. **$(س − ٥)^{٢} + (ص − ٤)^{٢} = ٨$** أو **$(س − ٥)^{٢} + ص^{٢} = ٨$**

خالد كمال
khaled-math-surge.sn

٨) ب و = (−٦ ، −٦) ، ب ا = (٢ ، −٢) ← حاصل الضرب القياسي = −١٢ + ١٢ = ٠ ← ∠و ب ا = ٩٠° ← و ا قطر (الزاوية المحيطية على القطر قائمة). المركز (٤ ، ٢) ، نق^{٢} = ١٦ + ٤ = ٢٠ ← **(س − ٤)^{٢} + (ص − ٢)^{٢} = ٢٠**

٩) (س − ٣)^{٢} − ٩ + (ص + ١)^{٢} − ١ = ٦ ← **(س − ٣)^{٢} + (ص + ١)^{٢} = ١٦** ← المركز (٣ ، −١) ، نق = ٤.

١٠) (أ) (٦ − ٣)^{٢} + (−٦ + ٢)^{٢} = ٩ + ١٦ = ٢٥ ✓. (ب) ميل نصف القطر = $\frac{-٦ + ٢}{٦ - ٣}$ = $-\frac{٤}{٣}$ ← ميل المماس $\frac{٣}{٤}$: ص + ٦ = $\frac{٣}{٤}$ (س − ٦) ← **ص = $\frac{٣}{٤}$ س − $\frac{٢١}{٢}$** (أي ٣س − ٤ص = ٤٢).

١١) ا(١٠ ، ٠) ، ب(٠ ، ٤) ، ج(٥ ، ٢). (أ) نق^{٢} = (١٠ − ٥)^{٢} + (٠ − ٢)^{٢} = ٢٩ ← **(س − ٥)^{٢} + (ص − ٢)^{٢} = ٢٩**. (ب) (٠ − ٥)^{٢} + (٠ − ٢)^{٢} = ٢٩ ✓ (أي ∠ا و ب قائمة ، فا ب قطر).

١٢) (أ) ل و = (−٢ ، −٢) ، ل ر = (٦ ، −٦) ← الضرب القياسي = −١٢ + ١٢ = ٠ ← ∠و ل ر = ٩٠°. (ب) و ر قطر ← المركز (−١ ، ٤) ، نق^{٢} = ١٦ + ٤ = ٢٠ ← **(س + ١)^{٢} + (ص − ٤)^{٢} = ٢٠**

١٣) العمود المنصّف للوتر: المنتصف (٩ ، ١) ، الميل −١ ← ميل العمودي ا: ص = س − ٨. مع ص = ٧ − ٢س: س − ٨ = ٧ − ٢س ← س = ٥ ، ص = −٣. نق^{٢} = (٧ − ٥)^{٢} + (٣ + ٣)^{٢} = ٤٠ ← **(س − ٥)^{٢} + (ص + ٣)^{٢} = ٤٠**

١٤) س^{٢} + ص^{٢} + ل س + ن ص = ٠ (تمرّ بالأصل). (٣ ، ٩): ٩٠ + ٣ل + ٩ن = ٠ ← ل + ٣ن = −٣٠ ؛ (١١ ، ١١): ٢٤٢ + ١١ل + ١١ن = ٠ ← ل + ن = −٢٢ ← ن = −٤ ، ل = −١٨. المركز (٩ ، ٢) ، نق^{٢} = ٨١ + ٤ = ٨٥ ← **(س − ٩)^{٢} + (ص − ٢)^{٢} = ٨٥**

١٥) المركز (أ ، −١٠) (لأن النقطة تحت المحور وتمسّه) : (٥ − أ)^{٢} + (−١٦ + ١٠)^{٢} = ١٠٠ ← (٥ − أ)^{٢} = ٦٤ ← أ = −٣ أو ١٣. **(س + ٣)^{٢} + (ص + ١٠)^{٢} = ١٠٠** أو **(س − ١٣)^{٢} + (ص + ١٠)^{٢} = ١٠٠**

١٦) (أ) الدوائر الخضراء الأربع متماسّة ، مراكزها رؤوس مربع طول ضلعه ٢ ← بُعد المركز عن مركز التصميم $\sqrt{٢}$ ← نصف قطر البرتقالية = ١ + $\sqrt{٢}$ ≈ **٢,٤١**. (ب) يعتمد على الرسم الموسّع في الكتاب (ترتيب الدوائر البرتقالية) ولم أستطع قراءته بدقة كافية ، فلم أحسب (ب) ؛ يُراجع الشكل في الكتاب.

٥-٥ علاقة المستقيم بالدائرة

درست في الوحدة الأولى أنه يمكن إيجاد نقطة تقاطع مستقيم مع منحنى بحلّ معادلتَيهما آنيًّا ، وأنه إذا كانت المعادلة الناتجة بصورة أس^{٢} + ب س + جـ = ٠ فإن المميّز ب^{٢} − ٤أجـ يعطي معلومات عن المستقيم والمنحنى.

طبيعة الجذور (المستقيم والمنحنى التربيعي)

ب^{٢} − ٤أجـ > ٠: جذران حقيقيان مختلفان ← نقطتا تقاطع مختلفتان.

ب^{٢} − ٤أجـ = ٠: جذران حقيقيان متساويان (جذر مكرّر) ← نقطة تقاطع واحدة (المستقيم مماس).

ب^{٢} − ٤أجـ < ٠: لا توجد جذور حقيقية ← لا توجد نقاط تقاطع.

مثال ١٤

إذا علمت أن المستقيم س = ٣ص + ١٠ يقطع الدائرة س^{٢} + ص^{٢} = ٢٠ في النقطتين ا ، ب ، والعمود المنصّف للقطعة المستقيمة ا ب يقطع الدائرة في النقطتين ج ، د ، فأوجِد: (أ) إحداثيات ا ، ب. (ب) معادلة العمود المنصّف للقطعة ا ب وبيّن أنه يمرّ بمركز الدائرة. (ج) إحداثيات ج ، د.

الحلّ: (أ) نعوّض س = ٣ص + ١٠: (٣ص + ١٠)^{٢} + ص^{٢} = ٢٠ ← ١٠ص^{٢} + ٦٠ص + ٨٠ = ٠ ← ص^{٢} + ٦ص + ٨ = ٠ ← (ص + ٢)(ص + ٤) = ٠ ← ص = −٢ (س = ٤) أو ص = −٤ (س = −٢) ← **ا(٤ ، −٢) ، ب(−٢ ، −٤)**.

(ب) ميل ا ب = $\frac{-٢ + ٤}{٤ + ٢}$ = $\frac{١}{٣}$ ← ميل العمودي −٣ ، المنتصف (١ ، −٣): ص + ٣ = −٣(س − ١) ← **ص = −٣س** ، يمرّ بـ (٠ ، ٠) وهو مركز الدائرة ✓.

(ج) نعوّض ص = −٣س في س^{٢} + ص^{٢} = ٢٠ ← ١٠س^{٢} = ٢٠ ← س = ±$\sqrt{٢}$ ← (−$\sqrt{٢}$ ، ٣$\sqrt{٢}$) ، ($\sqrt{٢}$ ، −٣$\sqrt{٢}$).

مثال ١٥

بيّن أن المستقيم ص = س − ١٣ ماسّ للدائرة س^{٢} + ص^{٢} − ٨س + ٦ص + ٧ = ٠.

الحلّ: نعوّض ص = س − ١٣: س^{٢} + (س − ١٣)^{٢} − ٨س + ٦(س − ١٣) + ٧ = ٠ ← ٢س^{٢} − ٢٨س + ٩٨ = ٠ ← س^{٢} − ١٤س + ٤٩ = ٠. المميّز = (−١٤)^{٢} − ٤ × ١ × ٤٩ = ٠ ← جذر حقيقي واحد مكرّر ← المستقيم **ماسّ** للدائرة (عند س = ٧).

مثال ١٦

رُسم المستقيم ص = س + جـ والدائرة (س − ٤)^{٢} + (ص − ٢)^{٢} = ٨ في المستوى الإحداثي نفسه. أوجِد قيم جـ عندما: (أ) يكون المستقيم ماسًّا للدائرة. (ب) يتقاطع المستقيم مع الدائرة في نقطتين. (ج) لا يتقاطع المستقيم مع الدائرة.

الحلّ: نعوّض ص = س + جـ: (س − ٤)^{٢} + (س + جـ − ٢)^{٢} = ٨ ← ٢س^{٢} + (٢جـ − ١٢)س + (جـ^{٢} − ٤جـ + ١٢) = ٠. المميّز = (٢جـ − ١٢)^{٢} − ٨(جـ^{٢} − ٤جـ + ١٢) = −٤جـ^{٢} − ١٦جـ + ٤٨ = −٤(جـ^{٢} + ٤جـ − ١٢) = −٤(جـ + ٦)(جـ − ٢). الأصفار: جـ = −٦ أو ٢. المميّز موجب عندما −٦ < جـ < ٢ ، وسالب عندما جـ < −٦ أو جـ > ٢.

(أ) ماسّ: **جـ = −٦ أو جـ = ٢**. (ب) نقطتان: **−٦ < جـ < ٢**. (ج) لا يتقاطع: **جـ < −٦ أو جـ > ٢**.

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

تمارين ٥-٥

١) أوجِد نقاط تقاطع المستقيم ص = س − ٣ مع الدائرة (س − ٣)^{٢} + (ص + ٢)^{٢} = ٢٠.

٢) يقطع المستقيم ٢س − ص + ٣ = ٠ الدائرة س^{٢} + ص^{٢} − ٤س + ٦ص − ١٢ = ٠ في النقطتين و ، هـ. أوجِد طول القطعة المستقيمة و هـ.

٣) بيّن أن المستقيم ٣س + ص = ٦ مماسّ للدائرة س^{٢} + ص^{٢} + ٤س + ١٦ص + ٢٨ = ٠.

٤) أوجِد مجموعة قيم م بحيث يقطع المستقيم ص = م س + ١ الدائرة (س − ٧)^{٢} + (ص − ٥)^{٢} = ٢٠ في نقطتين مختلفتين.

٥) إذا علمت أن المستقيم ٢ص − س = ١٢ يقطع الدائرة س^{٢} + ص^{٢} − ١٠س − ١٢ص + ٣٦ = ٠ في النقطتين ا ، ب ، والعمود المنصّف للقطعة المستقيمة ا ب يقطع الدائرة في النقطتين و ، ل ، فأوجِد:

أ إحداثيات النقطتين ا ، ب.

ب معادلة العمود المنصّف للقطعة ا ب.

ج إحداثيات النقطتين و ، ل.

د مساحة الشكل الرباعي ا و ب ل.

٦) ★ بيّن أن الدائرتين س^{٢} + ص^{٢} = ٢٥ ، س^{٢} + ص^{٢} − ٢٤س − ١٨ص + ١٢٥ = ٠ متماستان ، ثم أوجِد إحداثيات نقطة التماس.

٧) يُرسم المستقيم ص = س + جـ على المحورَين نفسيهما حيث مركز الدائرة نقطة الأصل ونصف القطر ٢. أوجِد قيم جـ عندما يكون المستقيم: (أ) ماسًّا للدائرة. (ب) يتقاطع مع الدائرة بنقطتين. (ج) لا يتقاطع مع الدائرة.

ورقة الإجابات النموذجية: تمارين ٥-٥

ملاحظة: الإجابات من حسابي لأن كتاب الطالب لا يتضمن مفتاح إجابات.

ا) (س − ٣)^{٢} + (س − ١)^{٢} = ٢٠ ← ٢س^{٢} − ٨س + ١٠ = ٢٠ ← س^{٢} − ٤س − ٥ = ٠ ← س = ٥ أو −١ ← **(٥ ، ٢)** ، **(−١ ، −٤)**.

٢) ص = ٢س + ٣: س^{٢} + (٢س + ٣)^{٢} − ٤س + ٦(٢س + ٣) − ١٢ = ٠ ← ٥س^{٢} + ٢٠س + ١٥ = ٠ ← س^{٢} + ٤س + ٣ = ٠ ← س = −١ أو −٣ ← و(−١ ، ١) ، هـ(−٣ ، −٣). الطول = $\sqrt{٤^{٢} + ١٦}$ = $\sqrt{٢٠}$ = **٢$\sqrt{٥}$** ≈ ٤٫٤٧.

٣) ص = ٦ − ٣س: س^{٢} + (٦ − ٣س)^{٢} + ٤س + ١٦(٦ − ٣س) + ٢٨ = ٠ ← ١٠س^{٢} − ٨٠س + ١٦٠ = ٠ ← س^{٢} − ٨س + ١٦ = ٠ ← (س − ٤)^{٢} = ٠ ← المميّز = ٦٤ − ٦٤ = ٠ ← مماسّ (عند (٤ ، −٦)).

٤) (س − ٧)^{٢} + (م س − ٤)^{٢} = ٢٠ ← (١ + م^{٢})س^{٢} − (١٤ + ٨م)س + ٤٥ = ٠. المميّز = (١٤ + ٨م)^{٢} − ١٨٠(١ + م^{٢}) = −١١٦م^{٢} + ٢٢٤م + ١٦ > ٠ ← ٢٩م^{٢} − ٥٦م − ٤ < ٠ ← (م − ٢)(٢٩م + ٢) < ٠ ← **$-\frac{٢}{٢٩}$ < م < ٢**.

٥) (أ) س = ٢ص − ١٢: (٢ص − ١٢)^{٢} + ص^{٢} − ١٠(٢ص − ١٢) − ١٢ص + ٣٦ = ٠ ← ٥ص^{٢} − ٨٠ص + ٣٠٠ = ٠ ← ص^{٢} − ١٦ص + ٦٠ = ٠ ← ص = ٦ أو ١٠ ← **ا(٠ ، ٦) ، ب(٨ ، ١٠)**. (ب) ميل ا ب = $\frac{١}{٢}$ ، المنتصف (٤ ، ٨) ← ص − ٨ = −٢(س − ٤) ← **ص = −٢س + ١٦**. (ج) مركز الدائرة (٥ ، ٦) ، نق^{٢} = ٢٥ ؛ بالتعويض: (س − ٥)^{٢} + (١٠ − ٢س)^{٢} = ٢٥ ← ٥(س − ٥)^{٢} = ٢٥ ← س = ٥ ± $\sqrt{٥}$ ← **و(٥ + $\sqrt{٥}$ ، ٦ − ٢$\sqrt{٥}$) ، ل(٥ − $\sqrt{٥}$ ، ٦ + ٢$\sqrt{٥}$)**. (د) و ل قطر (المنصّف يمرّ بالمركز) = ١٠ ، ا ب = $\sqrt{٦٤ + ١٦}$ = ٤$\sqrt{٥}$ ، وهما متعامدان ← المساحة = $\frac{١}{٢}$ × ١٠ × ٤$\sqrt{٥}$ = **٢٠$\sqrt{٥}$** ≈ ٤٤٫٧٢ وحدة مربعة.

٦) الدائرة الأولى: م$_{١}$(٠ ، ٠) ، نق$_{١}$ = ٥. الثانية: (س − ١٢)^{٢} + (ص − ٩)^{٢} = ١٤٤ − ٨١ + ١٢٥ = ١٠٠ ← م$_{٢}$(١٢ ، ٩) ، نق$_{٢}$ = ١٠. المسافة بين المركزين = $\sqrt{١٤٤ + ٨١}$ = ١٥ = ٥ + ١٠ ← متماستان من الخارج. نقطة التماس على م$_{١}$م$_{٢}$ وتبعد ٥ عن م$_{١}$: $\frac{٥}{١٥}$ (١٢ ، ٩) = **(٤ ، ٣)**.

٧) مركز الدائرة الأصل ونق = ٢. المسافة من الأصل إلى المستقيم س − ص + جـ = ٠ هي $\frac{|\text{جـ}|}{\sqrt{٢}}$. (أ) ماسّ: $\frac{|\text{جـ}|}{\sqrt{٢}} = ٢ \leftarrow \text{جـ} = \pm ٢\sqrt{٢}$ (≈ ±٢٫٨٣). (ب) نقطتان: $-٢\sqrt{٢} < \text{جـ} < ٢\sqrt{٢}$. (ج) لا يتقاطع: $\text{جـ} < -٢\sqrt{٢}$ أو $\text{جـ} > ٢\sqrt{٢}$.

قائمة التحقق من التعلم والفهم

نقطة المنتصف والميل وطول القطعة المستقيمة

• منتصف القطعة: $\left(\frac{س_١ + س_٢}{٢}، \frac{ص_١ + ص_٢}{٢}\right)$ • الميل = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$ (س$_٢$ ≠ س$_١$)

• الطول = $\sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$

المستقيمات المتوازية والمتعامدة

• متوازيان: م$_١$ = م$_٢$ • متعامدان: م$_١$ × م$_٢$ = −١

معادلة الخط المستقيم

• ص − ص$_١$ = م(س − س$_١$) ، حيث م الميل و(س$_١$ ، ص$_١$) نقطة على المستقيم.

معادلة الدائرة

• (س − أ)^٢ + (ص − ب)^٢ = نق^٢ ، المركز (أ ، ب) ونصف القطر نق. • س^٢ + ص^٢ + ل س + ن ص + جـ = ٠ ، المركز $\left(-\frac{ل}{٢}، -\frac{ن}{٢}\right)$ ، نق = $\frac{١}{٢}\sqrt{ل^٢ + ن^٢ - ٤\text{جـ}}$.

خالد كمال
khaled-math.sage.sh

تمارين مراجعة نهاية الوحدة الخامسة

١) إحداثيات النقطة ا(م ، ٣) ، وإحداثيات ب(٤ ، ن). طول ا ب هو ٤√٥ وحدة ، وميلها $-\frac{١}{٢}$. أوجِد قيم م ، ن الممكنة.

٢) يتقاطع منحنى الدالة ص = ٣√(س − ٢) والمستقيم ٣س − ٤ص + ٣ = ٠ في النقطتين و ، ل. أوجِد طول القطعة المستقيمة و ل.

ملاحظة: قرأتُ الدالة ص = ٣√(س − ٢) (الجذر على س − ٢ كلّها)؛ هذه القراءة تعطي نقاطًا صحيحة (٣ ، ٣) و(١١ ، ٩) وتحقّق المعادلتين ، أمّا قراءة الجذر على س وحدها فلا تعطي نقاطًا صحيحة.

٣) يمرّ المستقيم م س − ٢ص = ٣٠ بالنقطتين ا(١٠ ، ١٠) ، ب(ن ، ١٠ان) حيث م ، ن ثابتان. أوجِد:

أ قيمة كل من م ، ن.

ب إحداثيات منتصف القطعة المستقيمة ا ب.

ج معادلة العمود المنصّف للقطعة المستقيمة ا ب.

٤) ★ مستقيم ميله −٢ ، ويمرّ بالنقطة و(٣ت ، ٢ت) ، كما أنه يقطع المحور السيني في النقطة ا ويقطع المحور الصادي في النقطة ب.

أ أوجِد مساحة المثلث ا و ب بدلالة ت ، حيث و نقطة الأصل.

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

ب المستقيم الذي يمرّ بالنقطة د والعمودي على القطعة المستقيمة ا ب ، ويقطع المحور السيني في النقطة ج. بيّن أن نقطة منتصف د ج تقع على المستقيم ص = س.

ملاحظة: في الفرع (أ) النقطة و في السؤال هي النقطة (٣ت ، ٢ت) ، والنقطة د في الفرع (ب) هي النقطة نفسها ؛ التباس تسمية في الكتاب لم يغيّر الحل.

٥) النقطة و هي صورة انعكاس النقطة (−٧ ، ٥) حول المستقيم ٥س − ٣ص = ١٨. أوجِد إحداثيات النقطة و.

٦) يتقاطع منحنى الدالة ص = س + ٢ − $\frac{٤}{س}$ ، والمستقيم س − ٢ص + ٦ = ٠ في النقطتين ا ، ب. أوجِد:

أ إحداثيات النقطتين ا ، ب.

ب معادلة العمود المنصّف للقطعة المستقيمة ا ب.

٧) يقطع المستقيم ص = م س + ١ الدائرة $س^{٢}$ + $ص^{٢}$ − ١٩س − ٥١ = ٠ في النقطتين ل(س ، ص) ، و(٥ ، ١١). أوجِد:

أ إحداثيات النقطة ل.

ب معادلة العمود المنصّف للقطعة المستقيمة و ل.

ج الإحداثي السيني للنقاط التي يقطع فيها العمود المنصّف الدائرة.

٨) ★ يبيّن الشكل المجاور المثلث ا ب ج حيث ا(٣ ، −٢) ، ب(١٥ ، ٢٢). ميل كل من ا ب ، ا ج ، ب ج هو (٢م) ، (−٢م) ، (م) على الترتيب ، حيث م عدد صحيح موجب. (ج تقع على المحور الصادي.) أوجِد:

أ ميل ا ب ، وقيمة م.

ب إحداثيات النقطة ج.

ج إحداثيات النقطة و ، حيث و نقطة العمود المنصّف للقطعة المستقيمة ا ب مع القطعة المستقيمة ب ج.

⚠ **خطأ في الكتاب:** ميلا ا ج وب ج المعطيان (−٢م ، م) غير متسقين مع وقوع ج على المحور الصادي: من ميل ا ب = ٢م = ٢ نحصل على م = ١. ميل ب ج = ا يعطي ج(٠ ، ٧) ؛ لكن ميل ا ج عندئذ = $\frac{٧ + ٢}{٠ - ٣}$ = −٣ وليس −٢ (وإذا كان −٢ كما كُتب فتقع ج على ا ج في (٠ ، ٤) ولا تقع على المستقيم ب ج). اعتمدتُ ميل ب ج = م وموقع ج على المحور الصادي كما في الشكل: ج(٠ ، ٧).

٩) (أ) أوجِد معادلة العمود المنصّف للقطعة المستقيمة ا ب حيث ا(−١ ، ٦) والنقطة ب(٧ ، ٢) ، واكتب الإجابة في صورة ص = م س + جـ. (ب) تقع النقطة ع على العمود المنصّف للقطعة المستقيمة ا ب وإحداثياتها (د ، ل). المسافة و ع = ٢ وحدة ، حيث و نقطة الأصل. اكتب معادلتين تتضمّنان د ، ل ، وكذلك أوجِد الإحداثيات الممكنة للنقطة ع.

١٠) ★ ا ، ج نقطتان إحداثياتهما (−٣ ، ٢) ، (٥ ، ٦) ، م نقطة منتصف القطعة المستقيمة ا ج ، العمود المنصّف للقطعة المستقيمة ا ج يقطع المحور السيني في النقطة ب.

أ أوجِد معادلة م ب ، وإحداثيات النقطة ب.

ب أثبت أن ا ب ⊥ ب ج.

ج إذا علمت أن ا ب ج و مربّع ، فأوجِد إحداثيات النقطة و ، وطول القطعة المستقيمة ا و.

١١) تقع النقطتان ا(١ ، −٢) ، ب(٥ ، ٤) على دائرة مركزها ج(٦ ، ت).

أ أوجِد معادلة العمود المنصّف للقطعة المستقيمة ا ب.

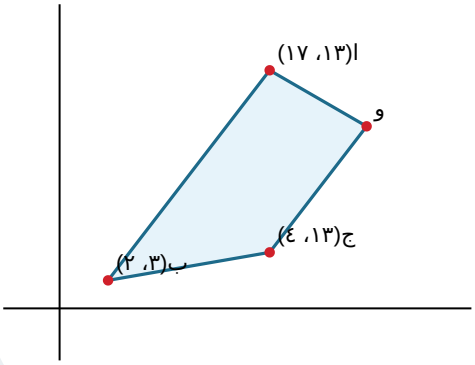
ب استخدم إجابة الجزئية (أ) لتوجد قيمة ت.

ج أوجِد معادلة الدائرة.

١٢) يبيّن الشكل المجاور شبه المنحرف ا ب ج و ، حيث ا ب // و ج ، ا(١٣ ، ١٧) ، ب(٣ ، ٢) ، ج(١٣ ، ٤) ، ∠(ب ا و) = ٩٠°. أوجِد:

أ إحداثيات النقطة و.

ب مساحة شبه المنحرف ا ب ج و.



١٣) منحنى معادلته س ص = ١٢ ، ومستقيم معادلته ٣س + ص = ك ، حيث ك ثابت. (أ) عندما ك = ٢٠ يتقاطع المنحنى والمستقيم في النقطتين ا ، ب ، أوجِد إحداثيات نقطة منتصف ا ب. (ب) أوجِد مجموعة قيم ك ، حيث يقطع المستقيم ٣س + ص = ك المنحنى في نقطتين مختلفتين.

١٤) (أ) أوجِد معادلة المستقيم ا ب حيث ا(−٣ ، ٦) ، ب(٩ ، −١٠). (ب) بيّن أن معادلة العمود المنصّف للقطعة المستقيمة ا ب هي ٣س − ٤ص = ١٧. (ج) تمرّ دائرة بالنقطتين ا ، ب ، ويقع مركزها على المستقيم س = ١٥ ، أوجِد معادلة الدائرة.

١٥) دائرة معادلتها $س^{٢} + ص^{٢} - ٨س + ٤ص + ٤ = ٠$:

أ أوجِد نصف قطر الدائرة ، وإحداثيات مركزها.

ب أوجِد إحداثيات نقاط تقاطع الدائرة مع المحور السيني ، واكتب الناتج في أبسط صورة.

ج بيّن أن النقطة (٦ ، ٢√٣ − ٢) تقع على الدائرة.

د بيّن أن معادلة مماس الدائرة عند هذه النقطة هي √٣ س + ٣ص = ١٢√٣ − ٦.

ورقة الإجابات النموذجية: مراجعة الوحدة ٥

ملاحظة: الإجابات من حسابي لأن كتاب الطالب لا يتضمن مفتاح إجابات.

١) ن − ٣ = −$\frac{١}{٢}$(٤ − م) ؛ الطول^{٢} = (٤ − م)^{٢}(١ + $\frac{١}{٤}$) = ٨٠ ← (٤ − م)^{٢} = ٦٤ ← م = −٤ أو م = ١٢ (ن = ٧). **(م ، ن) = (−٤ ، −١) أو (١٢ ، ٧)**.

(ن = −١)

٢) نعوّض ص = $\frac{٣س + ٣}{٤}$: √٣ س − ٢ = $\frac{٣س + ٣}{٤}$ ← √٤ س − ٢ = س + ١ ←

١٦(س − ٢) = (س + ١)^{٢} ← س^{٢} − ١٤س + ٣٣ = ٠ ← س = ٣ أو ١١ ← و(٣ ، ٣) ، ل(١١ ، ٩) (تحقّق: ص = √٣ س − ٢ ✓). الطول = √٦٤ + ٣٦ = **١٠**.

٣) (أ) ا على المستقيم: ١٠م − ٢٠ = ٣٠ ← **م = ٥** ؛ ب: ٥ن − ٢٠ن = ٣٠ ← **ن = −٢** ← ب(−٢ ، −٢٠). (ب) المنتصف **(٤ ، −٥)**. (ج) ميل ا ب = $\frac{٥}{٢}$ ← ميل العمودي = −$\frac{٢}{٥}$: ص + ٥ = −$\frac{٢}{٥}$(س − ٤) ← **ص = −$\frac{٢}{٥}$ س − $\frac{١٧}{٥}$** (أي ٢س + ٥ص = −١٧).

٤) المعادلة: ص − ٢ت = −٢(س − ٣ت) ← ص = −٢س + ٨ت ← أ(٤ت ، ٠) ، ب(٠ ، ٨ت).

(أ) المساحة = $\frac{١}{٢}$ × ٤ت × ٨ت = **١٦ت²** (ت > ٠). (ب) العمودي على أ ب (ميله $\frac{١}{٢}$) من و(٣ت ، ٢ت): ص − ٢ت = $\frac{١}{٢}$(س − ٣ت) ؛ عند ص = ٠: −٢ت = $\frac{١}{٢}$(س − ٣ت) ← س = −ت ← ج(−ت ، ٠). منتصف و ج = ($\frac{٣ت - ت}{٢}$ ، $\frac{٢ت}{٢}$) = (ت ، ت) ← على ص = س ✓.

٥) ميل المستقيم $\frac{٥}{٣}$ ← ميل العمودي $-\frac{٣}{٥}$: ص − ٥ = $-\frac{٣}{٥}$(س + ٧). قدم العمود: ٥س − ٣ص = ١٨ مع ٣س + ٥ص = ٢٥ − ٢١ = ٤ ← ٣٤س = ١٠٢ ← س = ٣ ، ص = −١ (تحقّق: ١٥ + ٣ = ١٨ ✓). و = (٢ × ٣ + ٧ ، ٢ × (−١) − ٥) = **و(١٣ ، −٧)**.

٦) (أ) س + ٢ − $\frac{٤}{س}$ = $\frac{س + ٦}{٢}$ ← ٢س² + ٤س − ٨ = س² + ٦س ← س² − ٢س − ٨ = ٠ ← س = ٤ أو −٢ ← **أ(−٢ ، ٢) ، ب(٤ ، ٥)**. (ب) المنتصف (١ ، $\frac{٧}{٢}$) ، ميل أ ب = $\frac{١}{٢}$ ← ص − $\frac{٧}{٢}$ = −٢(س − ١) ← **ص = −٢س + $\frac{١١}{٢}$** (أي ٤س + ٢ص = ١١).

٧) (أ) و على المستقيم: ١١ = ٥م + ١ ← م = ٢. بالتعويض ص = ٢س + ١: ٥س² − ١٥س − ٥٠ = ٠ ← س² − ٣س − ١٠ = ٠ ← س = ٥ أو −٢ ← **ل(−٢ ، −٣)**. (ب) المنتصف ($\frac{٣}{٢}$ ، ٤) ، ميل و ل = ٢ ← ميل العمودي $-\frac{١}{٢}$: ص − ٤ = $-\frac{١}{٢}$(س − $\frac{٣}{٢}$) ← **ص = $-\frac{١}{٢}$س + $\frac{١٩}{٤}$** (أي ٢س + ٤ص = ١٩). (ج) س² + (−$\frac{س}{٢}$ + $\frac{١٩}{٤}$)² − ١٩س − ٥١ = ٠ ← ٤س² − ٧٦س − ٩١ = ٠ ← **س** = $\frac{١٩}{٢}$ ± $\frac{\sqrt{١١٣}}{٢}$ ≈ ٢٠٫١٣ أو −١٫١٣.

٨) (أ) ميل ا ب = $\frac{٢٢ + ٢}{١٥ - ٣}$ = ٢ = ٢م ← **م = ١**. (ب) ميل ب ج = م = ١ ، ب(١٥ ، ٢٢): ص − ٢٢ = س − ١٥ ← ص = س + ٧ ← عند س = ٠: **ج(٠ ، ٧)** (انظر ملاحظة خطأ الكتاب).

(ج) المنتصف (٩ ، ١٠) ، ميل العمودي $-\frac{١}{٢}$ ← ص − ١٠ = $-\frac{١}{٢}$(س − ٩) ؛ مع ص = س + ٧: س − ٣ = $-\frac{س}{٢} + \frac{٩}{٢}$ ← س = ٥ ← **و(٥ ، ١٢)** (تحقّق: و ا^{٢} = و ب^{٢} = ٢٠٠).

٩) (أ) المنتصف (٣ ، ٤) ، ميل ا ب = $\frac{٦ - ٢}{٧ + ١}$ = $-\frac{١}{٢}$ ← ميل العمودي ٢: ص − ٤ = ٢(س − ٣) ← **ص = ٢س − ٢**. (ب) ل = ٢د − ٢ ... (١) ، د^{٢} + ل^{٢} = ٤ ... (٢). بالتعويض: ٥د^{٢} − ٨د = ٠ ← د = ٠ أو $\frac{٨}{٥}$ ← **ع(٠ ، −٢) أو ع($\frac{٨}{٥}$ ، $\frac{٦}{٥}$)**.

١٠) (أ) المنتصف م(١ ، ٤) ، ميل ا ج = $\frac{١}{٢}$ ← ميل العمودي −٢: ص − ٤ = −٢(س − ١) ← **ص = −٢س + ٦** ؛ عند ص = ٠: **ب(٣ ، ٠)**. (ب) ميل ا ب = $\frac{٠ - ٢}{٣ + ٣}$ = $-\frac{١}{٣}$ ، ميل ب ج = $\frac{٦ - ٠}{٥ - ٣}$ = ٣ ← الجداء = −١ ← ا ب ⊥ ب ج ✓. (ج) و = ا + ج − ب = (−٣ + ٥ − ٣ ، ٢ + ٦ − ٠) = **و(−١ ، ٨)** ؛ ا و = $\sqrt{٣٦ + ٤}$ = **$\sqrt{١٠٠}$** ≈ ٦,٣٢.

١١) (أ) المنتصف (٣ ، ١) ، ميل ا ب = $\frac{٦}{٤}$ = $\frac{٣}{٢}$ ← ميل العمودي $-\frac{٢}{٣}$: ص − ١ = $-\frac{٢}{٣}$(س − ٣) ← **ص = $-\frac{٢}{٣}$ س + ٣**. (ب) ج(٦ ، ت) عليه: ت = −٤ + ٣ = **−١**. (ج) نق^{٢} = (٦ − ١)^{٢} + (−١ + ٢)^{٢} = ٢٦ ← **(س − ٦)^{٢} + (ص + ١)^{٢} = ٢٦**.

١٢) ميل ا ب = $\frac{-١٧ - ٢}{-١٣ - ٣} = \frac{٣}{٢}$ ← ميل ا و = $-\frac{٢}{٣}$ وو ج // ا ب ← ميل ج و = $\frac{٣}{٢}$. ا و: ص − ١٧ = $-\frac{٢}{٣}$(س − ١٣) ، ج و: ص − ٤ = $\frac{٣}{٢}$(س − ١٣) ← س − ١٣ = ٦ ← **و(١٩ ، ٥)**

١٣) (ب) ا ب = $٥\sqrt{١٣}$ ، و ج = $٣\sqrt{١٣}$ ، الارتفاع = ا و = $٢\sqrt{١٣}$ ← المساحة = $\frac{١}{٢}$(٥ $\sqrt{١٣}$ + ٣$\sqrt{١٣}$) × ٢$\sqrt{١٣}$ = **١٠٤ وحدة مربعة**.

١٣) (أ) ص = ٢٠ − ٣س: س(٢٠ − ٣س) = ١٢ ← ٣س^{٢} − ٢٠س + ١٢ = ٠ ← س = ٦ أو $\frac{٢}{٣}$ ← ا(٦ ، ٢) ، ب($\frac{٢}{٣}$ ، ١٨). المنتصف = **($\frac{١٠}{٣}$ ، ١٠)**. (ب) س(ك − ٣س) = ١٢ ← ٣س^{٢} − ك س + ١٢ = ٠ ← المميّز ك^{٢} − ١٤٤ > ٠ ← **ك > ١٢ أو ك < −١٢**.

١٤) (أ) ميل ا ب = $\frac{-١٠ - ٦}{٩ + ٣} = -\frac{٤}{٣}$ ← ص − ٦ = $-\frac{٤}{٣}$(س + ٣) ← **ص = $-\frac{٤}{٣}$ س + ٢** (أي ٤س + ٣ص = ٦). (ب) المنتصف (٣ ، −٢) ، ميل العمودي $\frac{٣}{٤}$ ← ص + ٢ = $\frac{٣}{٤}$(س − ٣) ← ٤ص + ٨ = ٣س − ٩ ← ٣س − ٤ص = ١٧ ✓. (ج) س = ١٥ ← ٤ص = ٤٥ − ١٧ = ٢٨ ← ص = ٧ ← المركز (١٥ ، ٧) ، نق^{٢} = ١٨^{٢} + ١^{٢} = ٣٢٥ ← **(س − ١٥)^{٢} + (ص − ٧)^{٢} = ٣٢٥**.

١٥) (أ) $(س - ٤)^{٢} + (ص + ٢)^{٢} = ١٦$ ← **م(٤ ، −٢) ، نق = ٤**. (ب) ص = ٠ : $س^{٢} - ٨س + ٤$ = ٠ ← $س = ٤ \pm ٢\sqrt{٣}$ ← **$(٤ + ٢\sqrt{٣}$ ، ٠) ، $(٤ - ٢\sqrt{٣}$ ، ٠)**. (ج) $(٦ - ٤)^{٢} + (٢\sqrt{٣} - ٢)^{٢} = ٤ + ١٢ = ١٦$ ✓. (د) ميل نصف القطر = $\frac{٢\sqrt{٣}}{٢} = \sqrt{٣}$ ← ميل المماس

$\frac{١}{-\sqrt{٣}}$: ص − $(٢\sqrt{٣} - ٢) = \frac{١}{-\sqrt{٣}}$ (س − ٦) ؛ بضرب الطرفين في $\sqrt{٣}$: $٣ص - ٦ + ٢\sqrt{٣} = -س + ٦$ ← **$س + ٣ص = ١٢ - ٢\sqrt{٣}$** ، وبضرب الطرفين في $\sqrt{٣}$: **$س + ٣ص = ١٢\sqrt{٣} - ٦$** ✓.

خالد كمال
khaled-math.surge.sh