الوحدة الثالثة: المتتاليات والمتسلسلات

ستتعلّم في هذه الوحدة كيف:

٣-١ تستخدم المتتاليات الحسابية وتجد مجموع حدودها.

٣-٢ تستخدم المتتاليات الهندسية وتجد مجموع حدودها.

٣-٣ تجد مجموع المتسلسلات الهندسية غير المنتهية.

٣-٤ تحلّ مسائل متنوعة على المتتاليات الحسابية والهندسية.

معرفة قبلية

تعلّمت سابقًا (الصف التاسع ، الوحدة التاسعة) أن توجد الحد العام (الحد النوني) في متتالية خطّية.

اختبر مهاراتك: ١) أوجد الحد العام للمتتاليات الخطّية الآتية: أ) ٥ ، ٧ ، ٩ ، ١١ ، ١٣ ، ... ب) ٨ ، ٥ ، ٢ ، −١ ، −٤ ، ...

الإجابة: (أ) ٢ن + ٣ (ب) ١١ − ٣ن

المفردات

حدود terms • متتالية حسابية arithmetic sequence • الفرق المشترك (الأساس) common difference • المتسلسلة series • متتالية هندسية geometric sequence • النسبة المشتركة (الأساس) common ratio • متسلسلة متقاربة convergent series

لماذا ندرس المتتاليات والمتسلسلات؟ الحياة مليئة بالأنماط والمتتاليات الهندسية والحسابية؛ فقد تحسب عدد مقاعد مسرح عندما يزداد عدد الصفوف ، أو مجموع النقود التي تدّخرها خلال فترة زمنية معينة ، أو مجموع المسافات الرأسية التي تقطعها كرة بعد ارتطامها بالأرض...

خالد كمال
khaled-math-surge.sh

٣-١ المتتاليات الحسابية

في الصف التاسع ، عرفت أن المتتالية العددية هي مجموعة من الأعداد التي دوّنت بترتيب معيّن ، مع وجود روابط بينها ، وتسمّى الأعداد في المتتالية **حدود** terms المتتالية.

تسمى المتتالية ٥ ، ٨ ، ١١ ، ١٤ ، ١٧ ، ... **متتالية حسابية** arithmetic sequence ، لأن الفرق بين كل حد والحد السابق له مقدار ثابت ، ويسمّى **الأساس** (الفرق المشترك) common difference.

الرموز المستخدمة في المتتالية الحسابية هي: أ = الحدّ الأول ، د = الأساس ، ل = الحدّ الأخير

يمكن أن يكون الأساس عددًا سالبًا ؛ كما في المتتالية: ١٠ ، ٦ ، ٢ ، −٢ ، ... أو أن يكون الأساس صفرًا ؛ كما في المتتالية: ٥ ، ٥ ، ٥ ، ٥ ، ...

أول خمسة حدود من أيّة متتالية حسابية حدّها الأول أ وأساسها د هي: أ ، أ + د ، أ + ٢د ، أ + ٣د ، أ + ٤د (الحدّ ١ ، الحدّ ٢ ، الحدّ ٣ ، الحدّ ٤ ، الحدّ ٥).

ستلاحظ من النمط السابق أن الحدّ العام (حن) يعطى بالصيغة:

نتيجة ١

حن = أ + (ن − ١)د ، حيث ن عدد صحيح موجب.

مساعدة: ن تمثل رتبة الحد (ترتيب الحد) أو عدد الحدود في المتتالية. مثال: يكتب الحد الرابع في صورة ح٤.

مثال ١

أوجد الحد الأول والأساس وعدد الحدود (ن) في المتتالية الحسابية: −٣ ، ١ ، ٥ ، ٩ ، ١٣ ، ... ، ٢٣٧

الحلّ: الحد الأول = −٣ ، الأساس = ١ − (−٣) = ٤.

الحدّ الأخير: حن = أ + (ن − ١)د ← ٢٣٧ = −٣ + ٤(ن − ١) ← ن − ١ = ٦٠ ← ن = ٦١.

∴ عدد الحدود = ٦١

مثال ٢

إذا كان ح٤ في متتالية حسابية هو ٧ ، ح١٠ = ١٦ ، فأوجد ح١ والأساس (د).

الحلّ: ح٤ = ٧ ⇐ أ + ٣د = ٧ ..... (١)

ح١٠ = ١٦ ⇐ أ + ٩د = ١٦ ..... (٢)

المعادلة (٢) − المعادلة (١) تعطي ٦د = ٩ ، د = ١,٥.

بالتعويض في المعادلة (١): أ + ٤,٥ = ٧ ، أ = ٢,٥.

ح١ = ٢,٥ ، الأساس (د) = ١,٥

مثال ٣

إذا كان الحدّ العام (حن) في متتالية حسابية هو ٥ − ٦ن ، فأوجد ح١ والأساس.

الحلّ: ح١ = ٥ − ٦(١) = −١ ، ح٢ = ٥ − ٦(٢) = −٧

الأساس = ح٢ − ح١ = −٧ − (−١) = −٦

مجموع حدود المتتالية الحسابية

يطلق على عملية جمع حدود المتتالية **بالمتسلسلة** series.

استكشاف ١

١ + ٢ + ٣ + ٤ + ... + ٩٧ + ٩٨ + ٩٩ + ١٠٠ = ؟

يقال إن عالم الرياضيات كارل جاوس Carl Gauss وهو في السابعة أو الثامنة من عمره قد سُئل عن إيجاد مجموع الأعداد من ١ إلى ١٠٠. ظنّ معلّمه أن هذه المهمّة ستشغله بعض الوقت ، لكنه فوجئ بأن كتب الإجابة الصحيحة مباشرة. كانت طريقته أن جمع الأعداد أزواجًا: ١ + ١٠٠ = ١٠١ ، ٢ + ٩٩ = ١٠١ ، ٣ + ٩٨ = ١٠١ ، ...

١) هل يمكنك أن تكمل طريقة جاوس لتجد الإجابة؟

٢) استخدم طريقة جاوس لتجد مجموع:

أ) ٢ + ٤ + ٦ + ٨ + ... + ٤٩٤ + ٤٩٦ + ٤٩٨ + ٥٠٠

ب) ٥ + ١٠ + ١٥ + ٢٠ + ... + ١٨٥ + ١٩٠ + ١٩٥ + ٢٠٠

ج) ٦ + ٩ + ١٢ + ١٥ + ... + ٩٣ + ٩٦ + ٩٩ + ١٠٢

٣) استخدم طريقة جاوس لتجد عبارة للمجموع بدلالة ن: ١ + ٢ + ٣ + ٤ + ... + (ن − ٢) + (ن − ١) + ن

إجابة الاستكشاف: (١) ٥٠ زوجًا كل منها ١٠١ ← المجموع = ٥٠ × ١٠١ = ٥٠٥٠. (٢) (أ) ٢٥٠ حدًّا ، كل زوج ٥٠٢ ← ١٢٥ × ٥٠٢ = ٦٢٧٥٠. (ب) ٤٠ حدًّا ، كل زوج ٢٠٥ ← ٢٠ × ٢٠٥ = ٤١٠٠. (ج) ٣٣ حدًّا ، كل زوج ١٠٨ ← ١٦,٥ × ١٠٨ = ١٧٨٢. (٣) ن × (ن + ١) ÷ ٢.

يمكن كتابة مجموع متتالية حسابية جـ على النحو:

نتيجة ٢

$جـن = \frac{ن}{٢}(أ + ل)$ أو $جـن = \frac{ن}{٢}[٢أ + (ن - ١)د]$

برهان النتيجة: $جـن = أ + (أ + د) + (أ + ٢د) + ... + (ل - ٢د) + (ل - د) + ل$. نكتب المجموع بصورة عكسية: $جـن = ل + (ل - د) + (ل - ٢د) + ... + (أ + ٢د) + (أ + د) + أ$. بجمع المعادلتين: $٢جـن = (أ + ل) + (أ + ل) + ... + (أ + ل) = ن(أ + ل)$ لأن عدد الحدود هو ن ، فيكون $جـن = \frac{ن}{٢}(أ + ل)$. وباستخدام $ل = أ + (ن - ١)د$ نحصل على $جـن = \frac{ن}{٢}[٢أ + (ن - ١)د]$.

من المفيد أن تتذكّر القاعدة الآتية التي تطبق على جميع المتتاليات:

نتيجة ٣

$حـن = جـن - جـن_{-١}$ ، حيث ن عدد صحيح موجب.

مثال ٤

متتالية حسابية حدّها الأول −١٢ ، وحدّها السابع عشر ١٢ ، وحدّها الأخير ٤٥ ، أوجد مجموع جميع حدود المتتالية.

الحلّ: $حـن = أ + (ن - ١)د$: $١٢ = -١٢ + ١٦د \leftarrow د = \frac{٣}{٢}$.

لإيجاد عدد الحدود: $٤٥ = -١٢ + \frac{٣}{٢}(ن - ١) \leftarrow ن - ١ = ٣٨ \leftarrow ن = ٣٩$.

مثال ٤ (تابع)

$$\text{جـ}_{ن} = \frac{ن}{٢}(أ + ل) \leftarrow \text{جـ}_{٣٩} = \frac{٣٩}{٢}(-١٢ + ٤٥) = ٦٤٢\frac{١}{٢}$$

مثال ٥

إذا علمت أن $ح_{١٠}$ في متتالية حسابية يساوي ١٤ ، ومجموع أول ٧ حدود يساوي ٤٢ ، فأوجد $ح_{١}$ في المتتالية ، وأساسها.

الحلّ: $ح_{ن} = أ + (ن - ١)د \leftarrow ١٤ = أ + ٩د$ ..... (١)

$$\text{جـ}_{ن} = \frac{ن}{٢}[٢أ + (ن - ١)د] \leftarrow ٤٢ = \frac{٧}{٢}(٢أ + ٦د) \leftarrow ٦ = أ + ٣د$$ ..... (٢)

(١) − (٢): $٦د = ٨ \leftarrow د = \frac{٤}{٣}$. بالتعويض في (١): $أ = ٢$.

$ح_{١} = ٢$ ، والأساس $= \frac{٤}{٣}$

مثال ٦

إذا كان مجموع أول ن حدًّا في متتالية حسابية هو $\text{جـ}_{ن} = ٤ن^{٢} + ن$ ، فأوجد كلًّا ممّا يأتي: أ) $ح_{١}$ ، والأساس. ب) $ح_{ن}$.

مثال ٦ (تابع)

الحلّ: أ) $ج_{١} = ٤(١)^{٢} + ١ = ٥$ = الحد الأول. $ج_{٢} = ٤(٢)^{٢} + ٢ = ١٨$ = الحد الأول + الحد الثاني. $ح_{٢} = ١٨ - ٥ = ١٣$. الأساس = $١٣ - ٥ = ٨$. $ح_{١} = ٥$ ، الأساس = ٨.

ب) $ح_{ن} = أ + (ن - ١)د = ٥ + ٨(ن - ١) = ٨ن - ٣$

طريقة بديلة: $ح_{ن} = ج_{ن} - ج_{ن-١} = (٤ن^{٢} + ن) - (٤(ن - ١)^{٢} + (ن - ١)) = ٨ن - ٣$

تمارين ٣-١

١) عبّر عن الحدّ السابع ، والحدّ التاسع عشر في متتالية حسابية حدّها الأول (أ) ، وأساسها (د) بدلالة أ ، د.

٢) أوجد عدد الحدود ، والمجموع لكل مما يأتي:

أ $١٣ + ١٧ + ٢١ + ... + ٩٧$

ب $١٥٢ + ١٤٩ + ١٤٦ + ... + ٥٠$

٣) أوجد مجموع كل مما يأتي:

أ $٥ + ١٢ + ١٩ + ...$ (١٧ حدًّا)

ب $٤ + ١ + (-٢) + ...$ (٣٨ حدًّا)

ج $\frac{١}{٣} + \frac{١}{٢} + \frac{٢}{٣} + \ldots$ (٢٠ حدًّا)

د $-س - ٥س - ٩س - \ldots$ (٤٠ حدًّا)

٤) إذا كان الحدّ الأول في متتالية حسابية ١٥ ، ومجموع أول ٢٠ حدًّا فيها يساوي ١٦٣٠ ، فأوجد أساس المتتالية.

٥) إذا كان الحد الأول في متتالية حسابية يساوي −٢٧ ، وحدها السادس عشر يساوي ٧٨ ، وحدها الأخير يساوي ١٦٩ ، فأوجد:

أ أساس المتتالية ، وعدد حدودها.

ب مجموع حدود المتتالية.

٦) إذا كان أول حدّين في متتالية حسابية هما ١٤٦ ، ١٣٩ ، والحدّ الأخير هو −٤٣ ، فأوجد مجموع حدود المتتالية.

٧) إذا كان أول حدين في متتالية حسابية هما ٢ ، ٩ ، والحدّ الأخير في المتتالية هو الحدّ الوحيد الأكبر من ١٥٠ ، فأوجد مجموع حدود المتتالية.

٨) إذا كان الحدّ الأول في المتتالية الحسابية ١٥ ، والحدّ الأخير ٢٧ ، وكان مجموع أول خمسة حدود في المتتالية يساوي ٧٩ ، فأوجد عدد حدود المتتالية.

٩) أوجد مجموع الأعداد الصحيحة الواقعة بين ١٠٠ ، ٣٠٠ ، والتي هي من مضاعفات العدد ٧

١٠) إذا كان الحدّ الأول في متتالية حسابية هو ٢ ، والحدّ الحادي عشر هو ١٧ ، ومجموع حدود المتتالية هو ٥٠٠ ، فأوجد عدد حدود المتتالية.

١١) اشترى ماجد سيارة بمبلغ ٨٠٠٠ ريال عُماني (تتضمّن الفائدة) ، ودفع ثمن السيارة على دفعات شهرية تشكّل متتالية حسابية. إذا علمت أن أول دفعة كانت ٢٠٠ ريال عُماني ، وعدد الدفعات ١٦ دفعة ، فأوجد الدفعة الخامسة.

١٢) إذا كان ح٦ في متتالية حسابية هو −٣ ، ومجموع أول عشرة حدود يساوي −١٠ ، فأوجد كلًّا ممّا يأتي:

أ الحدّ الأول ، والأساس.

ب قيمة ن إذا علمت أن الحدّ النوني يساوي −٥٩

١٣) إذا كان مجموع أول ن حدًّا في متتالية حسابية هو جن = ٤ن^{٢} + ٣ن ، فأوجِد الحدّ الأول ، وأساس المتتالية.

١٤) إذا كان مجموع أول ن حدًّا في متتالية حسابية هو جن = ١٢ان − ٢ن^{٢} ، فأوجِد الحدّ الأول ، وأساس المتتالية.

١٥) إذا كان مجموع أول ن حدًّا في متتالية حسابية هو جن = $\frac{ا}{٤}$ (٥ن^{٢} − ١٧ان) ، فأوجِد الحدّ العام.

١٦) دائرة قُسّمت إلى عشرة قطاعات دائرية ، بحيث تشكّل قياسات زوايا القطاعات متتالية حسابية. إذا كان قياس زاوية القطاع الأكبر يساوي سبعة أمثال قياس زاوية القطاع الأصغر ، فأوجد قياس زاوية القطاع الأصغر.

١٧) إذا كان الحدّ الأول في متتالية حسابية (أ) ، وأساسها (د) ، وكان مجموع أول ٢٠ حدًّا فيها يساوي سبعة أمثال مجموع أول خمسة حدود ، فأوجد كلًّا ممّا يأتي:

أ قيمة د بدلالة أ.

ب الحدّ الخامس والستّين بدلالة أ.

١٨) إذا كان الحدّ العاشر في متتالية حسابية يساوي ثلاثة أمثال الحدّ الثالث ، فأثبت أن مجموع الحدود العشرة الأولى يساوي ثمانية أمثال مجموع الحدود الثلاثة الأولى.

١٩) ★ إذا كان الحدّ الأول في متتالية حسابية هو جا٢س والحدّ الثاني هو ١ :

أ اكتب عبارة تمثّل الحدّ الخامس في المتتالية بدلالة جا س.

ب أثبت أن مجموع أول عشرة حدود في المتتالية هو ١٠ + ٣٥جتا٢س.

٢٠) ★ مجموع رقمَي العدد ٦٧ هو ١٣ (٦ + ٧ = ١٣).

أ بيّن أن مجموع أرقام الأعداد الصحيحة من ١٩ إلى ٢١ هو ١٥

ب أوجد مجموع أرقام الأعداد الصحيحة من ١ إلى ٩٩

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

ورقة الإجابات النموذجية ٣-١

ملاحظة: الإجابات من حسابي لأن كتاب الطالب لا يتضمن مفتاح إجابات.

١) الحدّ السابع: $ح_{٧} = أ + ٦د$ ، الحدّ التاسع عشر: $ح_{١٩} = أ + ١٨د$

٢) (أ): $د = ٤$ ، $ن = ٢٢$. $ح_{ن} = ١٣ + ٤(ن - ١) = ٩٧$ ← المجموع $= \frac{١١}{٢}(١٣ + ٩٧) = ١٢١٠$

(ب): $د = -٣$ ، $ن = ٣٥$. $ح_{ن} = ١٥٢ - ٣(ن - ١) = ٥٠$ ← المجموع $= \frac{٣٥}{٢}(١٥٢ + ٥٠) = ٣٥٣٥$

٣) (أ): $د = ٧$: $ج_{١٧} = \frac{١٧}{٢}(١٠ + ١٦ \times ٧) = ١٠٣٧$

(ب): $د = -٣$: $ج_{٣٨} = \frac{١٩}{٨}(٣٧ + (-٣)) \times ١٩ = (-١٠٣) = -١٩٥٧$

(ج): $د = \frac{١}{٦}$: $ج_{٢٠} = ١٠(\frac{٢}{٣} + ١٩ \times \frac{١}{٦}) = ١٠ \times \frac{٢٣}{٦} = \frac{١١٥}{٣} = ٣٨\frac{١}{٣}$

(د): $أ = -س$ ، $د = -٤س$: $ج_{٤} = ٢٠(-٢س + ٣٩ \times (-٤س)) = ٢٠ \times (-١٥٨س) = -٣١٦٠س$

٤) $١٠(٣٠ + ١٩د) = ١٦٣٠$ ← $٣٠ + ١٩د = ١٦٣$ ← $د = ٧$

٥) (أ): $ح_{١٦} = -٢٧ + ١٥د = ٧٨$ ← $د = ٧$. $ح_{ن} = -٢٧ + ٧(ن - ١) = ١٦٩$ ← $ن - ١ = ٢٨$ ← $ن = ٢٩$. (ب): $ج_{٢٩} = \frac{٢٩}{٢}(-٢٧ + ١٦٩) = ٢٠٥٩$

٦) $د = -٧$ ، $ح_{ن} = -٤٣ = ١٤٦ - ٧(ن - ١)$ ← $ن - ١ = ٢٧$ ← $ن = ٢٨$. المجموع $= \frac{١٤}{٢}(١٤٦ - ٤٣) = ١٤٤٢$

خالد كمال
khaledmath.surge.sh

٧) د = ٧ ، الحدّ = ٢ + ٧(ن − ١). الحد رقم ٢٢ يساوي ١٤٩ (≥ ١٥٠) ، والحد رقم ٢٣ يساوي ١٥٦ (> ١٥٠) ، فالحد الأخير ١٥٦ ، ن = ٢٣. المجموع = $\frac{٢٣}{٢}$(٢ + ١٥٦) = ١٨١٧

٨) ٧٩ = $\frac{٥}{٢}$(٣٠ + ٤د) ← ٣٠ + ٤د = ٣١٫٦ ← د = ٠٫٤. ٢٧ = ١٥ + ٠٫٤(ن − ١) ← ن − ١ = ٣٠ ← ن = ٣١

٩) أول مضاعف للعدد ٧ أكبر من ١٠٠ هو ١٠٥ (٧ × ١٥) ، وآخر مضاعف أقل من ٣٠٠ هو ٢٩٤ (٧ × ٤٢). عدد الحدود = ٤٢ − ١٥ + ١ = ٢٨. المجموع = ١٤(١٠٥ + ٢٩٤) = ٥٥٨٦

١٠) ١٧ = ٢ + ١٠د ← د = ١٫٥. ٥٠٠ = $\frac{ن}{٢}$(٤ + ١٫٥(ن − ١)) ← ٣ن^{٢} + ٥ن − ٢٠٠٠ = ٠ ← (ن − ٢٥)(٣ن + ٨٠) = ٠ ← ن = ٢٥ (يُهمل الحل السالب).

١١) ٨٠٠٠ = ٨(٤٠٠ + ١٥د) ← د = ٤٠. الدفعة الخامسة = ٢٠٠ + ٤ × ٤٠ = ٣٦٠ ريالًا عُمانيًّا.

١٢) قُرئ الرمز السفلي في ح٦ على أنه ٦ (تحقّقت منه بتكبير الصفحة).

(أ): أ + ٥د = −٣ ، و٥(أ٢ + ٩د) = −١٠ أي أ٢ + ٩د = −٢. من الأولى أ = −٣ − ٥د ← −٦ − ١٠د + ٩د = −٢ ← د = −٤ ، أ = ١٧.

(ب): ١٧ − ٤(ن − ١) = −٥٩ ← ن − ١ = ١٩ ← ن = ٢٠

١٣) أ = ج١ = ٤ + ٣ = ٧. ج٢ = ١٦ + ٦ = ٢٢ ← ح٢ = ١٥ ← د = ٨.

١٤) أ = ج١ = ١٢ − ٢ = ١٠. ج٢ = ٢٤ − ٨ = ١٦ ← ح٢ = ٦ ← د = −٤.

١٥) حـن = جـن − جـن−١ = $\frac{١}{٤}$ [(٥ن^{٢} − ١٧ن) − (٥(ن − ١)^{٢} − ١٧(ن − ١))] = $\frac{١}{٤}$ (١٠ن − ٢٢) = $\frac{٥ن - ١١}{٢}$. (تحقّق: ن = ١ يعطي −٣ = جـ١)

١٦) مجموع الزوايا ٣٦٠° ← $\frac{١٠}{٢}$ (أ + ٧أ) = ٣٦٠ ← ٤٠أ = ٣٦٠ ← أ = ٩°. (الأكبر = ٦٣°)

١٧) (أ): جـ٢ = ٧جـ٥ ← ١٠(٢أ + ١٩د) = ٧ × $\frac{٥}{٢}$ (٢أ + ٤د) ← ٢٠أ + ١٩٠د = ٣٥أ + ٧٠د ← ١٢٠د = ١٥أ ← د = $\frac{أ}{٨}$

(ب): ح٦٥ = أ + ٦٤د = أ + ٨أ = ٩أ

١٨) ح١٠ = ٣ح٣ ← أ + ٩د = ٣أ + ٦د ← ٣د = ٢أ ← د = $\frac{٢أ}{٣}$.

جـ١ = ٥(٢أ + ٩د) = ٥(٢أ + ٦أ) = ٤٠أ ، جـ٣ = $\frac{٣}{٢}$ (٢أ + ٢د) = ٣(أ + $\frac{٢أ}{٣}$) = ٥أ. إذن جـ١ = ٤٠أ = ٨ × ٥أ = ٨جـ٣ ∎

١٩) الأساس د = ١ − جا^{٢}س = جتا^{٢}س. (أ): ح٥ = جا^{٢}س + ٤جتا^{٢}س.

(ب): جـ١ = ٥(٢جا^{٢}س + ٩جتا^{٢}س) = ١٠جا^{٢}س + ٤٥جتا^{٢}س = ١٠(جا^{٢}س + جتا^{٢}س) + ٣٥جتا^{٢}س = ١٠ + ٣٥جتا^{٢}س ∎

٢٠) (أ): ١٩ ← ١ + ٩ = ١٠ ، ٢٠ ← ٢ + ٠ = ٢ ، ٢١ ← ٢ + ١ = ٣ ، المجموع = ١٠ + ٢ + ٣ = ١٥ ∎

(ب): نعتبر الأعداد ٠٠ ، ٠١ ، ... ، ٩٩ (عددان من خانتين). كل رقم من ٠ إلى ٩ يظهر عشر مرّات في خانة الآحاد وعشر مرّات في خانة العشرات. مجموع الأرقام ٠ إلى ٩ = ٤٥ ، فالمجموع = ٤٥ × ١٠ + ٤٥ × ١٠ = ٩٠٠.

٣-٢ المتتاليات الهندسية

تسمّى المتتالية ٢ ، ٦ ، ١٨ ، ٥٤ ، ... **متتالية هندسية** Geometric sequence ، حيث إن كل حدّ في المتتالية يساوي ثلاثة أمثال الحدّ الذي يسبقه مباشرة. يسمّى المقدار الثابت ٣ أساس المتتالية (**النسبة المشتركة** Common ratio).

الرموز التي تستخدم في المتتالية الهندسية هي: أ = الحدّ الأول ، ر = الأساس (النسبة المشتركة)

الحدود الخمسة الأولى في متتالية هندسية حدّها الأول (أ) وأساسها (ر) هي: أ ، أر ، أر^{٢} ، أر^{٣} ، أر^{٤} (الحدّ الأول ، الثاني ، الثالث ، الرابع ، الخامس).

يقود ذلك إلى صيغة الحدّ العام (حن) في المتتالية الهندسية:

نتيجة ٤

حن = أر$^{ن-١}$ ، حيث ن عدد صحيح موجب ، ر ≠ ٠

مساعدة: يمكن إيجاد الأساس من خلال قسمة أي حد على الحد الذي يسبقه مباشرة:

$$ر = \frac{حـ_{ن+١}}{حـ_{ن}}$$

مثال ٧

في المتتالية الهندسية ٣ ، ٦ ، ١٢ ، ٢٤ ، ... أوجد: (أ) الحد الأول (أ). (ب) الأساس (ر). (ج) الحد النوني (حن).

الحلّ: (أ) أ = ٣ (ب) ر = $\frac{٦}{٣}$ = ٢ (الحد الثاني ÷ الحد الأول). (ج) حن = ٣ × ٢$^{ن-١}$

مثال ٨

متتالية هندسية ، حدّها الخامس ١ ، وأساسها $\frac{١}{٢}$. أوجد الحد الثامن ، والحدّ العام (حن).

الحلّ: حن = أر$^{ن-١}$ ، نستخدم حن = ١ عندما ن = ٥ ، ر = $\frac{١}{٢}$: ١ = أ($\frac{١}{٢}$)^{٤} ← أ = ١٦.

ح٨ = ١٦($\frac{١}{٢}$)^{٧} = $\frac{١}{٨}$ ، حن = ١٦($\frac{١}{٢}$)$^{ن-١}$

مثال ٩

متتالية هندسية حدّها الثاني ١٢ ، وحدّها الخامس ٤٠,٥ ، أوجد حدّها الأول ، وأساسها ، وحدّها العام.

الحلّ: أر = ١٢ ..... (١) ، أر^{٤} = ٤٠,٥ ..... (٢)

مثال ٩ (تابع)

المعادلة (٢) ÷ المعادلة (١): $ر^{٣} = \frac{٢٧}{٨}$ (نأخذ الجذر التكعيبي للطرفين) ← $ر = \frac{٣}{٢}$.

نعوّض في المعادلة (١): $أ = ٨$.

$$ح_{ن} = ٨(\frac{٣}{٢})^{ن-١}$$

مثال ١٠

إذا كان الحدّ العام في متتالية هندسية هو $٩(-\frac{٢}{٣})^{ن}$ ، فأوجد الحدّ الأول ، والنسبة المشتركة (الأساس).

الحلّ: $ح_{١} = ٩(-\frac{٢}{٣}) = -٦$ ، $ح_{٢} = ٩(-\frac{٢}{٣})^{٢} = ٤$

النسبة المشتركة (ر) = $\frac{\text{الحد الثاني}}{\text{الحد الأول}} = \frac{٤}{-٦} = -\frac{٢}{٣}$ (كل حد يساوي $(-\frac{٢}{٣})$ × الحد الذي يسبقه مباشرة).

$ح_{١} = -٦$ ، $ر = -\frac{٢}{٣}$

طريقة أخرى لإيجاد ر: $ر = \frac{ح_{ن+١}}{ح_{ن}} = \frac{٩(-٢/٣)^{ن+١}}{٩(-٢/٣)^{ن}} = -\frac{٢}{٣}$

مجموع حدود المتتالية الهندسية

يطلق على عملية جمع حدود المتتالية **بالمتسلسلة** series.

استكشاف ٢

ليس مسموحًا استخدام الآلة الحاسبة في هذا النشاط من «استكشف».

ا) افترض أن مجموع أول عشرة حدود من متتالية هندسية هو جـ١٠ ، حيث أ = ١ ، ر = ٣: جـ١٠ = ١ + ٣ + ٣٢ + ٣٣ + ... + ٣٧ + ٣٨ + ٣٩

أ) اضرب طرفَي المعادلة السابقة في الأساس وهو ٣ ، وأكمل العبارة: ٣جـ١٠ = ٣ + ٣٢ + ٣٣ + ... + ٣··· + ٣··· + ٣···

ب) كيف تقارن الناتج مع العبارة الأصلية؟ هل يمكنك استخدام ذلك لتجد طريقة أسهل للتعبير عن جـ١٠؟

٢) استخدم الطريقة من الجزئية (ا) لتجد طريقة بديلة للتعبير عن كل مجموع من المجاميع الآتية:

أ) ١ + ر + ر٢ + ... (١٠ حدود) ب) أ + أر + أر٢ + ... (١٠ حدود) ج) أ + أر + أر٢ + ... (ن حدّ)

إجابة الاستكشاف: (ا أ) ٣جـ١٠ = ٣ + ٣٢ + ... + ٣٠. (ا ب) بطرح المعادلتين: ٢جـ١٠ = ٣٠ − ١ ← جـ١٠ = (٣٠ − ١)/٢ = ٢٩٥٢٤. (٢ أ) (ر١٠ − ١)/(ر − ١). (٢ ب) أ(ر١٠ − ١)/(ر − ١). (٢ ج) أ(رن − ١)/(ر − ١).

نستنتج أن مجموع المتسلسلة الهندسية جـن يمكن كتابته على النحو:

نتيجة ٥

$$\text{جـن} = \frac{\text{أ}(\text{ا} - \text{ر}^{\text{ن}})}{\text{ا} - \text{ر}} \quad \text{أو} \quad \text{جـن} = \frac{\text{أ}(\text{ر}^{\text{ن}} - \text{ا})}{\text{ر} - \text{ا}} \quad ، \quad \text{ر} \neq \text{ا}$$

مساعدة: حالة خاصة عندما ر = ١ ، فإن جـن = أ × ن

برهان الصيغتين: جـن = أ + أر + أر^{٢} + ... + أر$^{\text{ن}-٣}$ + أر$^{\text{ن}-٢}$ + أر$^{\text{ن}-١}$ ... (١) ، وعند ضرب (١) في ر: رجـن = أر + أر^{٢} + ... + أر$^{\text{ن}-٢}$ + أر$^{\text{ن}-١}$ + أر^{ن} ... (٢). بطرح (١) من (٢): رجـن − جـن = أر^{ن} − أ ← (ر − ١)جـن = أ(ر^{ن} − ١) ← $\text{جـن} = \frac{\text{أ}(\text{ر}^{\text{ن}} - \text{ا})}{\text{ر} - \text{ا}}$. وبضرب البسط والمقام في −١ نحصل على الصيغة البديلة: $\text{جـن} = \frac{\text{أ}(\text{ا} - \text{ر}^{\text{ن}})}{\text{ا} - \text{ر}}$. *هل تعرف لماذا لا تصلح صيغة المجموع عندما ر = ١؟ (لأن المقام يصبح صفرًا.)*

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

مثال ١١

أوجِد مجموع أول ١٢ حدًّا من المتسلسلة الهندسية ٣ + ٦ + ١٢ + ٢٤ + ...

الحلّ: $\text{جـن} = \frac{\text{أ}(\text{ر}^{\text{ن}} - \text{ا})}{\text{ر} - \text{ا}}$ ، نستخدم أ = ٣ ، ر = ٢ ، ن = ١٢: $\text{جـ}_{١٢} = \frac{٣(٢^{١٢} - ١)}{٢ - ١} =$ ١٢٢٨٥

مثال ١٢

إذا كان الحدّ الثالث في متتالية هندسية يساوي تسعة أمثال الحدّ الأول ، وكان مجموع أول ستة حدود منها يساوي ك مرة مجموع أول حدّين ، فأوجِد قيمة ك.

الحلّ: الحدّ الثالث = ٩ × الحدّ الأول ← $أ ر^{٢} = ٩ أ$ ← ر = ± ٣ (نقسم طرفَي المعادلة على أ).

نستخدم $جـ_{٦} = ك جـ_{٢}$: $ك = \frac{أ(ر^{٦} - ١)}{ر - ١} \leftarrow ك = \frac{أ(ر^{٢} - ١)}{ر - ١} \cdot \frac{ر^{٦} - ١}{ر^{٢} - ١}$.

عندما ر = ٣ نحصل على ك = ٩١ ، وعندما ر = −٣ نحصل على ك = ٩١ ∴ ك = ٩١

تمارين ٣-٢

١) حدّد ما إذا كانت كل متتالية من المتتاليات الآتية هندسية ، أم لا ، وإذا كانت المتتالية هندسية ، فاكتب أساسها ، وحدّها الثامن:

أ ٢ ، ٤ ، ٨ ، ١٤ ، ...

ب ٧ ، ٢١ ، ٦٣ ، ١٨٩ ، ...

جـ ٨١ ، −٢٧ ، ٩ ، −٣ ، ...

د $\frac{١}{٩}$ ، $\frac{٢}{٩}$ ، $\frac{٤}{٩}$ ، $\frac{٧}{٩}$ ، ...

خالد كمال
khalidmath.surge.sh

هـ ١ ، ٠,٤ ، ٠,١٦ ، ٠,٠٦٤ ، ... ، ...

و ١ ، −١ ، ١ ، −١ ، ...

٢) إذا كان الحدّ الأول في متتالية هندسية (أ) ، والأساس (ر) ، فاكتب الحدّين السادس والخامس عشر بدلالة أ ، ر.

٣) إذا كان الحدّ الأول في متتالية هندسية ٢٧٠ ، والحدّ الرابع ٨٠ ، فأوجِد أساس المتتالية.

٤) إذا كان الحدّ الأول في متتالية هندسية ٥٠ ، والحدّ الثاني −٣٠ ، فأوجِد الحدّ الرابع.

٥) إذا كان الحدّ الثاني في متتالية هندسية ١٢ ، والحدّ الرابع ٢٧ ، فأوجِد الأساس ، والحدّ الأول (إذا علمت أن جميع حدّود المتتالية موجبة).

٦) إذا كان مجموع الحدّين الثاني والثالث في متتالية هندسية ٨٤ ، ويقلّ الحدّ الثاني عن الحدّ الأول بمقدار ١٦ ، فأوجِد الحدّ الأول في المتتالية علمًا بأن جميع الحدود موجبة.

٧) إذا علمت أن ثلاثة حدود متتابعة في متتالية هندسية هي س ، ٤ ، (س + ٦) ، فأوجِد القيم الممكنة لـ س.

٨) أوجِد مجموع أول ثمانية حدود في كل مما يأتي:

أ ٣ + ٦ + ١٢ + ٢٤ + ...

ب ١٢٨ + ٦٤ + ٣٢ + ١٦ + ...

ج ١ − ٢ + ٤ − ٨ + ...

د ٢٤٣ + ١٦٢ + ١٠٨ + ٧٢ + ...

٩) إذا كانت الحدود الأربعة الأولى في متتالية هندسية هي ٠,٥ ، ١ ، ٢ ، ٤ ، فأوجِد أقل عدد ممكن من الحدود يكون مجموعها أكبر من ١٠٠٠٠٠٠

١٠) تمّ رمي كرة رأسيًّا إلى الأعلى (من الأرض). وصلت الكرة إلى ارتفاع ٨ م ، ثم ارتطمت بالأرض وارتدّت. بعد كل ارتداد ترتفع $\frac{٣}{٤}$ الارتفاع السابق لهذا الارتداد.

أ اكتب عبارة جبرية لارتفاع الكرة بعد ارتطامها ن مرة بالأرض.

ب أوجد مجموع المسافات التي تخطّتها الكرة من الرمية الأولى حتى الارتطام الخامس بالأرض.

١١) إذا كان الحدّ الثاني في متتالية هندسية يساوي ٢٤ ، والحدّ الثالث هو ١٢(س + ١).

أ أوجِد بدلالة س الحدّ الأول في المتتالية.

ب إذا علمت أن مجموع أول ثلاثة حدود هو ٧٦ ، فأوجِد قيم س الممكنة.

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

١٢) إذا كان الحدّ الثالث في متتالية هندسية يساوي تسعة أمثال الحدّ الأول ، وكان مجموع أول أربعة حدود فيها يساوي ك مرة الحدّ الأول ، فأوجِد قيم ك الممكنة.

١٣) تقدّم شركة تبرّعًا سنويًّا لجمعية خيرية ، وتتزايد قيمة التبرّع بمقدار ١٠٪ سنويًّا. إذا علمت أن قيمة التبرّع سنة ٢٠١٠م تساوي ١٠٠٠٠ ريال عُماني ، فأوجِد:

أ قيمة التبرّع سنة ٢٠١٦م.

ب مجموع التبرّعات من سنة ٢٠١٠م حتى ٢٠١٦م.

١٤) ★ إذا كان الحدّ الأول في متتالية هندسية (أ) والأساس (ر) ومجموع أول ن حدًّا (جـن) ، فبيّن أن $\frac{\text{جـ}_{٢ن} - \text{جـ}_{ن}}{\text{جـ}_{ن}} = \text{ر}^{ن}$.

١٥) ★ إذا كانت المتتالية ١ ، ١ ، ٣ ، $\frac{١}{٣}$ ، ٩ ، $\frac{١}{٩}$ ، ٢٧ ، $\frac{١}{٢٧}$ ، ٨١ ، $\frac{١}{٨١}$ ، ... ، فأثبت أن مجموع أول ٢ن حدًّا في المتتالية هو $\frac{١}{٢}(٢ + ٣^{ن} - ٣^{-ن})$.

١٦) ★ ليكن جـن = ١ + ١١ + ١١١ + ١١١١ + ١١١١١ + ... إلى ن حدًّا. أثبت أن جـن = $\frac{١٠ن^{+١} - ١٠ - ٩ن}{٨١}$.

ورقة الإجابات النموذجية ٣-٢

ملاحظة: الإجابات من حسابي لأن كتاب الطالب لا يتضمن مفتاح إجابات.

١) (أ) ٢ ، ٤ ، ٨ ، ١٤: النسبة بين الحدّين الثاني والأول ٢ ، وبين الثالث والثاني ٢ ، لكن بين الرابع والثالث $\frac{١٤}{٨}$ ← ليست هندسية. (ولا حسابية).

⚠ **خطأ في الكتاب:** الحد الرابع المطبوع ١٤ ، ولو كان ١٦ لكانت المتتالية هندسية أساسها ٢ وحدّها الثامن ٢٥٦. نُفّذ الحل كما هو مطبوع.

(ب) ٧ ، ٢١ ، ٦٣ ، ١٨٩: ر = ٣ ، $ح_{٨} = ٧ \times ٣^{٧} = ١٥٣٠٩$

(ج) ٨١ ، −٢٧ ، ٩ ، −٣: $ر = -\frac{١}{٣}$ ، $ح_{٨} = ٨١ \times (-\frac{١}{٣})^{٧} = -\frac{١}{٢٧}$

(د) $\frac{١}{٩}$ ، $\frac{٢}{٩}$ ، $\frac{٤}{٩}$ ، $\frac{٧}{٩}$: النسبة ٢ ثم ٢ ثم $\frac{٧}{٤}$ ← ليست هندسية.

⚠ **خطأ في الكتاب:** لو كان الحد الرابع $\frac{٨}{٩}$ لكانت هندسية أساسها ٢ وحدّها الثامن $\frac{١٢٨}{٩}$. نُفّذ الحل كما هو مطبوع.

(هـ) $ر = ٠,٤$ ، $ح_{٨} = ٠,٤^{٧} = ٠,٠٠١٦٣٨٤$

(و) $ر = -١$ ، $ح_{٨} = -١$

٢) $ح_{٦} = أ_{٥}$ ، $ح_{١٥} = أ_{١٤}$

٣) $٢٧٠ر^{٣} = ٨٠ \leftarrow ر^{٣} = \frac{٨}{٢٧} \leftarrow ر = \frac{٢}{٣}$

٤) $ر = -\frac{٣}{٥}$ ، $ح_{٤} = ٥٠ \times (-\frac{٣}{٥})^{٣} = -\frac{٥٤}{٥} = -١٠,٨$

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

٥) أر = ١٢ ، أر$_{٣}$ = ٢٧ ← ر^{٢} = $\frac{٩}{٤}$ ← ر = $\frac{٣}{٢}$ (موجبة) ← أ = ٨

٦) أر + أر^{٢} = ٨٤ ، أ − أر = ١٦. من الثانية أ(١ − ر) = ١٦ ، ومن الأولى أر(١ + ر) = ٨٤.

بالقسمة: $\frac{ر(١ + ر)}{١ - ر}$ = $\frac{٨٤}{١٦}$ = $\frac{٢١}{٤}$ ← ٤ر^{٢} + ٤ر = ٢١ ← ٤ر^{٢} + ٢٥ر − ٢١ = ٠ ← (٤ر − ٣)(ر + ٧) = ٠ ← ر = $\frac{٣}{٤}$ (ر = −٧ مرفوض لأن الحدود موجبة). أ = ١٦ ÷ $\frac{١}{٤}$ = ٦٤.

٧) ٤^{٢} = س(س + ٦) ← س^{٢} + ٦س − ١٦ = ٠ ← (س − ٢)(س + ٨) = ٠ ← س = ٢ أو س = −٨

٨) (أ) ر = ٢: جـ$_{٨}$ = $\frac{٣(١ - ٢^{٨})}{١}$ = ٧٦٥ (ب) ر = $\frac{١}{٢}$: $\frac{١٢٨(١ - (١/٢)^{٨})}{١/٢}$ = ٢٥٦ − ١ = ٢٥٥

(ج) ر = −٢: $\frac{١(١ - (-٢)^{٨})}{١ + ٢}$ = $\frac{-٢٥٥}{٣}$ = −٨٥ (د) ر = $\frac{٢}{٣}$: $\frac{٢٤٣(١ - (٢/٣)^{٨})}{١/٣}$ = ٧٢٩ − $\frac{٢٥٦}{٩}$ = $\frac{٦٣٠٥}{٩}$ ≈ ٧٠٠,٥٦

٩) أ = ٠,٥ ، ر = ٢: جـن = ٠,٥(٢^{ن} − ١) > ١٠٠٠٠٠٠ ← ٢^{ن} > ٢٠٠٠٠٠١. ٢^{٢٠} = ١٠٤٨٥٧٦ (أقل) ، ٢^{٢١} = ٢٠٩٧١٥٢ (أكبر) ← أقل عدد من الحدود ن = ٢١

١٠) (أ) الارتفاع بعد ن ارتطامات = ٨($\frac{٣}{٤}$)^{ن} م.

(ب) أعلى ٨ م ثم نزولًا ٨ م (الارتطام ١) ، ثم ارتفاعات الارتداد: ٦ ، ٤,٥ ، ٣,٣٧٥ ، ٢,٥٣١٢٥ (حتى الارتطام ٥). كل ارتفاع يُقطع صعودًا ونزولًا. المسافة = ١٦ + ٢(٦ + ٤,٥ + ٣,٣٧٥ + ٢,٥٣١٢٥) = ١٦ + ٣٢,٨١٢٥ = ٤٨,٨١٢٥ م

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

١١) (أ) أر = ٢٤ ، أر$_{٢}$ = ١٢(س + ١) ← ر = $\frac{\text{س} + ١}{٢}$ ← أ = $\frac{٤٨}{\text{س} + ١}$.

(ب) أ + ٢٤ + ١٢(س + ١) = ٧٦ ← $\frac{٤٨}{\text{س} + ١}$ + ١٢(س + ١) = ٥٢. نضع ص = س + ١: ١٢ص^{٢} − ٥٢ص + ٤٨ = ٠ ← ٣ص^{٢} − ١٣ص + ١٢ = ٠ ← (٣ص − ٤)(ص − ٣) = ٠ ← ص = $\frac{٤}{٣}$ أو ٣ ← س = $\frac{١}{٣}$ أو س = ٢. (تحقّق: س = ٢ ← أ = ١٦ ، ١٦ + ٢٤ + ٣٦ = ٧٦ ✓)

١٢) أر$_{٢}$ = ٩أ ← ر = ٣ أو ر = −٣. ك = ١ + ر + ر$_{٢}$ + ر$_{٣}$: عندما ر = ٣: ك = ١ + ٣ + ٩ + ٢٧ = ٤٠ ، وعندما ر = −٣: ك = ١ − ٣ + ٩ − ٢٧ = −٢٠. إذن ك = ٤٠ أو ك = −٢٠

١٣) أ = ١٠٠٠٠ ، ر = ١٫١. (أ) سنة ٢٠١٦ هي الحد السابع: ١٠٠٠٠ × ١٫١^{٦} = ١٧٧١٥٫٦١ ريالًا عُمانيًّا.

(ب) ٧ حدود: $\frac{١٠٠٠٠(١٫١^{٧} - ١)}{٠٫١}$ = ٩٤٨٧١٫٧١ ريالًا عُمانيًّا

١٤) $\frac{\text{جـ}_{٢\text{ن}} - \text{جـ}_{\text{ن}}}{\text{جـ}_{\text{ن}}}$ = $\frac{\text{أ}(\text{ر}^{٢\text{ن}} - ١)/(\text{ر} - ١) - \text{أ}(\text{ر}^{\text{ن}} - ١)/(\text{ر} - ١)}{\text{أ}(\text{ر}^{\text{ن}} - ١)/(\text{ر} - ١)}$ = $\frac{\text{ر}^{٢\text{ن}} - \text{ر}^{\text{ن}}}{\text{ر}^{\text{ن}} - ١}$ = $\frac{\text{ر}^{\text{ن}}(\text{ر}^{\text{ن}} - ١)}{\text{ر}^{\text{ن}} - ١}$ = ر^{ن} ∎

١٥) الحدود الفردية (١ ، ٣ ، ٩ ، ...) متتالية هندسية أ = ١ ، ر = ٣ ، مجموع أول ن حدًّا منها = $\frac{٣^{\text{ن}} - ١}{٢}$. الحدود الزوجية (١ ، $\frac{١}{٣}$ ، $\frac{١}{٩}$ ، ...) هندسية أ = ١ ، ر = $\frac{١}{٣}$ ، مجموع أول ن حدًّا = $\frac{١ - ٣^{-\text{ن}}}{١ - ١/٣}$ = $\frac{٣}{٢}$(١ − ٣$^{-\text{ن}}$).

مجموع أول ٢ن حدًّا = $\frac{٣^{ن} - ١}{٢} + \frac{٣}{٢} - \frac{٣^{-ن}}{٢} = \frac{١}{٢}(٢ + ٣^{ن} - ٣^{-ن})$ ∎ (تحقّق: ن = ١ ← ١ + ١ = ٢ ، والصيغة: $\frac{١}{٢}(٢ + ٣ - ١) = ٢$ ✓)

١٦) كل حد ١١...١ (ك رقمًا) = $\frac{١٠^{ك} - ١}{٩}$. إذن جـن = $\frac{١}{٩}[(١٠ + ١٠^{٢} + ... + ١٠^{ن}) - ن] = \frac{١}{٩}[\frac{١٠(١٠^{ن} - ١)}{٩} - ن] = \frac{١٠^{ن+١} - ١٠ - ٩ن}{٨١}$ ∎

٣-٣ المتسلسلات الهندسية غير المنتهية

المتتالية غير المنتهية هي متتالية تستمرّ حدودها من دون توقف.

افترض المتتالية الهندسية غير المنتهية حيث أ = ٢ ، ر = $\frac{١}{٢}$ وعليه تكتب هكذا: ٢ ، ١ ، $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{١}{٨}$ ، ... يمكننا أن نحسب مجموع أول ن حدّ فيها: جـ١ = ٢ ، جـ٢ = ٣ ، جـ٣ = ٣ $\frac{١}{٢}$ ، جـ٤ = ٣ $\frac{٣}{٤}$ ، جـ٥ = ٣ $\frac{٧}{٨}$ ، وهكذا.

هذه المجاميع تقترب أكثر فأكثر من العدد ٤. (الشكل: مربّع بُعداه ٢ × ٢ مقسّم إلى مستطيلات مساحاتها ٢ ، ١ ، $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{١}{٨}$ ، ... ، ومجموع مساحاتها يقترب من مساحة المربّع وهي ٤.)

لذا نقول إن مجموع حدود المتتالية غير المنتهية ٢ + ١ + $\frac{١}{٢}$ + $\frac{١}{٤}$ + $\frac{١}{٨}$ + ... هو ٤ ، ونقول أيضًا إن مجموع الحدود إلى مالانهاية في المتسلسلة هو ٤ ، وإن المتسلسلة تقترب من العدد ٤ ، وتسمّى المتسلسلة من هذا النوع **متسلسلة متقاربة** convergent series.

غالبًا ما نتعامل مع مثال لمتسلسلة هندسية غير منتهية من دون أن ندركها! فماذا نعني بالكسر العشري الدوري ٠,٣٣٣٣٣...؟ يمكن أن نكتبه في صورة متسلسلة $\frac{٣}{١٠}$ + $\frac{٣}{١٠٠}$ + $\frac{٣}{١٠٠٠}$ + ... ؛ مجموع أول ن حدّ: جـ١ = ٠,٣ ، جـ٢ = ٠,٣٣ ، جـ٣ = ٠,٣٣٣ ، وهكذا.

تقترب هذه المجاميع إلى حدّ كبير من $\frac{١}{٣}$ ، لذا نقول إن مجموع المتسلسلة غير المنتهية هو $\frac{١}{٣}$ ، ونكتب $\frac{١}{٣}$ = ٠,٣٣٣٣٣... ، وهذا يبرّر ما تعوّدت أن تقوم به في السنوات السابقة. استخدام هذه الصيغة يختصر العمل ، وبالتالي يمكننا كتابة أيّ كسر عشري دوري في صورة كسر اعتيادي.

هل تعلم؟

أن أول شخص قدّم الأعداد العشرية غير المنتهية هو سيمون ستيفن Simon Stevin سنة ١٥٨٥م.

استكشاف ٣

١) استقصِ ما إذا كانت كل متسلسلة من المتسلسلات الهندسية غير المنتهية متقاربةً أم لا. يمكنك أن تستخدم جدول بيانات لتساعدك على إجراء الحسابات. إذا كانت المتسلسلة متقاربة ، فأوجِد مجموعها:

أ) أ = $\frac{٣}{٥}$ ، ر = −٢ ب) أ = ٣ ، ر = −$\frac{١}{٥}$ ج) أ = ٦ ، ر = $\frac{٢}{٣}$ د) أ = −$\frac{١}{٢}$ ، ر = −٢

٢) أوجِد متسلسلات هندسية متقاربة أخرى ، وأوجِد مجموعها في كل حالة إلى مالانهاية.

٣) هل يمكنك أن توجد شرطًا لـ ر لتكون المتسلسلة الهندسية متقاربة؟

إجابة الاستكشاف: (أ) ر = −٢ ← متباعدة. (ب) متقارية: ٣ ÷ (١ + $\frac{١}{٥}$) = $\frac{٥}{٢}$. *(ج) متقاربة:* ٦ ÷ $\frac{١}{٣}$ = ١٨. *(د) ر = −٢ ← متباعدة. (٣) الشرط:* −١ < ر < ١.

افترض أن المتسلسلة الهندسية أ + أر + أر^{٢} + ... + أر$^{ن-١}$ ... يُعطى المجموع جـ$_{ن}$ بالصيغة جـ$_{ن}$ = $\frac{أ(١ - ر^{ن})}{١ - ر}$. إذا كان −١ < ر < ١ ، فكلما زاد عدد الحدود ن ، فإن ر^{ن} تقترب أكثر فأكثر من الصفر. نقول عندما تقترب ن من مالانهاية فإن ر^{ن} تقترب من الصفر ، ونكتب «ن ← ∞ ، ر^{ن} ← ٠». وعليه ، عندما ن ← ∞ فإن $\frac{أ(١ - ر^{ن})}{١ - ر}$ ← $\frac{أ(١ - ٠)}{١ - ر}$ = $\frac{أ}{١ - ر}$. وهذا يؤدي إلى النتيجة:

نتيجة ٦

$$\text{جـ}_\infty = \frac{\text{أ}}{\text{ا} - \text{ر}} \quad ، \quad \text{حيث } -\text{ا} < \text{ر} < \text{ا}$$

إذا كان ر ≤ ا أو ر ≥ −ا ، فإن ر^{ن} ليست متقاربة ، الأمر الذي يعني أن المتسلسلة متباعدة. لذا تكون المتسلسلة الهندسية متقاربة فقط عندما −ا < ر < ا.

مثال ١٣

إذا علمت أن الحدود الأربعة الأولى في متتالية هندسية هي: ٥ ، ٤ ، ٣,٢ ، ٢,٥٦ ، فـ (أ) اكتب أساس المتتالية. (ب) أوجِد المجموع إلى مالانهاية.

الحلّ: (أ) الأساس = $\frac{\text{الحدّ الثاني}}{\text{الحدّ الأول}} = \frac{٤}{٥}$

(ب) $\text{جـ}_\infty = \frac{\text{أ}}{\text{ا} - \text{ر}}$ ، نستخدم أ = ٥ ، ر = $\frac{٤}{٥}$: $\frac{٥}{\text{ا} - ٤/٥} = ٢٥$

مثال ١٤

متتالية هندسية أساسها $-\frac{٢}{٣}$ ، ومجموع أول ثلاثة حدود فيها ٦٣ ، أوجد: (أ) حدّها الأول. (ب) مجموعها إلى مالانهاية.

مثال ١٤ (تابع)

الحلّ: (أ) $جـ_{٣} = \frac{أ(١ - ر^{٣})}{١ - ر}$ ، $ر = -\frac{٢}{٣}$ ، $جـ_{٣} = ٦٣ : ٦٣ = \frac{أ(١ + ٨/٢٧)}{٥/٣}$

$\frac{أ \times ٣٥/٢٧}{٥/٣}$ ← أ = ٨١.

(ب) $جـ_{\infty} = \frac{٨١}{١ + ٢/٣} = \frac{٨١}{٥/٣} = ٤٨\frac{٣}{٥}$

تمارين ٣-٣

١) أوجد المجموع إلى مالانهاية لكل متسلسلة هندسية من المتسلسلات الآتية:

أ) $٢ + \frac{٢}{٣} + \frac{٢}{٩} + \frac{٢}{٢٧} + ...$

ب) $١ + ٠,١ + ٠,٠١ + ٠,٠٠١ + ...$

ج) $٤٠ - ٢٠ + ١٠ - ٥ + ...$

د) $-٦٤ + ٤٨ - ٣٦ + ٢٧ - ...$

٢) إذا كانت الحدود الأربعة الأولى في متتالية هندسية هي: ١ ، $(٠,٥)^{٢}$ ، $(٠,٥)^{٤}$ ، $(٠,٥)^{٦}$ ، فأوجِد المجموع إلى مالانهاية.

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

٣) إذا كان الحدّ الأول في متتالية هندسية هو ٨ ، والحدّ الثاني هو ٦ ، فأوجِد المجموع إلى مالانهاية.

٤) إذا كان الحدّ الأول في متتالية هندسية هو ٢٧٠ ، والحدّ الرابع هو ٨٠ ، فأوجِد الأساس ، والمجموع إلى مالانهاية.

٥)

أ اكتب الكسر العشري الدوري ٠,٥٧ في صورة مجموع متتالية هندسية.

ب استخدم إجابتك في الجزئية (أ) لتثبت أن ٠,٥٧ يمكن كتابته في صورة $\frac{١٩}{٣٣}$

٦) إذا كان الحدّ الأول في متتالية هندسية هو ١٥٠ ، ومجموع الحدود إلى مالانهاية هو ٢٠٠ ، فأوجِد الأساس ، ومجموع أول أربعة حدود منها.

٧) إذا كان الحدّ الثاني في متتالية هندسية هو ٤,٥ ، ومجموع حدودها إلى مالانهاية هو ١٨ ، فأوجِد الأساس ، والحدّ الأول.

٨) ضع الكسر العشري الدوري ٠,٣١٥١٥١٥١٥... في صورة متسلسلة هندسية غير منتهية ، ثم أوجِد مجموعها.

٩) إذا كان الحدّ الثاني في متتالية هندسية هو ٩ ، والحدّ الرابع هو ٤ ، والأساس موجب ، فأوجِد:

أ الأساس ، والحدّ الأول.

ب مجموع الحدود إلى مالانهاية.

١٠) إذا كان الحدّ الثالث في متتالية هندسية هو ١٦ ، والحدّ السادس هو $-\frac{١}{٤}$ ، فأوجِد:

أ الأساس ، والحدّ الأول.

ب مجموع الحدود إلى مالانهاية.

١١) إذا كانت الحدود الثلاثة الأولى في متتالية هندسية هي: ١٣٥ ، ك ، ٦٠ ، وكانت جميع حدود المتتالية موجبة ، فأوجِد:

أ قيمة ك.

ب مجموع الحدود إلى مالانهاية.

١٢) إذا كانت الحدود الثلاثة الأولى في متتالية هندسية هي: ك + ١٢ ، ك ، ك − ٩ على الترتيب ، فأوجِد:

أ قيمة ك.

ب مجموع الحدود إلى مالانهاية.

١٣) إذا كان الحدّ الرابع في متتالية هندسية هو ٤٨ ، ومجموع الحدود إلى مالانهاية يساوي خمسة أمثال الحدّ الأول ، فأوجِد الحدّ الأول.

١٤) إذا علمت أن الحدّ الأول لمتتالية هندسية هو أ ، وأساسها ر ، جـ٣ = ٣,٩٢ ، جـ∞ = ٥ ، فأوجِد قيمة أ ، ر.

١٥) متتالية هندسية حدّها الأول ١ ، وحدّها الثاني ٢جتا(س) حيث ٠ < س < $\frac{\pi}{٢}$. أوجِد مجموعة قيم س لتكون المتتالية متقاربة.

ورقة الإجابات النموذجية ٣-٣

ملاحظة: الإجابات من حسابي لأن كتاب الطالب لا يتضمن مفتاح إجابات.

١) (أ) ر = $\frac{١}{٣}$: $\frac{٢}{١/٣ - ١}$ = ٣ (ب) ر = ٠,١ : $\frac{١}{٠,٩}$ = $\frac{١٠}{٩}$ (جـ) ر = $-\frac{١}{٢}$: $\frac{٤٠}{١,٥}$ = $\frac{٨٠}{٣}$ (د) ر = $-\frac{٣}{٤}$: $\frac{-٦٤}{٣/٤ + ١}$ = $-\frac{٢٥٦}{٧}$

٢) ر = $(٠,٥)^{٢}$ = ٠,٢٥ : $\frac{١}{١ - ٠,٢٥}$ = $\frac{٤}{٣}$

٣) ر = $\frac{٦}{٨}$ = $\frac{٣}{٤}$: $\frac{٨}{١/٤}$ = ٣٢

٤) $٢٧٠ر^{٣} = ٨٠ \leftarrow ر = \frac{٢}{٣}$ ، المجموع $= \frac{٢٧٠}{١/٣} = ٨١٠$

٥) (أ) $٠,٥٧٥٧٥٧... = ٠,٥٧ + ٠,٠٠٥٧ + ٠,٠٠٠٠٥٧ + ...$ ، أ $= ٠,٥٧$ ، ر $= ٠,٠١$ (ب) المجموع $= \frac{٠,٥٧}{٠,٩٩} = \frac{٥٧}{٩٩} = \frac{١٩}{٣٣}$ ■

٦) $\frac{١٥٠}{١ - ر} = ٢٠٠ \leftarrow ١ - ر = \frac{٣}{٤} \leftarrow ر = \frac{١}{٤}$. جـ$_{٤}$ $= \frac{١٥٠(١ - (١/٤)^{٤})}{١ - ١/٤} = ٢٠٠ \times \frac{٢٥٥}{٢٥٦} = \frac{٦٣٧٥}{٣٢} = ١٩٩,٢١٨٧٥$

٧) أر $= ٤,٥$ ، $\frac{أ}{١ - ر} = ١٨ \leftarrow أ = ١٨(١ - ر) \leftarrow ١٨ر(١ - ر) = ٤,٥ \leftarrow ر^{٢} - ر + ٠,٢٥ = ٠ \leftarrow (ر - ٠,٥)^{٢} = ٠ \leftarrow ر = \frac{١}{٢}$ ، أ $= ٩$

٨) $٠,٣١٥١٥١٥... = ٠,٣ + ٠,٠١٥ + ٠,٠٠٠١٥ + ...$ ، الحدّ الأول للمتسلسلة الهندسية ٠,٠١٥ ، ر $= ٠,٠١$. المجموع $= ٠,٣ + \frac{٠,٠١٥}{٠,٩٩} = \frac{٣}{١٠} + \frac{١}{٦٦} = \frac{٥٢}{١٦٥}$

٩) (أ) $ر^{٢} = \frac{٤}{٩} \leftarrow ر = \frac{٢}{٣}$ ، أ $= ٩ \div \frac{٢}{٣} = ١٣,٥$ (ب) $\frac{١٣,٥}{١/٣} = ٤٠,٥$

١٠) (أ) $ر^{٣} = \frac{-١/٤}{١٦} = -\frac{١}{٦٤} \leftarrow ر = -\frac{١}{٤}$ ، أ $= ١٦ \div \frac{١}{١٦} = ٢٥٦$ (ب) $\frac{٢٥٦}{١ + ١/٤} = \frac{١٠٢٤}{٥} = ٢٠٤,٨$

١١) (أ) $ك^{٢} = ١٣٥ \times ٦٠ = ٨١٠٠ \leftarrow ك = ٩٠$ (موجبة). (ب) $ر = \frac{٩٠}{١٣٥} = \frac{٢}{٣} \leftarrow$ المجموع $= \frac{١٣٥}{١/٣} = ٤٠٥$

خالد كمال
khaled.math.surge.sh

١٢) (أ) ك$_{٢}$ = (ك + ١٢)(ك − ٩) = ك$_{٢}$ + ٣ك − ١٠٨ ← ك = ٣٦ (الحدود: ٤٨ ، ٣٦ ، ٢٧). (ب) ر = $\frac{٣٦}{٤٨} = \frac{٣}{٤} \leftarrow \frac{٤٨}{١/٤} = ١٩٢$

١٣) أر^{٣} = ٤٨ ، $\frac{أ}{١ - ر}$ = ٥أ ← ١ − ر = $\frac{١}{٥}$ ← ر = $\frac{٤}{٥}$ ← أ = ٤٨ ÷ $\frac{٦٤}{١٢٥} = \frac{٣٧٥}{٤}$ = ٩٣,٧٥

١٤) $\frac{أ}{١ - ر}$ = ٥ ← أ = ٥(١ − ر). جـ$_{٣}$ = $\frac{أ(١ - ر^{٣})}{١ - ر}$ = ٣,٩٢ ← ٥(١ − ر^{٣}) = ٣,٩٢ ← ر^{٣} = ٠,٢١٦ ← ر = ٠,٦ ← أ = ٢

١٥) الأساس ر = ٢جتا س. للتقارب: |٢جتا س| < ١ ← جتا س < $\frac{١}{٢}$ (وجتا س > ٠ لأن س في الربع الأول) ← $\frac{\pi}{٣}$ < س < $\frac{\pi}{٢}$

٤-٣ المزيد من المتتاليات الحسابية والهندسية

استكشاف ٤

أ ، ب ، جـ ، ...

١) إذا علمت أن أ ، ب ، جـ تشكل متتالية حسابية ، فأوجِد معادلة تربط بين أ ، ب ، جـ.

٢) إذا علمت أن أ ، ب ، جـ تشكل متتالية هندسية ، فأوجِد معادلة تربط بين أ ، ب ، جـ.

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

إجابة الاستكشاف: (أ) ب − أ = جـ − ب أي ٢ب = أ + جـ. (٢) $\frac{\text{ب}}{\text{أ}} = \frac{\text{جـ}}{\text{ب}}$ أي ب^{٢} = أ × جـ.

مثال ١٥

متسلسلة حسابية حدودها الثلاثة الأولى هي س ، ص ، س^{٢} ، ومتسلسلة هندسية حدودها الثلاثة الأولى هي س ، س^{٢} ، ص ، علمًا بأن س < ٠ ، أوجِد: (أ) قيمتَي س ، ص. (ب) مجموع حدود المتسلسلة الهندسية إلى مالانهاية. (ج) مجموع أول ٢٠ حدًّا في المتسلسلة الحسابية.

الحلّ: (أ) من المتسلسلة الحسابية (نستخدم الأساس): ص − س = س^{٢} − ص ← ٢ص = س^{٢} + س ..... (١)

من المتسلسلة الهندسية (نستخدم النسبة المشتركة): $\frac{\text{ص}}{\text{س}^{٢}} = \frac{\text{س}^{٢}}{\text{س}}$ ← ص = س^{٣} ..... (٢)

من (١) و (٢): ٢س^{٣} = س^{٢} + س ← س(٢س^{٢} − س − ١) = ٠ ← س(٢س + ١)(س − ١) = ٠. إمّا س = ٠ أو س = $-\frac{١}{٢}$ أو س = ١ ؛ س ≠ ٠ ، س ≠ ١ لأن س < ٠ ∴ س = $-\frac{١}{٢}$ ، ص = $-\frac{١}{٨}$

(ب) أ = $-\frac{١}{٢}$ ، ر = $-\frac{١}{٢}$: جـ$_{\infty}$ = $\frac{\text{أ}}{١ - \text{ر}}$ = $\frac{-١/٢}{١ + ١/٢}$ = $-\frac{١}{٣}$

مثال ١٥ (تابع)

(ج) $أ = -\frac{١}{٢}$ ، $د = -\frac{١}{٨} - (-\frac{١}{٢}) = \frac{٣}{٨}$ ، ن = ٢٠: $جـ_{٢٠} = \frac{٢٠}{٢}[-١ + ١٩(\frac{٣}{٨})] = ٦١,٢٥$

تمارين ٣-٤

١) إذا كان الحدّ الأول في متتالية هو ١٦ ، والحدّ الثاني هو ٢٤ ، فأوجِد مجموع أول ثمانية حدود إذا علمت أن المتتالية:

أ حسابية.

ب هندسية.

٢) الحدّ الأول في متتالية هو ٢٠ ، والحدّ الثاني هو ١٦

أ إذا علمت أن المتتالية هندسية ، فأوجِد مجموع الحدود إلى مالانهاية.

ب إذا علمت أن المتتالية حسابية ، فأوجِد عدد حدود المتتالية إذا كان مجموع جميع الحدود −١٦٠

٣) إذا علمت أن الحدود الثلاثة الأولى في متتالية هندسية هي الحدود الأول والرابع والعاشر على الترتيب في متتالية حسابية ، وكان الحدّ الأول في كل متتالية هو ١٢ وأساس المتتالية الهندسية ر حيث ر ≠ ١ ، فأوجِد:

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

أ قيمة ر.

ب الحدّ السادس في كل متتالية.

٤) تتكوّن متتالية هندسية من ثمانية حدود ، حدّها الأول ٢٥٦ ، وأساسها $\frac{١}{٢}$ ، وتتكوّن متتالية حسابية من ٥١ حدًّا ، وأساسها $\frac{١}{٢}$. إذا كان مجموع حدود المتتالية الهندسية يساوي مجموع حدود المتتالية الحسابية ، فأوجِد الحدّ الأول ، والحدّ الأخير في المتتالية الحسابية.

٥) إذا كانت الحدود الثلاثة الأولى في متتالية هندسية هي الحدود الأول والسادس والتاسع على الترتيب في متتالية حسابية. إذا علمت أن الحدّ الأول في كل متتالية هو ١٠٠ ، وأساس المتتالية الهندسية ر حيث ر ≠ ١ ، فأوجِد:

أ قيمة ر.

ب الحدّ الخامس في كل متتالية.

٦) الحدّ الأول في متتالية حسابية هو ١٦ ، ومجموع أول ٢٠ حدًّا فيها هو ١٠٨٠

أ أوجِد أساس هذه المتتالية.

ب إذا علمت أن الحدّ الأول ، والحدّ الثالث ، والحدّ العام في هذه المتتالية الحسابية هي الحدود الثلاثة الأولى على الترتيب لمتتالية هندسية ، فأوجِد أساس المتتالية الهندسية ، وقيمة ن.

٧) الحدّ الأول في متتالية هو (٢س) ، والحدّ الثاني هو ($س^{٢}$).

أ إذا كانت المتتالية حسابية ، وأساسها ١٥ ، فأوجِد القيمتَين الممكنتَين لـ س ، والقيم المناظرة للحدّ الثالث.

ب إذا كانت المتتالية هندسية ، وحدّها الثالث يساوي $-\frac{١}{١٦}$ ، فأوجِد مجموعها إلى مالانهاية.

ورقة الإجابات النموذجية ٣-٤

ملاحظة: الإجابات من حسابي لأن كتاب الطالب لا يتضمن مفتاح إجابات.

١) (أ) د = ٨ ، $ج_{٨} = ٤(٣٢ + ٧ \times ٨) = ٣٥٢$ (ب) $ر = \frac{٣}{٢} : \frac{١٦(١ - (١,٥)^{٨})}{٠,٥} = ٧٨٨,١٢٥$

٢) (أ) $ر = \frac{١٦}{٢٠} = ٠,٨ \leftarrow \frac{٢٠}{١ - ٠,٨} = ١٠٠$ (ب) $د = -٤ : \frac{ن}{٢}(٤٠ - ٤(ن - ١)) = -١٦٠ \leftarrow$

$ن(٤٤ - ٤ن) = -٣٢٠ \leftarrow ن^{٢} - ١١ن - ٨٠ = ٠ \leftarrow (ن - ١٦)(ن + ٥) = ٠ \leftarrow ن = ١٦$

٣) المتتالية الحسابية: ١٢ ، ١٢ + ٣د ، ١٢ + ٩د. الهندسية: ١٢ ، ١٢ر ، ١٢ر^{٢}. ١٢ر = ١٢ + ٣د ← د = ٤(ر − ١). ١٢ر^{٢} = ١٢ + ٩د = ١٢ + ٣٦(ر − ١) ← ر^{٢} − ٣ر + ٢ = ٠ ← ر = ٢ (ر ≠ ١) ، د = ٤.

(أ) ر = ٢ (ب) الهندسية: ح$_{٦}$ = ١٢ × ٢^{٥} = ٣٨٤ ، الحسابية: ح$_{٦}$ = ١٢ + ٥ × ٤ = ٣٢

٤) مجموع الهندسية = $\frac{٢٥٦(١ - (١/٢)^{٨})}{١/٢}$ = ٥١٠. للحسابية: $\frac{٥١}{٢}$(٢أ + ٥٠ × $\frac{١}{٢}$) = ٥١٠ ← ٢أ + ٢٥ = ٢٠ ← أ = −٢,٥. الحدّ الأخير = −٢,٥ + ٢٥ = ٢٢,٥

٥) الحسابية: ١٠٠ ، ١٠٠ + ٥د ، ١٠٠ + ٨د. الهندسية: ١٠٠ ، ١٠٠ر ، ١٠٠ر^{٢}. ر = ١ + ٥٠,٠٥د ← د = ٢٠(ر − ١). ١٠٠ر^{٢} = ١٠٠ + ١٦٠(ر − ١) ← ٥ر^{٢} − ٨ر + ٣ = ٠ ← (٥ر − ٣)(ر − ١) = ٠ ← ر = $\frac{٣}{٥}$ (ر ≠ ١) ، د = −٨.

(أ) ر = $\frac{٣}{٥}$ (ب) الهندسية: ح$_{٥}$ = ١٠٠ × ($\frac{٣}{٥}$)^{٤} = ١٢,٩٦ ، الحسابية: {h5} = ١٠٠ + ٤ × (−٨) = ٦٨

٦) (أ) ١٠٨٠ = ١٠(٣٢ + ١٩د) ← د = ٤ (ب) الحدود: ١٦ ، ٢٤ ، ١٦ + ٤(ن − ١) = ٤ن + ١٢.

أساس الهندسية = $\frac{٢٤}{١٦}$ = $\frac{٣}{٢}$ ، والحدّ الثالث للهندسية = ٢٤ × $\frac{٣}{٢}$ = ٣٦ ← ٤ن + ١٢ = ٣٦ ← ن = ٦

٧) (أ) د = س^{٢} − ٢س = ١٥ ← س^{٢} − ٢س − ١٥ = ٠ ← (س − ٥)(س + ٣) = ٠ ← س = ٥ أو س = −٣. الحدّ الثالث = س^{٢} + ١٥: عندما س = ٥ ← ٤٠ ، وعندما س = −٣ ← ٢٤.

(ب) ر = $\frac{\text{س}^{٢}}{٢\text{س}}$ = $\frac{\text{س}}{٢}$ ، الحدّ الثالث = ٢س × $\frac{\text{س}^{٢}}{٤}$ = $\frac{\text{س}^{٣}}{٢}$ = $-\frac{١}{١٦}$ ← س^{٣} = $-\frac{١}{٨}$

← س = $-\frac{١}{٢}$ ، أ = −١ ، ر = $-\frac{١}{٤}$. المجموع = $\frac{-١}{١ + ١/٤}$ = $-\frac{٤}{٥}$

قائمة التحقّق من التعلّم والفهم

المتسلسلات الحسابية

في المتتالية الحسابية التي حدّها الأول (أ) ، وأساسها (د) ، وحدها الأخير (ل) ، وعدد حدودها (ن):

• الحد النوني (حـن) هو أ + (ن − ١)د.

• مجموع الحدود جـن = $\frac{\text{ن}}{٢}$ (أ + ل) أو جـن = $\frac{\text{ن}}{٢}$ [٢أ + (ن − ١)د].

المتسلسلات الهندسية

في المتتالية الهندسية التي حدّها الأول (أ) ، وأساسها (ر) ، وعدد حدودها (ن):

• الحدّ النوني (حـن) = أر$^{\text{ن}-١}$.

• مجموع الحدود جـن = $\frac{\text{أ}(١ - \text{ر}^{\text{ن}})}{١ - \text{ر}}$ أو جـن = $\frac{\text{أ}(\text{ر}^{\text{ن}} - ١)}{\text{ر} - ١}$ ، ر ≠ ١.

• عندما تتقارب المتسلسلة الهندسية غير المنتهية ، فإن جـ$_{\infty}$ = $\frac{\text{أ}}{١ - \text{ر}}$ ، −١ < ر < ١.

تمارين مراجعة نهاية الوحدة الثالثة

١) إذا كان الحدّ الأول في متتالية حسابية هو ١,٧٥ ، والحدّ الثاني هو ١,٥ ، ومجموع أول ن حدًّا فيها هو −ن ، فأوجِد قيمة ن.

٢) إذا كان الحدّ الثاني من متتالية هندسية هو −١٤٥٨ ، والحدّ الخامس هو ٤٣٢ ، فأوجِد:

أ أساس (النسبة المشتركة) المتتالية.

ب الحدّ الأول في المتتالية.

ج مجموع الحدود في المتتالية إلى مالانهاية.

٣) متتالية حسابية حدّها الأول (أ) ، وأساسها (د) ، ومجموع أول ١٠٠ حدّ فيها يساوي ٢٥ مرّة مجموع أول ٢٠ حدًّا.

أ أوجِد قيمة د بدلالة أ.

ب اكتب عبارة جبرية بدلالة أ للحدّ الخمسين.

٤) إذا كان الحدّ العاشر في متتالية حسابية هو ١٧ ، ومجموع أول خمسة حدود فيها هو ١٩٠ ، فأوجِد كلًّا ممّا يأتي:

أ الحدّ الأول ، وأساس هذه المتتالية.

ب قيمة ن إذا علمت أن قيمة الحدّ العام في المتتالية −١٩

٥)

أ إذا كان الحدّ الخامس في متتالية حسابية هو ١٨ ، ومجموع أول ثمانية حدود فيها يساوي ١٨٦ ، فأوجِد الحدّ الأول ، وأساس المتتالية.

ب إذا كان الحدّ الأول في متتالية هندسية هو ٣٢ ، والحدّ الرابع هو $\frac{١}{٢}$ ، فأوجِد مجموع المتتالية إلى مالانهاية.

٦)

أ إذا كان الحدّ السابع في متتالية حسابية هو ١٩ ، ومجموع أول اثني عشر حدًّا يساوي ٢٢٤ ، فأوجِد الحدّ الرابع.

ب إذا كان الحدّ الأول في متتالية هندسية هو ٣ ، وأساسها ر ، وفي متتالية هندسية أخرى كان الحدّ الأول ٢ ، والأساس $\frac{١}{٥}$ ر ، وكان للمتتاليتين المجموع نفسه إلى مالانهاية أ ، فأوجِد قيمة كلٍّ من ر ، أ

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

٧)

أ إذا كان الحدّ الأول في متتالية هندسية هو (أ) ، وأساسها هو (ر) ، ومجموع حدودها إلى مالانهاية هو (ك) ، والحدّ الأول في متتالية هندسية ثانية (٥أ) ، وأساسها (٣ر) ، ومجموع حدودها إلى مالانهاية ١٠ك ، فأوجِد قيمة (ر).

ب إذا كان الحدّ الأول في متتالية حسابية −٤ ، والحدّ العام (الحدّ النوني) هو ٨ ، والحدّ (٢ن) هو ٢٠,٨ ، فأوجِد قيمة ن

٨) ★ يجرى اختبار قصير في أحد برامج الألعاب التلفزيونية ، حيث يربح المتسابق جائزة مقدارها ١٠٠٠ ريال عُماني. إذا لم يجب أحد المتسابقين بطريقة صحيحة ، تتراكم الجائزة وتزداد قيمتها في اليوم التالي ، وتزداد قيمتها بالطريقة نفسها كل يوم حتى يتمّ ربحها. اعتمدت إدارة التلفاز نموذجَين مختلفَين لزيادة الجائزة المالية:

النموذج الأول: زيادة الجائزة المالية ١٠٠٠ ريال عُماني كل يوم.

النموذج الثاني: زيادة الجائزة المالية ١٠٪ كل يوم.

في كل يوم لا يتمّ فيه ربح الجائزة تقدّم إدارة التلفاز تبرّعًا خيريًّا مقداره ٥٪ من قيمة الجائزة في ذلك اليوم. إذا لم يتمّ ربح الجائزة بعد مرور ٤٠ يومًا ، فاحسب مجموع التبرّعات الخيرية:

أ إذا تمّ اعتماد النموذج الأول.

ب إذا تمّ اعتماد النموذج الثاني.

٩) ★ متتالية حسابية أول حدَّين فيها هما ١ ، جتا٢س على الترتيب. بيّن أنه يمكن التعبير عن مجموع أول عشرة حدود في صورة أ − ب جا٢س ، حيث أ ، ب عددان ثابتان.

١٠) ★ الحدّ الأول في متتالية هو (٤س) ، والحدّ الثاني (س٢).

أ إذا كانت المتتالية حسابية ، وأساسها ١٢ ، فأوجِد القيم الممكنة للعدد س ، والقيم المناظرة للحدّ الثالث.

ب إذا كانت المتتالية هندسية ، ومجموع حدودها إلى مالانهاية يساوي ٨ ، فأوجِد الحدّ الثالث.

١١) ★ إذا كان الحدّان الثالث والرابع في متتالية هندسية هما $\frac{١}{٣}$ ، $\frac{٢}{٩}$ على الترتيب ، فأوجِد مجموع حدود المتتالية إلى مالانهاية.

أ

ب دائرة قُسّمت إلى ٥ قطاعات دائرية بحيث تشكّل قياسات زوايا القطاعات متتالية حسابية. إذا علمت أن قياس زاوية أكبر قطاع يعادل ٤ أمثال قياس زاوية أصغر قطاع ، فأوجِد قياس زاوية أكبر قطاع.

خالد كمال
khaled-math.site.sh

١٢) ★ مجموع أول ١٠ حدود في متتالية حسابية هو ٤٠٠ ، ومجموع الحدود العشرة التالية هو ١٠٠٠ ، أوجِد أساس المتتالية ، وحدّها الأول.

أ

ب في إحدى المتتاليات الهندسية ، الحدّ الأول (أ) ، وأساسها (ر) ، ومجموع حدودها إلى مالانهاية يساوي ٦ ، وفي متتالية هندسية ثانية ، الحدّ الأول (أ٢) ، وأساسها (ر٢) ، ومجموع حدودها إلى مالانهاية ٧ ، أوجِد قيمة كل من أ ، ر.

ورقة الإجابات النموذجية لمراجعة الوحدة ٣

ملاحظة: الإجابات من حسابي لأن كتاب الطالب لا يتضمن مفتاح إجابات.

١) د = ١,٥ − ١,٧٥ = −٠,٢٥ ← جـ٢٠ = $\frac{٢٠}{٢}$(٢ × ٣,٥ − ١٩ × ٠,٢٥) = ١٠(٧ − ٤,٧٥) = ٢٢,٥ ← ن = ٢٣

٢) (أ) أر = −١٤٥٨ ، أر٤ = ٤٣٢ ← ر٣ = $\frac{٨}{٢٧}$ ← ر = $\frac{٢}{٣}$ (ب) أ = −١٤٥٨ ÷ (−$\frac{٢}{٣}$) = ٢١٨٧

(ج) $\frac{٢١٨٧}{١ + ٢/٣}$ = $\frac{٦٥٦١}{٥}$ = ١٣١٢,٢

٣) (أ) ٥٠(أ٢ + د٩٩) = ٢٥ × ١٠(أ٢ + د١٩) ← ٤٩٥٠د + ١١٠٠أ = ٤٧٥٠د + ٥٠٠أ ← ٢٠٠د = ٤٠٠أ

← د = ٢أ (ب) ٥٠ح = أ + ٤٩ × ٢أ = ٩٩أ

٤) (أ) أ + ٩د = ١٧ ، $\frac{٥}{٢}$(٢أ + ٤د) = ١٩٠ ← أ + ٢د = ٣٨ ← ٧د = −٢١ ← د = −٣ ، أ = ٤٤.

(ب) ٤٤ − ٣(ن − ١) = −١٩ ← ن − ١ = ٢١ ← ن = ٢٢

٥) (أ) أ + ٤د = ١٨ ، ٤(٢أ + ٧د) = ١٨٦ ← ٢أ + ٧د = ٤٦,٥. من الأولى أ = ١٨ − ٤د ← ٣٦ − ٨د + ٧د = ٤٦,٥ ← د = −١٠,٥ ، أ = ٦٠. (تحقّق: ٤(١٢٠ − ٧٣,٥) = ١٨٦ ✓)

(ب) ٣٢ر^{٣} = $\frac{١}{٢}$ ← ر^{٣} = $\frac{١}{٦٤}$ ← ر = $\frac{١}{٤}$ ← المجموع = $\frac{٣٢}{٣/٤}$ = $\frac{١٢٨}{٣}$ = ٤٢ $\frac{٢}{٣}$

٦) (أ) أ + ٦د = ١٩ ، ٦(٢أ + ١١د) = ٢٢٤ ← ٢أ + ١١د = $\frac{١١٢}{٣}$. أ = ١٩ − ٦د ← ٣٨ − ١٢د + ١١د = $\frac{١١٢}{٣}$ ← د = $\frac{٢}{٣}$ ، أ = ١٥ ← ح$_{٤}$ = ١٥ + ٣ × $\frac{٢}{٣}$ = ١٧

(ب) $\frac{٣}{١ − ر}$ = $\frac{٢}{٥/ر − ١}$ ← ٣ − ٠,٦ر = ٢ − ٢ر ← ١,٤ر = −١ ← ر = −$\frac{٥}{٧}$ ، أ = $\frac{٣}{١٢/٧}$ = $\frac{٧}{٤}$

٧) (أ) ك = $\frac{أ}{١ − ر}$ ، ١٠ك = $\frac{٥أ}{١ − ٣ر}$ ← $\frac{١١٠أ}{١ − ر}$ = $\frac{٥أ}{١ − ٣ر}$ ← ١١٠(١ − ر^{٣}) = ٥(١ − ر^{٥}) ← ١١٠ − ١١٠ر^{٣} = ٥ − ٥ر^{٥} ← ٢٥ر^{٥} = ٥ ← ر = $\frac{١}{٥}$

(ب) ٨ = −٤ + (ن − ١)د ← (ن − ١)د = ١٢. ٢٠,٨ = −٤ + (٢ن − ١)د ← (٢ن − ١)د = ٢٤,٨.
بالطرح: ن د = ١٢,٨ ← د = ١٢,٨ − ١٢ = ٠,٨ ← ن = ١٦

٨) الجائزة في اليوم ك: النموذج الأول: ١٠٠٠ك ؛ النموذج الثاني: ١٠٠٠ × ١,١$^{ك−١}$ (ك = ١ ، ٢ ، ... ، ٤٠). التبرّع اليومي = ٥٪ من الجائزة.

أ) مجموع الجوائز = ١٠٠٠ × (١ + ٢ + ... + ٤٠) = ١٠٠٠ × ٨٢٠ = ٨٢٠٠٠٠ ← التبرّعات = ٠,٠٥ × ٨٢٠٠٠٠ = ٤١٠٠٠ ريال عُماني.

٢) مجموع الجوائز = $\frac{١٠٠٠(١,١^{٤٠} - ١)}{٠,١}$ ≈ ٤٤٢٥٩٢,٥٦ ← التبرّعات = ٠,٠٥ × ٤٤٢٥٩٢,٥٦ ≈ ٢٢١٢٩,٦٣ ريالًا عُمانيًّا.

٩) الأساس د = جتا٢س − ١ = −جا٢س. جـ١ = ٥(٢ × ١ + ٩ × (−جا٢س)) = ١٠ − ٤٥جا٢س ، وهي بالصورة أ − ب جا٢س حيث أ = ١٠ ، ب = ٤٥ ∎

١٠) (أ) س٢ − ٤س = ١٢ ← س٢ − ٤س − ١٢ = ٠ ← (س − ٦)(س + ٢) = ٠ ← س = ٦ أو س = −٢. الحدّ الثالث = س٢ + ١٢: ٤٨ (عندما س = ٦) ، ١٦ (عندما س = −٢).

(ب) ر = $\frac{س}{٤}$ ، $\frac{٤س}{١ - س/٤}$ = ٨ ← ١٦س = ٣٢ − ٨س ← س = $\frac{٤}{٣}$ ، ر = $\frac{١}{٣}$ ، أ = $\frac{١٦}{٣}$.

الحدّ الثالث = $\frac{١٦}{٣} \times \frac{١}{٩} = \frac{١٦}{٢٧}$

١١) (أ) ر = $\frac{٢/٩}{١/٣} = \frac{٢}{٣}$ ، أ = $\frac{١/٣}{(٢/٣)^{٢}} = \frac{٣}{٤}$ ← المجموع = $\frac{٣/٤}{١/٣} = \frac{٩}{٤}$ = ٢,٢٥

(ب) مجموع الزوايا ٣٦٠° ، أكبر = ٤ × أصغر: $\frac{٥}{٢}$(أ + ٤أ) = ٣٦٠ ← ١٢,٥أ = ٣٦٠ ← أ = ٢٨,٨° ← أكبر زاوية = ١١٥,٢°

١٢) (أ) جـ١ = ٤٠٠ ، جـ٢ = ٤٠٠ + ١٠٠٠ = ١٤٠٠. ٥(٢أ + ٩د) = ٤٠٠ ← ٢أ + ٩د = ٨٠ ، ١٠(٢أ + ١٩د) = ١٤٠٠ ← ٢أ + ١٩د = ١٤٠. بالطرح: ١٠د = ٦٠ ← د = ٦ ، أ = ١٣.

(ب) $\frac{أ}{١ - ر}$ = ٦ ← أ = ٦(١ − ر). $\frac{أ^{٢}}{١ - ر^{٢}}$ = ٧ ← $\frac{٣٦(١ - ر)^{٢}}{(١ - ر)(١ + ر)}$ = ٣٦(١ − ر) = ٧(١ + ر) ← ٣٦ − ٣٦ر = ٧ + ٧ر ← ر = $\frac{٢٩}{٤٣}$ ، أ = ٦ × $\frac{١٤}{٤٣}$ = $\frac{٨٤}{٤٣}$