الوحدة الرابعة: تحليل البيانات

ستتعلّم في هذه الوحدة كيف:

٤-١ تحسب وتستخدم الوسط الحسابي لبيانات أولية ومجمّعة ومعروضة في جدول متضمنة بيانات مشفرة.

٤-٢ تحسب وتستخدم التباين والانحراف المعياري لمجموعة من البيانات ، ولمجموعة بيانات مجمّعة من البيانات الأولية ، مع المجاميع أو المجاميع المشفّرة ($\Sigma س$ ، $\Sigma س^{٢}$ ، $\Sigma(س - أ)$ ، $\Sigma(س - أ)^{٢}$).

معرفة قبلية

تعلّمت سابقًا (الصف العاشر ، الوحدة الخامسة) أن تحسب الوسط الحسابي لبيانات مفردة أو منفصلة ، وأن تستخدم الحاسبة بكفاءة وتطبّق اختبارات الدقة المناسبة.

اختبر مهاراتك: ١) أوجد الوسط الحسابي للأعداد ٧,٣ ، ٣,٩ ، ١,٣ ، ٦,٦ ، ٩,٢ ، ٤,٧ ، ٣,٩ ، ٣,١

٢) استخدم الآلة الحاسبة لتوجد قيمة $\frac{٦ \times ١,٧ + ٨ \times ١,٩ + ١١ \times ٢,١}{٦ + ٨ + ١١}$ ثم تحقّق من أن الناتج منطقي.

الإجابة: (١) ٥ (٢) ١,٩٤ (قيمة بين ١,٧ و ٢,١ كما هو متوقع لأنه وسط مرجَّح)

المفردات

النزعة المركزية central tendency • البيانات المشفرة coded data • الوسط الحسابي mean • التباين variance • الانحراف المعياري standard deviation

لماذا ندرس تحليل البيانات؟ تعدّ القدرة على فهم البيانات وتنظيمها وترتيبها ثم تحليلها وتفسير نتائجها من المهارات المهمة في الحياة نظرًا لارتباطها باتخاذ القرار وحل المشكلات في العديد من المجالات ؛ فالتقنيات التي سيتم دراستها في هذه الوحدة مفيدة لدراسة مواضيع مختلفة في الجامعة وعند قراءة الأخبار.

١-٤ الوسط الحسابي (المعدل)

يُعدّ الوسط الحسابي من أشهر مقاييس **النزعة المركزية** central tendency. نستخدم مقاييس النزعة المركزية لتلخيص القيم في مجموعة بيانات ؛ حيث يمكن إيجاد مجموع قيم البيانات من وسطها الحسابي.

مساعدة: تشير مقاييس النزعة المركزية إلى أنواع مختلفة ، وهي: الوسط الحسابي (سندرسه في هذه الوحدة) ، بالإضافة إلى الوسيط والمنوال (وقد تمت تغطيتها في الصفوف السابقة).

افترض مثلًا أن الوسط الحسابي لـ ١٢ قيمة هو ٧,٥. إذن: الوسط الحسابي = $\frac{\text{مجموع قيم البيانات}}{\text{عدد القيم}}$ ← $\frac{\text{مجموع قيم البيانات}}{١٢}$ = ٧,٥ ← مجموع قيم البيانات = ٧,٥ × ١٢ = ٩٠.

ستتعلّم الحسابات التي تتضمّن الوسط الحسابي ، لذا سنقدم رمزًا يُستخدم بدلًا من التعريف اللغوي أعلاه. سنستخدم الحرف الإغريقي 'سيجما' ، ويكتب في صورة Σ لتمثيل 'المجموع' ، وسنستخدم أيضًا الرمز س لتمثيل الوسط الحسابي ، حيث يمثل س قيم البيانات.

يبيّن الجدول الآتي كيفية استخدام الصيغة للبيانات المجمّعة وغير المجمّعة في صفوف منفصلة:

	القيم	تكرار قيم البيانات	عدد قيم البيانات	مجموع قيم البيانات	الوسط الحسابي
غير مجمّعة (مفرَدة)	س	–	ن	Σس	$\overline{\text{س}} = \frac{\Sigma \text{س}}{\text{ن}}$
مجمّعة	س	ت	Σت	Σس ت	$\overline{\text{س}} = \frac{\Sigma \text{س ت}}{\Sigma \text{ت}}$

مساعدة: تستخدم ن = Σت للبيانات المجمّعة.

نتيجة ١

الوسط الحسابي للبيانات غير المجمّعة هو $\overline{\text{س}} = \frac{\Sigma \text{س}}{\text{ن}}$. أمّا للبيانات المجمّعة فهو $\overline{\text{س}} = \frac{\Sigma \text{س ت}}{\Sigma \text{ت}}$ ، أو $\frac{\Sigma \text{س ت}}{\text{ن}}$.

مساعدة: ∑س ت يشير إلى مجموع ناتج ضرب كل قيمة في تكرارها ؛ فمثلًا ، مجموع خمس عشرينات وست عشرات = (٥ × ٢٠) + (٦ × ١٠) = ١٦٠.

مثال ١

الوسط الحسابي لكتل خمسة عمّال يساوي ٧٠٫٢ كغم. يريد هؤلاء العمّال حمل الإسمنت والصعود به إلى سطح عمارة باستخدام المصعد. أوجد أكبر كتلة من الإسمنت التي يمكنهم أن يحملوها إذا كانت الكتلة العظمى المسموح بها للمصعد هي ٥٠٠ كغم.

الحلّ: $\sum س = ن \times \overline{س} = ٥ \times ٧٠٫٢ = ٣٥١$ كغم (مجموع كتل العمّال).

نشكّل معادلة في ص لتمثل أكبر كتلة ممكنة من الإسمنت: ٣٥١ + ص = ٥٠٠ ← ص = ١٤٩.

أكبر كتلة من الإسمنت مسموح حملها هي ١٤٩ كغم.

مثال ٢

أوجد الوسط الحسابي لأربعين قيمة لـ س المعطاة في الجدول الآتي:

س	٣١	٣٢	٣٣	٣٤	٣٥
ت	٥	٧	٩	٨	١١

الحلّ:

مثال ٢ (تابع)

س	٣١	٣٢	٣٣	٣٤	٣٥	
ت	٥	٧	٩	٨	١١	∑ت = ٤٠
س × ت	١٥٥	٢٢٤	٢٩٧	٢٧٢	٣٨٥	∑س ت = ١٣٣٣

أوجد مجموع الـ ٤٠ قيمة (∑س × ت) بجمع ناتج ضرب كل قيمة من قيم س في تكرارها.

الوسط الحسابي $\overline{(س)} = \frac{\sum س\ ت}{\sum ت} = \frac{١٣٣٣}{٤٠} = ٣٣,٣٢٥$

مجموعات البيانات المجمّعة

هناك طرائق لتجميع مجموعات البيانات ، وسنستخدم في هذه الوحدة جميع القيم معًا. فلإيجاد الوسط الحسابي لمجموعتَي بيانات مجمّعة ، علينا أن نقسم مجموع كل القيم في المجموعتين على المجموع الكلي لعدد القيم.

على سبيل المثال: عند تجميع مجموعة البيانات ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ مع مجموعة البيانات ٤ ، ٥ ، ٦ نحصل على مجموعة البيانات الجديدة المكوّنة من سبع قيم هي: ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٤ ، ٥ ، ٦ (لاحظ ظهور القيمة ٤ مرّتين).

الوسط الحسابي للمجموعة الأولى = $\frac{١ + ٢ + ٣ + ٤}{٤}$ = ٢,٥ ، والوسط الحسابي للمجموعة الثانية = $\frac{٤ + ٥ + ٦}{٣}$ = ٥

الوسط الحسابي للمجموعة المجمّعة = $\frac{١ + ٢ + ٣ + ٤ + ٤ + ٥ + ٦}{٣ + ٤} = ٣\frac{٤}{٧}$

مساعدة: لاحظ أن الوسط الحسابي لمجموعتَي البيانات لا يساوي $\frac{٢,٥ + ٥}{٢}$.

مثال ٣

تحتوي علبة كبيرة على ٧٢ قطعة حلوى وكتلتها الكلية ٨٥٢,٤ غم ، وتحتوي علبة صغيرة على ٢٤ قطعة حلوى وكتلتها الكلية ٢٨٢,٨ غم. ما الوسط الحسابي لكتل الحلوى جميعها؟

الحلّ: مجموع قطع الحلوى = ٧٢ + ٢٤ = ٩٦ (أوجد مجموع عدد قطع الحلوى ومجموع كتلها).

المجموع الكلي لكتل قطع الحلوى = ٨٥٢,٤ + ٢٨٢,٨ = ١١٣٥,٢ غم.

الوسط الحسابي للكتل = $\frac{١١٣٥,٢}{٩٦}$ = ١١,٨٢٥ غم.

مساعدة: الكتل المعطاة مقرَّبة إلى أقرب منزلة عشرية واحدة ، حيث إن عدد قطع الحلوى صحيح ، وإن كتل العلب غير متضمّنة في المجاميع المعطاة.

خالد كمال
khaled-kamal-surge.sh

مثال ٤

لدى عائلة ٣٨ فيلمًا على أقراص مدمجة ، الوسط الحسابي لزمن تشغيل كل منها هو ساعة و٣٢ دقيقة ، ولديها أيضًا ٢٦ فيلم فيديو ، الوسط الحسابي لزمن تشغيل كل منها هو ساعتان و٤ دقائق. أوجد الوسط الحسابي لزمن تشغيل كل الأفلام لدى العائلة.

الحلّ: العدد الكلي للأفلام = ٣٨ + ٢٦ = ٦٤ فيلمًا.

(ساعة و٣٢ دقيقة × ٣٨) + (ساعتان و٤ دقائق × ٢٦) = (٩٢ × ٣٨) + (١٢٤ × ٢٦) = ٣٤٩٦ + ٣٢٢٤ = ٦٧٢٠ دقيقة (مجموع زمن تشغيل الـ ٦٤ فيلمًا).

الوسط الحسابي لزمن التشغيل = $\frac{٦٧٢٠}{٦٤}$ = ١٠٥ دقيقة أو ساعة و٤٥ دقيقة.

استكشاف ١

في المثال (٤) ، الوسط الحسابي لزمن التشغيل ١٠٥ دقيقة لا يساوي $\frac{٩٢ + ١٢٤}{٢}$ = ١٠٨. الوسط الحسابي لـ (أ) ، (ب) ≠ $\frac{\text{الوسط الحسابي (أ)} + \text{الوسط الحسابي (ب)}}{٢}$ ، ولكن ذلك لا يحدث دائمًا.

استكشاف ١ (تابع)

افترض أن مجموعتَي بيانات (أ) ، (ب) عدد قيم كل منهما م ، ن والوسط الحسابي لهما $\frac{\sum أ}{م}$ ، $\frac{\sum ب}{ن}$ على الترتيب: ما الحالة التي يكون فيها الوسط الحسابي لـ (أ) ، (ب) معًا يساوي $\frac{\text{الوسط الحسابي (أ) + الوسط الحسابي (ب)}}{٢}$ ؟

إجابة الاستكشاف (من حسابي): الوسط الحسابي للمجموعتين معًا = $\frac{\sum أ + \sum ب}{م + ن}$.

ويساوي $\frac{\frac{\sum أ}{م} + \frac{\sum ب}{ن}}{٢}$ *عندما تكون م = ن (أي المجموعتان بعدد القيم نفسه)؛*

لأنه حينئذ $\frac{\sum أ + \sum ب}{٢م}$ *. وكذلك يتحقق إذا تساوى وسطا المجموعتين.*

الوسط الحسابي في الجداول التكرارية المجمّعة (ذات الفئات)

عندما تقدَّم البيانات في جداول تكرارية مجمّعة ، أو في مدرج تكراري ، أو في منحنى تكراري تراكمي ، نفقد بعض المعلومات عن البيانات الأولية. لهذا السبب لا نستطيع تحديد الوسط الحسابي بدقة ، ولكن نستطيع حساب الوسط الحسابي التقديري. نقوم بذلك من خلال استخدام مراكز الفئات لتمثيل القيم في كل فئة.

نستخدم الصيغة $\overline{س} = \frac{\sum م ت}{\sum ت}$ الموجودة في النتيجة ١ لنحسب الوسط الحسابي التقديري ، حيث تمثل م مركز الفئة.

مثال ٥

تمّ تنظيم حبّات جوز الهند في ٧٥ صندوقًا ، في كل صندوق ٤٠ حبة لها الكتلة نفسها. ٤٦ صندوقًا تحتوي على حبّات جوز الهند كتلها الكلية من ٢٠ كغم إلى ٢٥ كغم ولا تساوي ٢٥ كغم. ٢٢ صندوقًا تحتوي على حبّات جوز الهند كتلها الكلية من ٢٥ كغم إلى ٤٠ كغم ولا تساوي ٤٠ كغم. ٧ صناديق تحتوي على حبّات جوز الهند كتلها الكلية من ٤٠ كغم إلى ٥٤ كغم ولا تساوي ٥٤ كغم.

(أ) احسب وسطًا حسابيًّا تقديريًّا لكتلة صندوق من جوز الهند. (ب) استخدم إجابتك في الجزئية (أ) لتحسب الوسط الحسابي التقديري لكتلة حبّة واحدة من جوز الهند.

الحلّ: (أ) نرتّب البيانات في جدول يتضمّن مراكز الفئات م ، ونواتج الضرب م × ت.

الكتلة (كغم)	−٢٠	−٢٥	٤٠−٥٤
عدد الصناديق (ت)	٤٦	٢٢	٧
مركز الفئة (م)	٢٢,٥	٣٢,٥	٤٧,٠
م × ت	١٠٣٥	٧١٥	٣٢٩

∑ت = ٧٥ ، ∑م ت = ٢٠٧٩ (تقدّر أن مجموع كتل ٧٥ صندوقًا هو ٢٠٧٩ كغم).

$$\overline{س} = \frac{\sum م\ ت}{\sum ت} = \frac{٢٠٧٩}{٧٥} = ٢٧,٧٢ \text{ كغم.}$$

(ب) نقسم إجابة الجزئية (أ) على ٤٠ لأن كل صندوق يحتوي على ٤٠ حبة: $\frac{٢٧,٧٢}{٤٠}$ = ٠,٦٩٣ كغم.

مساعدة: (−٢٠) تعني من القيمة ٢٠ إلى القيمة الأقل من ٢٥ ، و(−٢٥) تعني من القيمة ٢٥ إلى القيمة الأقل من ٤٠ ، وهكذا. إذا لم يكن طول الفئات هو نفسه ، فإن قيم المركز لن تتبع نمطًا محددًا.

مثال ٦

احسب الوسط الحسابي التقديري لأعمار ٥٠ طالبًا ، حيث يوجد ستة عشر طالبًا أعمارهم ١٨ سنة ، وعشرون طالبًا أعمارهم ١٩ سنة ، وأربعة عشر طالبًا أعمارهم إما ٢٠ أو ٢١ سنة.

الحلّ:

العمر بالسنوات (أ)	١٨ ≤ أ < ١٩	١٩ ≤ أ < ٢٠	٢٠ ≤ أ < ٢٢
عدد الطلبة (ت)	١٦	٢٠	١٤
مركز الفئة (م)	١٨,٥	١٩,٥	٢١,٠
م × ت	٢٩٦	٣٩٠	٢٩٤

مساعدة: الطلبة ذوو الأعمار ١٨ سنة تكون أعمارهم ١٨ سنة فأكثر ولكن لا تساوي ١٩. وكذلك ١٩ سنة فأكثر ولكن لا تساوي ٢٠ ، والطلبة ذوو الأعمار ٢٠ ، ٢١ سنة تكون أعمارهم ٢٠ سنة فأكثر ولكن لا تساوي ٢٢. فئات الأعمار والمجاميع الفعلية مبيَّنة في الجدول.

$\sum ت = ٥٠$ ، $\sum م ت = ٩٨٠$

الوسط الحسابي التقديري للأعمار $= \frac{\sum م ت}{\sum ت} = \frac{٩٨٠}{٥٠} = ١٩,٦$ سنة.

لاحظ أن:

الوسط الحسابي للحدود الدنيا $= \frac{١٨ \times ١٦ + ١٩ \times ٢٠ + ٢٠ \times ١٤}{٥٠} = ١٨,٩٦$

مثال ٦ (تابع)

الوسط الحسابي للحدود العليا = $\frac{١٩ \times ١٦ + ٢٠ \times ٢٠ + ٢٢ \times ١٤}{٥٠}$ = ٢٠,٢٤

المتوسط الحسابي = (١٨,٩٦ + ٢٠,٢٤) ÷ ٢ = ١٩,٦ سنة. (لاحظ أن متوسط الوسط الحسابي للحدود الدنيا والعليا يساوي الوسط الحسابي التقديري للأعمار).

البيانات المشفّرة

لتشفير مجموعة من البيانات ، يمكننا تحويل كل قيمها بإضافة ثابت موجب أو سالب ، ويؤدّي ذلك إلى مجموعة من البيانات تسمى البيانات المشفّرة coded data.

أحد أسباب التشفير هو جعل البيانات أسهل عند التعامل معها بالحسابات يدويًّا. كما يكون التعامل مع البيانات المشفرة أسهل أحيانًا من التعامل مع البيانات الأصلية (كأن نجعل الوسط الحسابي مناسبًا ، كالصفر مثلًا).

إذا كانت قيم س هي ١٠١ ، ١٠٣ ، ١٠٤ ، ١٠٩ ، ١١٣ فتكون ١ ، ٣ ، ٤ ، ٩ ، ١٣ هي القيم المناظرة لـ (س − ١٠٠). الوسط الحسابي للقيم المشفّرة هو $\frac{\Sigma(س - ١٠٠)}{٥}$ =

$\frac{١ + ٣ + ٤ + ٩ + ١٣}{٥}$ = ٦.

لقد طرحنا ١٠٠ من كل قيمة من قيم س ، لذا نجمع ١٠٠ إلى قيمة الوسط الحسابي المشفّر لنجد الوسط الحسابي لقيم س: الوسط الحسابي (س − ١٠٠) = ٦ ← س = ٦ + ١٠٠ = ١٠٦ ، أو $\overline{س}$ = $\frac{\Sigma(س - ١٠٠)}{٥}$ + ١٠٠ = ١٠٦.

مساعدة: لتشفير البيانات يمكنك اختيار أيّة قيمة عشوائية وطرحها من القيم المعطاة (١٠٠ في هذه الحالة) لأنها تجعل الحسابات أكثر سهولة.

بالاعتماد على المخطّط الآتي ، إذا طرحنا ب من مجموعة قيم س فإنها جميعًا تنسحب بمقدار −ب ، وكذلك وسطها الحسابي. وعليه يكون الوسط الحسابي لـ (س − ب) = $\overline{س}$ − ب.

مساعدة: إذا حذفنا الأقواس من ∑(س − ب) نحصل على ∑س − ∑ب ، والحد ∑ب يعني 'مجموع كل أحرف ب الموجودة' وعددها ن ، فيكون ∑(س − ب) = ∑س − ن ب.

نتيجة ٢

في البيانات المشفّرة يكون:

$\overline{س}$ = $\frac{∑(س - ب)}{ن}$ + ب (للقيم غير المجمّعة).

$\overline{س}$ = $\frac{∑(س - ب)ت}{∑ت}$ + ب (للقيم المجمّعة).

يمكن تلخيص هاتين الصيغتين بالصيغة: $\overline{س}$ = الوسط الحسابي (س − ب) + ب.

مثال ٧

تمّ تشفير أربعين قيمة لـ س كما هو مبيّن في الجدول الآتي:

س − ٣	−٠	−١٨	٢٤−٣٢
التكرار	٩	١٣	١٨

احسب الوسط الحسابي التقديري لقيم س.

مثال ٧ (تابع)

الحلّ:

س − ٣	٠–١٨	١٨–٢٤	٢٤–٣٢
التكرار	٩	١٣	١٨
مركز الفئة (ت) (م)	٩	٢١	٢٨
م × ت	٨١	٢٧٣	٥٠٤

نحسب الوسط الحسابي التقديري للبيانات المشفّرة باستخدام مراكز الفئات ٩ ، ٢١ ، ٢٨ ، ثم نزيد ٣ للحصول على الوسط الحسابي التقديري س:

$$\overline{\text{س}} = ٣ + \frac{\sum \text{م ت}}{\sum \text{ت}} = ٣ + \frac{(٩ \times ٩) + (٢١ \times ١٣) + (٢٨ \times ١٨)}{٤٠} = ٣ + \frac{٨٥٨}{٤٠} = ٢٤٫٤٥$$

مساعدة: ليس ضروريًّا أن تفكّ تشفير قيم س − ٣.

تمارين ٤-١

١) احسب الوسط الحسابي لكل ممّا يأتي:

أ) ٢٨ ، ١٦ ، ٨٣ ، ٧٢ ، ١٠٥ ، ٥٥ ، ٦ ، ٣٥

ب) ٧٫٣ ، ٨٫٦ ، ١١٫٧ ، ٩٫١ ، ١٫٧ ، ٤٫٢

ج) $٣\frac{١}{٢}$ ، ٥ $\frac{١}{٤}$ ، ٩ $\frac{٣}{٤}$ ، $-٤\frac{١}{٤}$ ، $٧\frac{٣}{٨}$

٢) (أ) الوسط الحسابي للأعداد ١٥ ، ٣١ ، ٤٧ ، ٨٣ ، ٩٧ ، ١١٩ ، ب^{٢} يساوي ٦٣ ، أوجِد قيم ب الممكنة.

(ب) الوسط الحسابي للأعداد ٦ ، ٢٩ ، ٣ ، ١٤ ، ق ، (ق + ٨) ، ق^{٢} ، (١٠ − ق) يساوي ٢٠ ، أوجِد قيم ق الممكنة.

٣) إذا علمت أن:

أ) ن = ١٤ ، $\sum$س = ٣٢٥,٥ ، فأوجِد قيمة $\overline{س}$.

ب) ن = ٤٥ ، $\overline{ص}$ = ٢٣,٦ ، فأوجِد قيمة $\sum$ص.

ج) $\sum$ع = ٤٥٩٨ ، $\overline{ع}$ = ٥٢,٢٥ ، فأوجِد عدد القيم في مجموعة البيانات.

د) $\sum$س ت = ٨٦ ، $\overline{س}$ = $٧\frac{١}{٦}$ ، فأوجِد قيمة $\sum$ت.

هـ) $\sum$ت = ١٣٥ ، $\overline{س}$ = ٠,٨٤٢ ، فأوجِد قيمة $\sum$س ت.

٤) أوجِد الوسط الحسابي لقيم س وقيم ص في الجدولين الآتيين:

أ

س	١٨,٠	١٨,٥	١٩,٠	١٩,٥	٢٠,٠
ت	٨	١٠	١٧	٢٤	١

ب

ص	٣,٦٢	٣,٦٥	٣,٦٨	٣,٧١	٣,٧٤
ت	١٢٧	٢٠٩	٣٢٢	٢٩١	٢٥١

٥) للبيانات المعطاة في الجدول الآتي:

ق	٧	٨	٩	١٠
ت	٩	١٣	أ	١١

إذا علمت أن $\overline{ق} = ٨\frac{٥}{٩}$ ، فاحسب قيمة أ.

٦) احسب الوسط الحسابي التقديري لقيم س وقيم ص المعطاة في الجدولين الآتيين:

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

أ

س	٠ ≤ س < ٢	٢ ≤ س < ٤	٤ ≤ س < ٨	٨ ≤ س < ١٤
ت	٨	٩	١١	٢

ب

ص	١٣ ≤ ص < ١٦	١٦ ≤ ص < ٢١	٢١ ≤ ص < ٢٨	٢٨ ≤ ص < ٣٣	٣٣ ≤ ص < ٣٦
ت	٧	١٧	٢٩	١٦	١١

٧) تقدّم ٥٠ طالبًا وطالبة لاختبار ما ، الوسط الحسابي لدرجات الـ ٢٢ طالبًا ٧١٪ ، والوسط الحسابي لدرجات الطالبات ٧٦٪. أوجِد الوسط الحسابي لدرجات الطلبة جميعهم.

٨) الوسط الحسابي للرواتب الشهرية لـ ١٢ سائقًا في شركة يساوي ٦٥٠ ريالًا عُمانيًّا. إذا تمّ توظيف سائق جديد فسينقص الوسط الحسابي للرواتب ٨ ريالات عُمانية. أوجِد الراتب الشهري للسائق الجديد.

٩) ★★ الوسط الحسابي لأعمار ١٦ عضوًا في نادي الكراتيه ٢٦ سنة و٣ أشهر. ترك أحد الأعضاء النادي وأصبح الوسط الحسابي لأعمار الأعضاء الباقين ٢٦ سنة. أوجِد عمر العضو الذي ترك النادي. وضّح سبب إمكانية عدم دقة الإجابة.

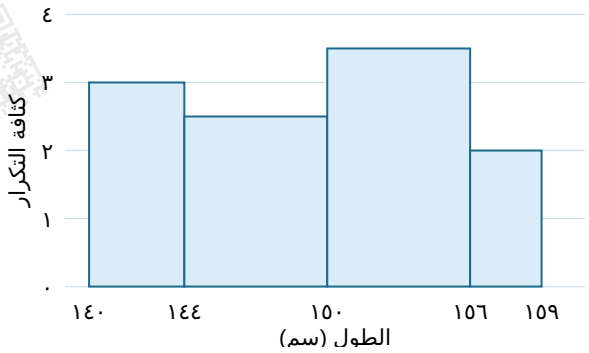
١٠) ★ يبيّن الجدول الآتي معدّل الأجور في الساعة (بالريال العُماني) لموظفي إحدى الشركات:

معدّل الأجور بالساعة (ريال عُماني)	٢	٣	٤	٣٦
عدد الموظفين (ت)	٨	١١	١٧	١

أ أوجِد الوسط الحسابي لأجور الموظفين.

ب هل الوسط الحسابي يمثل مقياسًا جيّدًا للأجور؟ أعطِ تفسيرًا لإجابتك.

١١) يمثّل المخطّط المجاور أطوال ٥٤ طفلًا بالسنتيمتر. تمّ تقسيم الأطفال إلى مجموعتَين متساويتَين في العدد: ‘نصف الأطفال طويلو القامة وتتألّف مجموعتهم من ٢٧ طفلًا’ و‘نصف الأطفال قصيرو القامة وتتألّف مجموعتهم من ٢٧ طفلًا أيضًا’. أعطِ تقديرًا للفرق بين الوسط الحسابي لأطوال هاتَين المجموعتَين من الأطفال.



مساعدة: في الأعمدة البيانية الموضّحة في التمرين (١١) ، يظهر التكرار حسب مساحة المستطيلات. كثافة التكرار = $\frac{\text{التكرار}}{\text{عرض الفئة}}$.

١٢) ★ يبيّن الجدول الآتي عدد حبّات الطماطم المزروعة في عدد من الأقسام في مزرعة ما:

عدد حبّات الطماطم	٢٠ – ٢٩	٣٠ – ٤٩	٥٠ – ٧٩	٨٠ – ١٠٠
عدد الأقسام (ت)	٣٢٩	٤١٣	٧٠٤	٢٥٨

احسب الوسط الحسابي التقديري لكمية الطماطم المنتجة في المزرعة.

١٣) إذا كان الوسط الحسابي لـ ١٠ قيم للمتغيّر س هو $\bar{س}$ = ٧,٤ ، فأوجِد:

أ) $\sum$س.

ب) $\sum$(س + ٢).

ج) $\sum$(س − ١).

١٤) إذا كان مجموع خمس وعشرين قيمة للمتغيّر ع معطى على النحو $\sum$(ع − ٧) = ٢٧٥ ، فأوجِد $\bar{ع}$.

١٥) إذا علمت أن $\bar{ع}$ = ٢٢ ، و$\sum$(ع − ٤) = ٣٦٧٢ ، فأوجِد عدد قيم ع.

١٦) إذا كان مجموع أطوال ٢٥٠٠ مسمار (س ملم) ، معطى بالعلاقة $\sum$(س − ٤٠) = ٨٧٥ ، فأوجِد الوسط الحسابي لأطوال المسامير.

١٧) ★★ تمّ تشفير بيانات ستّ قيم بطرح ١٣ من كلّ قيمة ، إذا كانت خمس من القيم المشفّرة هي ٩,٣ ، ٥,٤ ، ٣,٩ ، ٧,٦ ، ٢,٢ ، والوسط الحسابي للقيم الستّ قبل التشفير هو ١٧,٦ ، فأوجِد القيمة السادسة المشفّرة.

١٨) ★ الوسط الحسابي التقديري لسعة ١٢٠ ثلاجة موجودة في مستودع هو ٣٤٨ لترًا. سعة الثلاجات مبيّنة في الجدول الآتي:

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

السعة (لتر)	−١٦٠	−٢٠٠	−٣٢٠	٤٠٠ − ل
عدد الثلاجات (ت)	١٢	٢٨	٤٨	٣٢

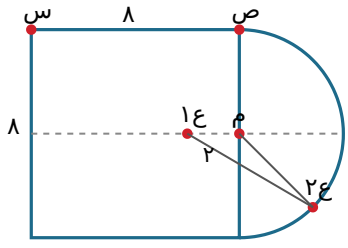
وصل إلى المستودع شحنة جديدة من الثلاجات عددها ن جميعها من سعة بين ٢٠٠ و٣٢٠ لترًا. أدّى ذلك إلى نقصان الوسط الحسابي للسعة بمقدار ٨ لترات. أوجِد قيمة ن.

١٩) ★ تم تأثيث ٧٢ غرفة في فندق جديد. يبيّن الجدول الآتي عدد الغرف التي اكتمل تأثيثها خلال أول ١٠ أيام من العمل:

عدد الغرف المؤثثة	٥	٦ أو ٧
عدد الأيام (ت)	٢	٨

اعتمادًا على الأعداد المعطاة (يجب أن يستخدم الزوار ٦,٥ كمركز للفئة ٦ و٧) ، قدّر عدد الأيام الإضافية اللازمة لإنهاء المهمّة. ما الفرضيات التي اعتمدتها في الحلّ؟

٢٠) ★ في الشكل المجاور: تجاور مربّع طول ضلعه ٨ سم مع نصف دائرة مركزها م. تقع النقطة ع على محور تماثل الشكل وتبعد مسافة ٢ سم عن النقطة م. النقطتان س ، ص ثابتتان لكن موقع النقطة ع متغيّر على محيط الشكل:



أ أوجِد الوسط الحسابي لطول المسافة من النقطة ع إلى كل من س ، ص ، ع عندما يكون قياس الزاوية ع م$\hat{}$ع يساوي:

(ا) ١٨٠° (٢) ١٣٥°

ب أوجِد قياس الزاوية المنفرجة ع م$\hat{}$ع ليكون الوسط الحسابي لطول المسافة من النقطة ع إلى كل من س ، ص ، ع مطابقًا للوسط الحسابي من النقطة ع إلى النقطة س والنقطة ص.

⚠ **خطأ في الكتاب:** في التمرين ٢٠ يستخدم الكتاب الحرف ع لنقطتين مختلفتين (النقطة الثابتة على محور التماثل على بعد ٢ سم من م ، والنقطة المتحرّكة على محيط نصف الدائرة). في الحلّ سمّيتهما: ع١ (الثابتة) و ع٢ (المتحرّكة) ليكون المعنى واضحًا.

ورقة الإجابات النموذجية ٤-ا

ملاحظة: الإجابات من حسابي لأن كتاب الطالب لا يتضمن مفتاح إجابات.

١) (أ) مجموع القيم ٤٠٠ ← $\overline{\text{س}} = \frac{٤٠٠}{٨} = ٥٠$ (ب) $\overline{\text{س}} = \frac{٤٢٫٦}{٦} = ٧٫١$ (ج) $\overline{\text{س}} = \frac{٢١٫٦٢٥}{٥} = ٤٫٣٢٥$

٢) (أ) $\frac{٣٩٢ + \text{ب}^{٢}}{٧} = ٦٣ \leftarrow ٣٩٢ + \text{ب}^{٢} = ٤٤١ \leftarrow \text{ب}^{٢} = ٤٩ \leftarrow \text{ب} = ٧$ أو ب = −٧.

(ب) مجموع القيم = ٢٠ × ٨ = ١٦٠. المجموع = ٥٢ + ق + (ق + ٨) + ق^{٢} + (١٠ − ق) = ق^{٢} + ق + ٧٠ ← ق^{٢} + ق − ٩٠ = ٠ ← (ق − ٩)(ق + ١٠) = ٠ ← ق = ٩ أو ق = −١٠.

٣) (أ) $\bar{س}$ = $\frac{٣٢٥,٥}{١٤}$ = ٢٣,٢٥ (ب) ∑ص = ٤٥ × ٢٣,٦ = ١٠٦٢ (ج) ن = $\frac{٤٥٩٨}{٥٢,٢٥}$ = ٨٨ قيمة

(د) ∑ت = $\frac{٨٦}{\frac{١}{٦}٧}$ = $\frac{٦×٨٦}{٤٣}$ = ١٢ (هـ) ∑س ت = ٠,٨٤٢ × ١٣٥ = ١١٣,٦٧

٤) (أ) ∑ت = ٦٠ ، ∑س ت = ١١٤٠ ← $\bar{س}$ = $\frac{١١٤٠}{٦٠}$ = ١٩

(ب) ∑ت = ١٢٠٠ ، ∑ص ت = ٤٤٢٥,٩ ← $\bar{ص}$ = $\frac{٤٤٢٥,٩}{١٢٠٠}$ = ٣,٦٨٨ (لأقرب ٣ منازل عشرية)

٥) ∑ق ت = ٦٣ + ١٠٤ + أ٩ + ١١٠ = ٢٧٧ + أ٩ ، ∑ت = ٣٣ + أ. ٨ $\frac{٥}{٩}$ = $\frac{٧٧}{٩}$ ← ٩(٢٧٧ + أ٩) = ٧٧(٣٣ + أ) ← ٢٤٩٣ + ٨١أ = ٢٥٤١ + ٧٧أ ← ٤أ = ٤٨ ← أ = ١٢.

٦) (أ) المراكز ١ ، ٣ ، ٦ ، ١١: ∑م ت = ٨ + ٢٧ + ٦٦ + ٢٢ = ١٢٣ ، ∑ت = ٣٠ ← $\bar{س}$ = $\frac{١٢٣}{٣٠}$ = ٤,١

(ب) المراكز ١٤,٥ ، ١٨,٥ ، ٢٤,٥ ، ٣٠,٥ ، ٣٤,٥: ∑م ت = ١٠١,٥ + ٣١٤,٥ + ٧١٠,٥ + ٤٨٨ + ٣٧٩,٥ = ١٩٩٤ ، ∑ت = ٨٠ ← $\bar{ص}$ = $\frac{١٩٩٤}{٨٠}$ = ٢٤,٩٢٥

٧) عدد الطالبات = ٢٨. المجموع = ٢٢ × ٧١ + ٢٨ × ٧٦ = ١٥٦٢ + ٢١٢٨ = ٣٦٩٠ ← الوسط = $\frac{٣٦٩٠}{٥٠}$ = ٧٣٫٨٪

٨) مجموع الرواتب = ١٢ × ٦٥٠ = ٧٨٠٠. الوسط الجديد = ٦٤٢ لـ ١٣ سائقًا ← المجموع الجديد = ٨٣٤٦ ← راتب السائق الجديد = ٨٣٤٦ − ٧٨٠٠ = ٥٤٦ ريالًا عُمانيًّا.

٩) المجموع = ١٦ × ٢٦٫٢٥ = ٤٢٠ ، مجموع أعمار الـ ١٥ الباقين = ١٥ × ٢٦ = ٣٩٠ ← عمر العضو = ٤٢٠ − ٣٩٠ = ٣٠ سنة. سبب عدم الدقة: الأعمار مقرّبة (٢٦ سنة قد تكون مقرّبة إلى أقرب سنة أو أقرب شهر) ، وخطأ تقريب الوسط للأعضاء الـ ١٥ يُضرب في ١٥ فيتضاعف أثره في الناتج.

١٠) (أ) ∑ت = ٣٧ ، ∑س ت = ١٦ + ٣٣ + ٦٨ + ٣٦ = ١٥٣ ← الوسط = $\frac{١٥٣}{٣٧}$ ≈ ٤٫١٣٥ ريالًا عُمانيًّا في الساعة.

(ب) لا ؛ فمعظم الموظفين (٣٦ من ٣٧) أجورهم بين ٢ و٤ ريالات ، بينما موظف واحد أجره ٣٦ ريالًا (قيمة شاذة) رفعت الوسط الحسابي فصار أكبر من أجور ٣٦ موظفًا منهم ؛ فهو لا يمثّل الأجور جيّدًا.

١١) التكرار = كثافة التكرار × عرض الفئة: ٣ × ٤ = ١٢ ، ٢٫٥ × ٦ = ١٥ ، ٣٫٥ × ٦ = ٢١ ، ٢ × ٣ = ٦ (المجموع ٥٤ ✓).

القصار (٢٧): الفئتان الأوليان (١٢ + ١٥ = ٢٧) ، المراكز ١٤٢ ، ١٤٧: $\overline{س}$ = $\frac{١٤٢ \times ١٢ + ١٤٧ \times ١٥}{٢٧}$ = $\frac{٣٩٠٩}{٢٧}$ ≈ ١٤٤٫٧٨ سم.

الطوال (٢٧): الفئتان الأخيرتان (٢١ + ٦ = ٢٧) ، المراكز ١٥٣ ، ١٥٧٫٥: $\bar{س}$ = $\frac{١٥٣ \times ٢١ + ١٥٧٫٥ \times ٦}{٢٧}$ = $\frac{٤١٥٨}{٢٧}$ = ١٥٤ سم.

الفرق ≈ ١٥٤ − ١٤٤٫٧٨ = ٩٫٢٢ سم.

١٢) المراكز ٢٤٫٥ ، ٣٩٫٥ ، ٦٤٫٥ ، ٩٠ ← ∑م ت = ٨٠٦٠٫٥ + ١٦٣١٣٫٥ + ٤٥٤٠٨ + ٢٣٢٢٠ = ٩٣٠٠٢ ، ∑ت = ١٧٠٤ ← $\bar{س}$ = $\frac{٩٣٠٠٢}{١٧٠٤}$ ≈ ٥٤٫٥٨ حبّة في القسم الواحد. (الكمية الكلية المقدَّرة = ٩٣٠٠٢ حبّة).

١٣) (أ) ∑س = ١٠ × ٧٫٤ = ٧٤ (ب) ∑(س + ٢) = ٧٤ + ٢٠ = ٩٤ (ج) ∑(س − ١) = ٧٤ − ١٠ = ٦٤

١٤) ∑(ع − ٧) = ٢٧٥ ← الوسط الحسابي (ع − ٧) = $\frac{٢٧٥}{٢٥}$ = ١١ ← $\bar{ع}$ = ١١ + ٧ = ١٨.

١٥) الوسط الحسابي (ع − ٤) = ٢٢ − ٤ = ١٨ ← ن = $\frac{٣٦٧٢}{١٨}$ = ٢٠٤ قيمة.

١٦) الوسط الحسابي (س − ٤٠) = $\frac{٨٧٥}{٢٥٠٠}$ = ٠٫٣٥ ← $\bar{س}$ = ٤٠ + ٠٫٣٥ = ٤٠٫٣٥ ملم.

١٧) الوسط الحسابي للقيم المشفّرة = ١٧٫٦ − ١٣ = ٤٫٦ ← مجموع القيم المشفّرة الستّ = ٦ × ٤٫٦ = ٢٧٫٦. مجموع الخمس المعطاة = ٢٨٫٤ ← القيمة السادسة المشفّرة = ٢٧٫٦ − ٢٨٫٤ = −٠٫٨. (القيمة الأصلية = ١٣ − ٠٫٨ = ١٢٫٢).

١٨) الفئات (حسب قراءتي للجدول: كل فئة تبدأ بالعدد المكتوب وتنتهي عند بداية التي بعدها): ١٦٠–٢٠٠ (م = ١٨٠) ، ٢٠٠–٣٢٠ (م = ٢٦٠) ، ٣٢٠–٤٠٠ (م = ٣٦٠) ، ٤٠٠–ل. مجموع السعات = ١٢٠ × ٣٤٨ = ٤١٧٦٠ ← ١٢ × ١٨٠ + ٢٨ × ٢٦٠ + ٤٨ × ٣٦٠ + ٣٢ × $\frac{٤٠٠ + ل}{٢}$ = ٤١٧٦٠ ← ٢٦٧٢٠ + ١٦(٤٠٠ + ل) = ٤١٧٦٠ ← ل = ٥٤٠.

الوسط الجديد = ٣٤٨ − ٨ = ٣٤٠: $\frac{٤١٧٦٠ + ٢٦٠ن}{١٢٠ + ن}$ = ٣٤٠ ← ٤١٧٦٠ + ٢٦٠ن = ٤٠٨٠٠ + ٣٤٠ن ← ٩٦٠ = ٨٠ن ← ن = ١٢.

ملاحظة: القيمة ل (حرف) في آخر فئة قُرئت كما هي في الكتاب ؛ وجدتها ٥٤٠ لتحقيق الوسط المعطى.

١٩) مجموع الغرف المؤثثة في ١٠ أيام ≈ ٥ × ٢ + ٦٫٥ × ٨ = ١٠ + ٥٢ = ٦٢ ، أي بمعدل ٦٫٢ غرفة في اليوم. الباقي = ٧٢ − ٦٢ = ١٠ غرف ← ١٠ ÷ ٦٫٢ ≈ ١٫٦١ ← نحتاج إلى يومين إضافيين تقريبًا (٢ يوم).

الفرضيات: (١) أن معدّل التأثيث اليومي يبقى ٦٫٢ غرفة في اليوم نفسه. (٢) أن المركز ٦٫٥ يمثّل الأيام التي أُنجز فيها ٦ أو ٧ غرف (أي أن المتوسط فيها ٦٫٥). (٣) أن العمل يستمر بالوتيرة ذاتها دون عوائق.

٢٠) نضع المحاور: م = (٨ ، ٤) ، س = (٠ ، ٨) ، ص = (٨ ، ٨) ، النقطة الثابتة ع١ = (٦ ، ٤) (على بعد ٢ سم من م). المسافتان الثابتتان: ع١س = $\sqrt{٥٢}$ ≈ ٧٫٢١١ سم ، ع١ص = $\sqrt{٢٠}$ ≈ ٤٫٤٧٢ سم.

(أ) (١) عند ١٨٠° تقع ع٢ عند (١٢ ، ٤) وتكون ع١ع٢ = ٦ سم. الوسط = $\frac{٦ + ٤٫٤٧٢ + ٧٫٢١١}{٣}$ ≈ ٥٫٨٩ سم.

(٢) عند ١٣٥° تقع ع٢ عند (٨ + ٢√٢ ، ٤ − ٢√٢) ≈ (١٠,٨٢٨ ، ١,١٧٢) ، ع١ع٢ ≈ ٥,٥٩٦ سم (قانون جيب التمام: ٤ + ١٦ − ١٦ جتا ١٣٥° = ٣١,٣١). الوسط = $\frac{٧,٢١١ + ٤,٤٧٢ + ٥,٥٩٦}{٣}$ ≈ ٥,٧٦ سم.

(ب) الوسط الحسابي للمسافتين ثابتتين = $\frac{٧,٢١١ + ٤,٤٧٢}{٢}$ ≈ ٥,٨٤٢ سم. إضافة قيمة ثالثة لا تغيّر الوسط إلا إذا كانت تساويه ، فنحتاج ع١ع٢ ≈ ٥,٨٤٢ سم. بقانون جيب التمام في المثلث ع١ م ع٢: (٥,٨٤٢)٢ = ٤ + ١٦ − ١٦ جتا θ ← جتا θ = −٠,٨٨٣ ≈ ١٥٢° (منفرجة ✓).

ملاحظة: مسألة ٢٠ فيها حرف ع لنقطتين ؛ حلّلتها بالقراءة المذكورة أعلاه.

٤-٢ التباين والانحراف المعياري

الوسط الحسابي يخبرنا عن مركز البيانات فقط ، أمّا **مقاييس التشتت** فتخبرنا مدى تباعد القيم أو تقاربها. من أهمّ هذه المقاييس **التباين** variance و**الانحراف المعياري** standard deviation.

استكشاف ٢

الوسط الحسابي لخمسة أعداد هو ١٠. أوجِد انحراف كل عدد عن الوسط (س − $\overline{س}$) ، ثم مربّع كل انحراف ، ثم متوسط المربّعات.

التباين هو الوسط الحسابي لمربّعات انحرافات القيم عن وسطها الحسابي:

نتيجة ٣

للبيانات غير المجمّعة: تباين (س) = $\frac{\sum(س - \overline{س})^{٢}}{ن} = \frac{\sum س^{٢}}{ن} - (\overline{س})^{٢}$

للبيانات المجمّعة: تباين (س) = $\frac{\sum(س - س)^{٢} ت}{\sum ت} = \frac{\sum س^{٢} ت}{\sum ت} - (\overline{س})^{٢}$

الانحراف المعياري = $\sqrt{\text{التباين}}$.

مساعدة: الانحراف المعياري له وحدة قياس البيانات نفسها ، أمّا التباين فوحدته مربّع وحدة البيانات. كلما كان الانحراف المعياري أصغر كانت القيم أقرب إلى الوسط الحسابي.

مثال تمهيدي: ماكينة قهوة تُفترض أن تملأ الكوب بـ ٤٠٠ مل. الماكينة التي انحرافها المعياري أصغر هي الأدق ، لأن مقادير التعبئة فيها أقرب إلى ٤٠٠ مل.

مثال ٨

أوجِد الوسط الحسابي والانحراف المعياري للأعداد ٣ ، ٩ ، ١٥ ، ٢٤ ، ٢٩. ثم حدّد العددين اللذين يقعان خارج المجال (الوسط ± الانحراف المعياري).

الحلّ: $\sum س = ٨٠$ ، $\sum س^{٢} = ٩ + ٨١ + ٢٢٥ + ٥٧٦ + ٨٤١ = ١٧٣٢$ ، $ن = ٥ \leftarrow \overline{س} = ١٦$.

التباين = $\frac{١٧٣٢}{٥} - ١٦^{٢} = ٣٤٦٫٤ - ٢٥٦ = ٩٠٫٤ \leftarrow$ الانحراف المعياري = $\sqrt{٩٠٫٤} \approx ٩٫٥١$.

المجال: $١٦ - ٩٫٥١ = ٦٫٤٩$ ، $١٦ + ٩٫٥١ = ٢٥٫٥١ \leftarrow$ (٦٫٤٩ ، ٢٥٫٥١). العددان خارج المجال: ٣ و ٢٩.

مثال ٩

أوجِد الانحراف المعياري لقيم س في الجدول الآتي مقرّبًا إلى ٣ أرقام معنوية (س = ١٢ ، ١٤ ، ١٦ بتكرارات ١٣ ، ٢٨ ، ١٠ على الترتيب):

الحلّ:

س	١٢	١٤	١٦	
ت	١٣	٢٨	١٠	∑ت = ٥١
س × ت	١٥٦	٣٩٢	١٦٠	∑س ت = ٧٠٨
س² × ت	١٨٧٢	٥٤٨٨	٢٥٦٠	∑س² ت = ٩٩٢٠

الانحراف المعياري = $\sqrt{\frac{٩٩٢٠}{٥١} - (\frac{٧٠٨}{٥١})^{٢}}$ ≈ ١,٣٤

ماذا لو قرّبنا الوسط ؟ $\frac{٧٠٨}{٥١}$ ≈ ١٣,٩. عندها $\sqrt{\frac{٩٩٢٠}{٥١} - ١٣,٩^{٢}}$ ≈ ١,١٤ ، أي بخطأ ٠,٢ (حوالي ١٥٪). لذلك نستخدم دائمًا القيمة الدقيقة للوسط عند حساب التباين.

مثال ١٠

قيست أطوال ٢٠ نبتة (بالمتر) وسُجّلت في جدول: ١,٢ – < ١,٤ (٢ نبتة) ، ١,٤ – < ١,٥ (١٢ نبتة) ، ١,٥ – < ١,٧ (٦ نبتات). أوجِد الانحراف المعياري التقديري.

الحلّ: المراكز: ١,٣ ، ١,٤٥ ، ١,٦.

مثال ١٠ (تابع)

م	١٫٣	١٫٤٥	١٫٦	
ت	٢	١٢	٦	∑ت = ٢٠
م × ت	٢٫٦	١٧٫٤	٩٫٦	∑م ت = ٢٩٫٦
م^{٢} × ت	٣٫٣٨	٢٥٫٢٣	١٥٫٣٦	∑م^{٢} ت = ٤٣٫٩٧

الانحراف المعياري التقديري = $\sqrt{\frac{٤٣٫٩٧}{٢٠} - (\frac{٢٩٫٦}{٢٠})^{٢}}$ ≈ ٠٫٠٩ م.

مثال ١١

لـ ٢٥ قيمة للمتغيّر س: ∑س = ٢٧٥ ، والتباين = ٧. أوجِد ∑س^{٢}.

الحلّ: $\overline{س} = \frac{٢٧٥}{٢٥} = ١١ \leftarrow ٧ = \frac{\sum س^{٢}}{٢٥} - ١١^{٢} \leftarrow \sum س^{٢} = ٢٥ \times ١٢٨ = ٣٢٠٠$.

استكشاف ٣

في خمسة اختبارات حصل عامر على الدرجات س ، وبدر على (س − ١) ، وسالم على (س + ٣). لاحظ أن التباين والانحراف المعياري متساويان للثلاثة (التباين = ٩٫٢ ، الانحراف = ٣٫٠٣). الوسط الحسابي هو الذي يتغيّر فقط ، بينما التشتت لا يتغيّر عند إضافة ثابت لكل القيم.

نتيجة ٤ (البيانات المشفّرة)

التباين (س) = التباين (س − ب) ، أي أن طرح (أو إضافة) ثابت من كل القيم لا يغيّر التباين ولا الانحراف المعياري.

للبيانات غير المجمّعة: التباين = $\frac{\Sigma(\text{س} - \text{ب})^{٢}}{\text{ن}} - \left(\frac{\Sigma(\text{س} - \text{ب})}{\text{ن}}\right)^{٢}$

للبيانات المجمّعة: التباين = $\frac{\Sigma(\text{س} - \text{ب})^{٢}\text{ت}}{\Sigma\text{ت}} - \left(\frac{\Sigma(\text{س} - \text{ب})\text{ت}}{\Sigma\text{ت}}\right)^{٢}$

مثال ١٢

تباين القيم المشفّرة (س − ١٠٠٠) يساوي ٤,١٢. أوجِد تباين القيم س.

الحلّ: التباين (س) = التباين (س − ١٠٠٠) = ٤,١٢.

جمع مجموعتين من البيانات

لمجموعتين من البيانات س ، ص عدد قيمهما نس ، نص: الوسط الحسابي للمجموعتين معًا = $\frac{\Sigma\text{س} + \Sigma\text{ص}}{\text{نس} + \text{نص}}$ ، والتباين = $\frac{\Sigma\text{س}^{٢} + \Sigma\text{ص}^{٢}}{\text{نس} + \text{نص}} - \left(\frac{\Sigma\text{س} + \Sigma\text{ص}}{\text{نس} + \text{نص}}\right)^{٢}$.

تمارين ٤-٢

١) أوجِد الوسط الحسابي والانحراف المعياري لكل ممّا يأتي:

أ ٢٧ ، ٤٣ ، ٢٩ ، ٣٤ ، ٥٣ ، ٣٧ ، ١٩ ، ٥٨

ب ٦,٢ ، −٨,٥ ، ٧,٧ ، −٣,٤ ، ٥,١٣ ، −٩,١١

٢) يبيّن الجدول الآتي درجات إبراهيم في مواد العلوم لثلاث سنوات متتالية:

الأحياء	٢١ ، ٣٣ ، ٤٥
الكيمياء	٤١ ، ٥٣ ، ٦٥
الفيزياء	٥١ ، ٦٣ ، ٧٥

أ احسب التباين لدرجات إبراهيم في كل مادة من المواد الثلاث.

ب فسّر النتائج الثلاث التي حصلت عليها في الجزئية (أ). هل ينطبق التفسير نفسه على الوسط الحسابي لدرجات إبراهيم في كل مادة؟

٣) يبيّن الجدول الآتي عدد أشجار النخيل لدى ٣٥ عائلة:

عدد أشجار النخيل	٠	١	٢	٣	٤	٥
عدد العائلات (ت)	٦	١٢	٩	٤	٣	١

أوجِد الوسط الحسابي والتباين لعدد أشجار النخيل.

٤) يبيّن الجدول الآتي عدد الأكواز (ثمرة الذرة) التي تنتجها ٣٦٠ نبتة ذرة:

عدد الأكواز	٠	١	٢	٣	٤
عدد نبتات الذرة (ت)	١١	٧٥	١٨٥	٨١	٨

احسب الوسط الحسابي والانحراف المعياري لعدد أكواز الذرة.

٥) يبيّن الجدول الآتي عدد الدقائق التي يستغرقها ٤٠ طالبًا و ٣٠ طالبة لإنجاز الواجب المنزلي:

الدقائق المستغرقة	٢٠–	٣٠–	٤٠–	٦٠–٨٠
عدد الطالبات (ت)	٦	١٤	٧	٣
عدد الطلاب (ت)	١٥	١١	٧	٧

أ احسب الوسط الحسابي التقديري والانحراف المعياري التقديري للزمن المستغرق لكل الطالبات ، ثم لكل الطلاب.

ب قارن بين الزمن المستغرق للمجموعتَين من خلال: (١) الوسط الحسابي التقديري. (٢) الانحراف المعياري التقديري.

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

٦) يبيّن الجدول الآتي أطوال ٥٠ عضًا مقرّبة إلى أقرب سنتيمتر:

الطول (سم)	١٥–١٧	١٨–٢٤	٢٥–٢٩	٣٠–٣٧
عدد العصي (ت)	١٣	١٨	١١	٨

احسب الانحراف المعياري التقديري لأطوال العصي.

٧) يبيّن الجدول الآتي مجموعة من البيانات للمتغيّر س:

س	١٥	١٦	١٧	١٨	١٩	٢٠
ت	٢ك	ك + ٥	ك − ٣	١٠	٨	٣

أ أوجِد قيمة ك. (علمًا أن $\overline{س}$ = ١٧)

ب احسب التباين للمتغيّر س إذا علمت أن $\overline{س}$ = ١٧.

٨) يلخّص الجدول الآتي أطوال ١٥٠ طفلًا (بالسنتيمتر):

الطول (سم)	١٤٠ إلى ١٤٤	١٤٤ إلى ١٥٠	١٥٠ إلى ١٦٠	١٦٠ إلى ١٦٥
عدد الأطفال (ت)	أ	ب	٦٩	٢٨

خالد كمال
khaled-math.stage.sh

أ إذا علمت أن الوسط الحسابي التقديري للطول يساوي ١٥٣,١٤ سم ، فبيّن أن ١٤٢ أ + ١٤٧ ب = ٧٧٢٦ ، ثم احسب قيمة كل من أ ، ب.

ب احسب الانحراف المعياري التقديري للطول.

٩) إذا علمت أن:

أ $\sum و^{٢}$ = ٥٤٨٠ ، $\sum$ و = ٢٨٨ ، ن = ٦٤ ، فأوجِد التباين لقيم و.

ب $\sum ك^{٢}$ = ٤٠٠٠ ، $\bar{ك}$ = ٥,٢ ، ن = ٣٦ ، فأوجِد الانحراف المعياري لقيم ك.

ج $\sum س ت^{٢}$ = ٦١٢٠ ، $\sum$ ت = ٤٠ ، والانحراف المعياري لقيم س هو ١٢ ، فأوجِد $\sum$ س ت.

د $\sum$ س ت = ٢٨٠٠ ، $\sum$ ت = ٥٠ ، وتباين قيم س هو ١٠٠ ، فأوجِد $\sum س^{٢}$ ت.

هـ $\sum ل^{٢}$ = ١٩٣١٤٤ ، $\sum$ ل = ٢٣٢٤ ، والانحراف المعياري لقيم ل هو ٣ ، فأوجِد عدد القيم (ن).

١٠) تمثّل البيانات الآتية عشرين قراءة للمتغيّر ص وقد لخّصت على النحو: $\sum(ص - ٥)^{٢} = ٨٩٠$ ، $\sum(ص - ٥) = ١٣٠$ ، أوجِد الانحراف المعياري لـ ص.

١١) تم تسجيل ارتفاع منسوب مياه الأمطار (د) بوحدة الملمتر (ملم) في أحد المواقع على مدار ٣٦٥ يومًا متتاليًا ، ولُخّصت البيانات على النحو: $\sum(د - ٣)^{٢} = ٩٩٥٠$ و $\sum(د - ٣) = ١٧٩٥,٨$ ، احسب:

أ الوسط الحسابي لارتفاع منسوب مياه الأمطار في اليوم.

ب قيمة $\sum د^{٢}$.

١٢) ★ تمّ تسجيل كتلة المخلّفات (طن) في منتجع سياحي خلال ٣٩ أسبوعًا مقرّبة إلى أقرب منزلتَين عشريتَين. تمّ تدوين البيانات في الجدول الآتي:

كتلة المخلفات (طن)	٠,١٥ – ٠,٢٩	٠,٣٠ – ٠,٨٦	٠,٨٧ – ١,٣٥	١,٣٦ – ٢,٠٠
عدد الأسابيع (ت)	٥	٨	٢٠	٦

أ احسب الوسط الحسابي التقديري ، والانحراف المعياري التقديري لكتلة المخلفات في كل أسبوع مقرّبًا كل ناتج من الناتجَين إلى أقرب منزلتَين عشريتَين.

ب يتم إغلاق المنتجع السياحي لمدة ١٣ أسبوعًا إضافيًا من العام ، ولا يتم إنتاج أيّة نفايات خلال تلك الفترة. لو تضمّنت الحسابات هذه البيانات الإضافية ، فما أثرها على الوسط الحسابي وعلى الانحراف المعياري؟

١٣) ★ يبيّن الجدول الآتي أعمار ٥٠ موظفًا (الأعمار أعداد صحيحة) لهيئة إدارة فندق ما. الوسط الحسابي التقديري للبيانات يساوي ٣٧٫٣٢ ، والتباين التقديري يساوي ٦٩٫١١٧٦:

العمر (سنوات)	٢٣–٣٠	٣١–٣٧	٣٨–٤٥	٤٦–٥٩
عدد الموظفين (ت)	١٤	س	ص	٦

بعد سنة واحدة بالضبط من هذه الحسابات ، التحق سالم فكان الموظف ٥١ ، وأصبح الوسط الحسابي ٣٨ سنة بالضبط. أوجِد عُمْرَ سالم عندما التحق بالعمل ، محدّدًا الأثر الحاصل على تباين أعمار موظفي الهيئة. فسر إجابتك.

ورقة الإجابات النموذجية ٤-٢

ملاحظة: الإجابات من حسابي لأن كتاب الطالب لا يتضمن مفتاح إجابات.

١) (أ) $\sum س = ٣٠٠$ ، $\sum س^{٢} = ١٢٤٧٨$ ، ن $= ٨ \leftarrow \overline{س} = ٣٧,٥$ ، التباين $= \frac{١٢٤٧٨}{٨} - ٣٧,٥^{٢} = ١٥٣,٥ \leftarrow$ الانحراف المعياري $\approx ١٢,٣٩$

(ب) $\sum س = -١,٩٨$ ، $\sum س^{٢} = ٢٩٠,٨٤٩$ ، ن $= ٦ \leftarrow \overline{س} = -٠,٣٣$ ، التباين $= ٤٨,٣٧ \leftarrow$ الانحراف المعياري $\approx ٦,٩٥$

٢) (أ) الأحياء: الوسط ٣٣ ، التباين $= \frac{(-٢١)^{٢} + ٠ + (-٤٥)^{٢}}{٣} = \frac{٢٨٨}{٣} = ٩٦$.

الكيمياء: الوسط ٥٣ والتباين ٩٦. الفيزياء: الوسط ٦٣ والتباين ٩٦.

(ب) التباين متساوٍ (٩٦) في المواد الثلاث ، فتشتّت درجاته حول وسطه الحسابي متساوٍ في كل مادة (درجات كل مادة تساوي درجات مادة أخرى مضافًا إليها ثابت). لا ينطبق التفسير نفسه على الوسط الحسابي ؛ فأوساطه مختلفة (٣٣ ، ٥٣ ، ٦٣) ، أي أن مستوى درجاته في الفيزياء أعلى منه في الكيمياء والأحياء.

٣) $\sum ت = ٣٥$ ، $\sum س ت = ٥٩$ ، $\sum س^{٢} ت = ١٥٧ \leftarrow \overline{س} = \frac{٥٩}{٣٥} \approx ١,٦٨٦$ ، التباين $= \frac{١٥٧}{٣٥} - (\frac{٥٩}{٣٥})^{٢} \approx ١,٦٤٤$

٤) $\sum ت = ٣٦٠$ ، $\sum س ت = ٧٢٠$ ، $\sum س^{٢} ت = ١٦٧٢ \leftarrow \overline{س} = \frac{٧٢٠}{٣٦٠} = ٢$ ، التباين $= \frac{١٦٧٢}{٣٦٠} - ٢^{٢} \approx ٠,٦٤٤٤ \leftarrow$ الانحراف المعياري $\approx ٠,٨٠٣$

٥) المراكز ٢٥ ، ٣٥ ، ٥٠ ، ٧٠.

(أ) الطالبات: $\sum م ت = ١٢٠٠$ ، $\sum م^{٢} ت = ٥٣١٠٠$ ، ن $= ٣٠ \leftarrow$ الوسط $= ٤٠$ دقيقة ، التباين $= ١٧٠ \leftarrow$ الانحراف $\approx ١٣,٠٤$ دقيقة.

الطلاب: ∑م ت = ١٦٠٠ ، ∑م²ت = ٧٤٦٥٠ ، ن = ٤٠ ← الوسط = ٤٠ دقيقة ، التباين = ٢٦٦٫٢٥ ← الانحراف ≈ ١٦٫٣٢ دقيقة.

(ب) (ا) الوسطان متساويان (٤٠ دقيقة) فالزمن المتوسط واحد للمجموعتين. (٢) انحراف الطلاب (≈ ١٦٫٣٢) أكبر من انحراف الطالبات (≈ ١٣٫٠٤) ، فأزمنة الطلاب أكثر تشتتًا ، وأزمنة الطالبات أكثر اتساقًا.

٦) الحدود الفعلية: ١٤٫٥–١٧٫٥ ، ١٧٫٥–٢٤٫٥ ، ٢٤٫٥–٢٩٫٥ ، ٢٩٫٥–٣٧٫٥ (لأن الأطوال مقرّبة لأقرب سم) ← المراكز ١٦ ، ٢١ ، ٢٧ ، ٣٣٫٥. ∑م ت = ١١٥١ ، ∑م²ت = ٢٨٢٦٣ ← الوسط = ٢٣٫٠٢ ، التباين = ٣٥٫٣٣٩٦ ← الانحراف المعياري التقديري ≈ ٥٫٩٤ سم.

٧) (أ) ∑ت = ٤ك + ٢٣ ، ∑س ت = ٣٠ك + ١٦(ك+٥) + ١٧(ك−٣) + ١٨٠ + ١٥٢ + ٦٠ = ٦٣ك + ٤٢١. س = ١٧ ← ٦٣ك + ٤٢١ = ١٧(٤ك + ٢٣) = ٦٨ك + ٣٩١ ← ٥ك = ٣٠ ← **ك = ٦**.

(ب) التكرارات: ١٢ ، ١١ ، ٣ ، ١٠ ، ٨ ، ٣ (المجموع ٤٧). ∑س²ت = ٢٢٥×١٢ + ٢٥٦×١١ + ٢٨٩×٣ + ٣٢٤×١٠ + ٣٦١×٨ + ٤٠٠×٣ = ١٣٧١١ ← التباين = $\frac{١٣٧١١}{٤٧}$ − ١٧² ≈ ٢٫٧٢٣

٨) (أ) المراكز ١٤٢ ، ١٤٧ ، ١٥٥ ، ١٦٢٫٥ ، وأ + ب = ١٥٠ − ٦٩ − ٢٨ = ٥٣. ∑م ت = ١٤٢أ + ١٤٧ب + ١٠٦٩٥ + ٤٥٥٠ = ١٥٠ × ١٥٣٫١٤ = ٢٢٩٧١ ← ١٤٢أ + ١٤٧ب = ٧٧٢٦ ✓. بالتعويض أ = ٥٣ − ب: ٧٥٢٦ + ٥ب = ٧٧٢٦ ← **ب = ٤٠ ، أ = ١٣**.

(ب) ∑م²ت = ٣٥٢٣٥٩٢ ← التباين = ٣٨٫٧٥٤ ← الانحراف ≈ ٦٫٢٣ سم.

٩) (أ) التباين = $\frac{٥٤٨٠}{٦٤}$ − ($\frac{٢٨٨}{٦٤}$)² = ٨٥٫٦٢٥ − ٢٠٫٢٥ = **٦٥٫٣٧٥**

(ب) التباين = $\frac{٤٠٠٠}{٣٦}$ − ٥٫٢² ≈ ٨٤٫٠٧١ ← الانحراف المعياري ≈ **٩٫١٧**

(ج) التباين = ١٤٤ = $\frac{٦١٢٠}{٤٠}$ − $\overline{س}^{٢}$ = ١٥٣ − $\overline{س}^{٢}$ ← $\overline{س}^{٢}$ = ٩ ← $\overline{س}$ = ٣ أو $\overline{س}$ = −٣.

إذن ∑س ت = ٤٠ × ٣ = **١٢٠** أو **−١٢٠**.

(د) $\overline{س}$ = $\frac{٢٨٠٠}{٥٠}$ = ٥٦ ← ١٠٠ = $\frac{∑س^{٢}ت}{٥٠}$ − ٥٦^{٢} ← ∑س^{٢}ت = ٥٠ × (١٠٠ + ٣١٣٦) = **١٦١٨٠٠**

(هـ) التباين = ٩ = $\frac{١٩٣١٤٤}{ن}$ − ($\frac{٢٣٢٤}{ن}$)^{٢} ← ٩ن^{٢} − ١٩٣١٤٤ن + ٥٤٠٠٩٧٦ = ٠. نجرّب القيمة ٢٨: ٩ × ٧٨٤ − ٥٤٠٨٠٣٢ + ٥٤٠٠٩٧٦ = ٠ ✓ ← **ن = ٢٨**.

١٠) التباين (ص) = التباين (ص − ٥) = $\frac{٨٩٠}{٢٠}$ − ($\frac{١٣٠}{٢٠}$)^{٢} = ٤٤٫٥ − ٤٢٫٢٥ = ٢٫٢٥ ← الانحراف المعياري = **١٫٥**

١١) (أ) الوسط الحسابي (د − ٣) = $\frac{١٧٩٥٫٨}{٣٦٥}$ = ٤٫٩٢ ← الوسط الحسابي لـ د = ٤٫٩٢ + ٣ = **٧٫٩٢ ملم**.

(ب) التباين (د) = $\frac{٩٩٥٠}{٣٦٥}$ − ٤٫٩٢^{٢} ≈ ٣٫٠٥٣٩ ، و∑د^{٢} = ٣٦٥ × (التباين + ٧٫٩٢^{٢}) = ٣٦٥ × (٣٫٠٥٣٩ + ٦٢٫٧٦٤) ≈ **٢٤٠٠٩٫٨**

١٢) (أ) المراكز ٠٫٢٢ ، ٠٫٥٨ ، ١٫١١ ، ١٫٦٨. ∑م ت = ٣٨٫٠٢ ، ∑م^{٢}ت = ٤٤٫٥٠٩٦ ← الوسط ≈ **٠٫٩٧ طن** ، التباين ≈ ٠٫١٩٠٩ ← الانحراف ≈ **٠٫٤٤ طن**.

(ب) نضيف ١٣ أسبوعًا بكتلة صفر (ن = ٥٢): الوسط ≈ ٠٫٧٣ طن (ينقص) ، والانحراف ≈ ٠٫٥٧ طن (يزداد). السبب: القيم الجديدة (٠) أقل من الوسط فتخفضه ، وتبعد عنه فتزيد التشتت.

خالد كمال
khalid-math.surge.sh

١٣) ن = ٥٠ ← س + ص = ٣٠. المراكز ٢٦,٥ ، ٣٤ ، ٤١,٥ ، ٥٢,٥. من التباين (٦٩,١١٧٦): نجرّب ، فيتحقق عند **س = ١٢ ، ص = ١٨** (تحقّقتُ: ∑م$_{ت}^{٢}$ = ٧١٢٤١,٥ ، والتباين = ٦٩,١١٧٦ ✓).

⚠ **خطأ في الكتاب:** الوسط التقديري المحسوب من الجدول لـ (س = ١٢ ، ص = ١٨) هو ٣٦,٨٢ وليس ٣٧,٣٢ كما في نص التمرين ، ولا توجد قيمتان صحيحتان تعطيان ٣٧,٣٢ مع مجموع ٥٠. أخذتُ ٣٧,٣٢ كما ورد لإيجاد عمر سالم (طريقة الكتاب) ، وأذكر النتيجة بالقيمة المحسوبة أيضًا.

بعد سنة: كل عمر يزيد ١ فالوسط = ٣٨,٣٢ والتباين ثابت (٦٩,١١٧٦). مجموع الأعمار الـ ٥١ = ٥١ × ٣٨ = ١٩٣٨ ، ومجموع الخمسين = ٥٠ × ٣٨,٣٢ = ١٩١٦ ← **عمر سالم = ٢٢ سنة** (وبالوسط المحسوب ٣٧,٨٢: عمره ٤٧ سنة).

التباين الجديد = $\frac{٥٠ \times (٦٩,١١٧٦ + ٣٨,٣٢^{٢})}{٥١} - ٣٨^{٢} \approx ٧٢,٨٨$ ← التباين **يزداد** من ٦٩,١٢ إلى ≈ ٧٢,٨٨ (وبالقيمة المحسوبة ≈ ٦٩,٣٨). التفسير: عمر سالم يبعد عن الوسط الجديد ٣٨ بمقدار كبير ، فيزيد تشتت الأعمار.

قائمة التحقق من التعلم والفهم

الوسط الحسابي

• للبيانات غير المجمّعة: $\overline{س} = \frac{\sum س}{ن}$ • للبيانات المجمّعة: $\overline{س} = \frac{\sum س\ ت}{\sum ت}$

البيانات المشفّرة

• $\overline{\text{س}}$ = الوسط الحسابي (س − ب) + ب. غير مجمّعة: $\overline{\text{س}} = \frac{\sum(\text{س} - \text{ب})}{\text{ن}} + \text{ب}$.

مجمّعة: $\overline{\text{س}} = \frac{\sum(\text{س} - \text{ب})\text{ت}}{\sum\text{ت}} + \text{ب}$.

التباين والانحراف المعياري

• غير المجمّعة: الانحراف المعياري = $\sqrt{\frac{\sum(\text{س} - \overline{\text{س}})^{2}}{\text{ن}}} = \sqrt{\frac{\sum\text{س}^{2}}{\text{ن}} - (\overline{\text{س}})^{2}}$

• المجمّعة: الانحراف المعياري = $\sqrt{\frac{\sum(\text{س} - \overline{\text{س}})^{2}\text{ت}}{\sum\text{ت}}} = \sqrt{\frac{\sum\text{س}^{2}\text{ت}}{\sum\text{ت}} - (\overline{\text{س}})^{2}}$

• لمجموعتَي بيانات س ، ص عدد قيمهما نس ، نص: الوسط = $\frac{\sum\text{س} + \sum\text{ص}}{\text{نس} + \text{نص}}$ ،

التباين = $\frac{\sum\text{س}^{2} + \sum\text{ص}^{2}}{\text{نس} + \text{نص}} - (\frac{\sum\text{س} + \sum\text{ص}}{\text{نس} + \text{نص}})^{2}$.

• التباين (س) = التباين (س − ب).

تمارين مراجعة نهاية الوحدة الرابعة

١) إذا كان الوسط الحسابي لقيم البيانات س المبيّنة في الجدول الآتي هو ٧,١٥:

س	٣	٦	١٠	١٥
التكرار	أ	ب	ج	د

أ أوجِد الوسط الحسابي لقيم البيانات ص المبيّنة في الجدول الآتي:

ص	١١	١٤	١٨	٢٣
التكرار	أ	ب	ج	د

ب أوجِد الوسط الحسابي التقديري لقيم ع المبيّنة في الجدول الآتي:

ع	−٢	−٨	−١٤	−٢٤−٣٤
التكرار	أ	ب	ج	د

٢) يبيّن الجدول الآتي عدد الكتب التي قرأها مجموعة من الطلبة خلال أحد الأشهر:

عدد الكتب	٢	٣	٤	٥
عدد الطلبة	٣	٨	١٥	ك

أوجِد قيمة ك إذا كان الوسط الحسابي للكتب التي تمّت قراءتها ٣,٧٥.

خالد كمال
Khaled-math.surge.sh

٣) سُئل ثلاثة أولاد وسبع بنات عن النقود التي في حوزة كل منهم. يوجد مع كل ولد ٢٫٥٠٠ ريال عُماني ، والوسط الحسابي للنقود مع العشرة أطفال هو ٣٫٩٠٠ ريال عُماني.

أ بيّن أن مجموع النقود الموجودة مع البنات ٣١٫٥٠٠ ريال عُماني.

ب إذا كان مع كل بنت المقدار نفسه من النقود ، فأوجِد الانحراف المعياري لكمّية النقود مع الأطفال الـ ١٠.

٤) كان عمق الثلج على أحد الجبال قبل يومَين من مسابقة التزلّج س متر ، عند ٣٢ نقطة على المسار. تم قياس سماكة الثلج ، فاكتشف أن القيمة العددية لـ ∑س ، و ∑س^{٢} متساوية.

أ إذا علمت أن متوسط عمق الثلج كان ٠٫٨٨٥ م ، فأوجِد الانحراف المعياري للمتغيّر س.

ب سقط الثلج في اليوم السابق للمسابقة ، فازدادت سماكة الثلج على كامل المسار بمقدار ١٫٥ سم. اشرح تأثير ذلك على الوسط الحسابي ، والانحراف المعياري للمتغيّر س.

خالد كمال
khalid-math.surge.sh

٥) ★ حصل ١١ شخصًا عند رمي ثلاثة أسهم على لوحة الأسهم على الدرجات ٥٤ ، ٤٦ ، ٤٣ ، ٥٢ ، ١٨٠ ، ٥٠ ، ٤١ ، ٥٦ ، ٥٢ ، ٤٩ ، ٥٤:

أ أوجِد الوسط الحسابي ، والانحراف المعياري لهذه الدرجات.

ب فسّر قيم المقاييس الإحصائية في الجزئية (أ).

٦) ★ تمّ قياس الأطوال لمجموعة من ٢٨ شخصًا ، فكان المتوسط الحسابي للأطوال ١٧٢٫٦ سم ، والانحراف المعياري ٤٫٥٨ سم. ترك المجموعة شخص واحد طوله ١٦١٫٨ سم:

أ أوجِد الوسط الحسابي لأطوال مَن تبقّى من المجموعة ، وعددهم ٢٧ شخصًا.

ب أوجِد $\Sigma س^{٢}$ للمجموعة الأصلية التي عددها ٢٨ شخصًا ، وأوجِد الانحراف المعياري لأطوال مَن تبقّى منها ، وعددهم ٢٧ شخصًا.

٧) ★ طلب من ١٢٠ شخصًا أن يقرأوا مقالًا في صحيفة. يبيّن الجدول الآتي الزمن الذي استغرقه الأشخاص في قراءة المقال مقرّبًا إلى أقرب ثانية:

الزمن (ث)	١–٢٥	٢٦–٣٥	٣٦–٤٥	٤٦–٥٥	٥٦–٩٠
عدد الأشخاص	٤	٢٤	٣٨	٣٤	٢٠

احسب الوسط الحسابي التقديري ، والانحراف المعياري التقديري لزمن القراءة.

ورقة الإجابات النموذجية: مراجعة الوحدة ٤

ملاحظة: الإجابات من حسابي لأن كتاب الطالب لا يتضمن مفتاح إجابات.

١) (أ) كل قيمة ص = س + ٨ بالتكرارات نفسها ← الوسط = ٧٫١٥ + ٨ = **١٥٫١٥**.

(ب) مراكز الفئات ٥ ، ١١ ، ١٩ ، ٢٩ (الفئات ٢–٨ ، ٨–١٤ ، ١٤–٢٤ ، ٢٤–٣٤) وهي تساوي ٢س − ١ للقيم ٣ ، ٦ ، ١٠ ، ١٥ ← الوسط التقديري = ٢ × ٧٫١٥ − ١ = **١٣٫٣**.

٢) ∑ت = ٢٦ + ك ، ∑س ت = ٩٠ + ٥ك ← ٣٫٧٥(٢٦ + ك) = ٩٠ + ٥ك = ٩٧٫٥ + ٣٫٧٥ك ← ١٫٢٥ك = ٧٫٥ ← **ك = ٦**

٣) (أ) المجموع الكلي = ١٠ × ٣٫٩ = ٣٩ ، مع الأولاد ٣ × ٢٫٥ = ٧٫٥ ← مع البنات ٣٩ − ٧٫٥ = **٣١٫٥ ريالًا عُمانيًّا** ✓.

(ب) مع كل بنت ٣١٫٥ ÷ ٧ = ٤٫٥. التباين = $\frac{٣ \times ٢٫٥^{٢} + ٧ \times ٤٫٥^{٢}}{١٠}$ − ٣٫٩٢ = ١٦٫٠٥ − ١٥٫٢١ = ٠٫٨٤ ← الانحراف المعياري = **٠٫٩١٧ ريال عُماني**.

٤) (أ) ∑س = ∑س٢ ← $\overline{س}$ = $\frac{∑س}{٣٢}$ = ٠٫٨٨٥ ← $\overline{س}$ أيضًا (لأن ∑س٢ = $\frac{∑س^{٢}}{٣٢}$). التباين = ٠٫٨٨٥٢ − ٠٫١٠١٧٧٥ = ٠٫٠١٥ ← الانحراف المعياري = **٠٫١٢٣ م**.

(ب) كل قيمة تزيد ٠٫٠١٥ م ← الوسط يزداد بمقدار ٠٫٠١٥ م فيصبح ٠٫٩ م. الانحراف المعياري **لا يتغيّر** (إضافة ثابت لا تغيّر التشتت) ويبقى ≈ ٠٫١٢٣ م.

٥) (أ) ∑س = ٦٧٧ ، ∑س٢ = ٥٧٣٢٣ ← الوسط = $\frac{٦٧٧}{١١}$ ≈ **٦١٫٥٥** ، التباين ≈ ١٤٢٣٫٣ ← الانحراف المعياري ≈ **٣٧٫٧٣**.

(ب) الوسط ≈ ٦١٫٥ أكبر من معظم الدرجات (كلها بين ٤١ و٥٦ عدا ١٨٠) ، لأن الدرجة ١٨٠ (الحد الأقصى الممكن بثلاثة أسهم) قيمة شاذة رفعته. الانحراف المعياري الكبير (≈ ٣٧٫٧) سببه أيضًا هذه القيمة ، فلا يعبّر عن تشتت معظم الدرجات. بدون ١٨٠: الوسط ≈ ٤٩٫٧ والانحراف ≈ ٤٫٧ ، وهما أدق وصفًا للمجموعة.

٦) (أ) مجموع الأطوال = ٢٨ × ١٧٢٫٦ = ٤٨٣٢٫٨ ← بعد خروجه: ٤٨٣٢٫٨ − ١٦١٫٨ = ٤٦٧١ ← الوسط = $\frac{٤٦٧١}{٢٧}$ = **١٧٣ سم**.

(ب) $\sum س^{٢}$ = ٢٨ × (١٧٢٫٦^{٢} + ٤٫٥٨^{٢}) = **٨٣٤٧٢٨٫٦٢**. للباقين: $\sum س^{٢}$ = ٨٣٤٧٢٨٫٦٢ − ١٦١٫٨^{٢} = ٨٠٨٥٤٩٫٣٨ ← التباين = $\frac{٨٠٨٥٤٩٫٣٨}{٢٧}$ − ١٧٣^{٢} ≈ ١٧٫٢٧٣ ← الانحراف المعياري ≈ **٤٫١٦ سم**.

٧) الحدود الفعلية (القياس لأقرب ثانية): ٠٫٥–٢٥٫٥ ، ٢٥٫٥–٣٥٫٥ ، ٣٥٫٥–٤٥٫٥ ، ٤٥٫٥–٥٥٫٥ ، ٥٥٫٥–٩٠٫٥ ← المراكز ١٣ ، ٣٠٫٥ ، ٤٠٫٥ ، ٥٠٫٥ ، ٧٣. $\sum$م ت = ٥٥٠٠ ، $\sum$م^{٢}ت = ٢٧٨٦٢٠ ← الوسط ≈ **٤٥٫٨٣ ث** ، التباين ≈ ٢٢١٫١٤ ← الانحراف المعياري ≈ **١٤٫٨٧ ث**.