١-١ الإكمال إلى مُربّع

١-١ أ كتابة العبارة الجبرية بطريقة الإكمال إلى مُربّع

تهدف طريقة **الإكمال إلى مُربَّع** completing the square إلى إعادة كتابة العبارة الجبرية التربيعية بحيث يظهر المتغيّر مرّة واحدة فقط ويصبح التعامل معها أسهل.

إذا فكّكنا العبارتَين الجبريّتَين $(س + أ)^{2}$ ، $(س - أ)^{2}$ ، سنحصل على النتائج الآتية:

$(س + أ)^{٢} = س^{٢} + ٢أس + أ^{٢}$ ، $(س - أ)^{٢} = س^{٢} - ٢أس + أ^{٢}$

إنّ إعادة ترتيب العبارات الجبرية يعطي النتائج الآتية:

نتيجة ١

$س^{٢} + ٢أس = (س + أ)^{٢} - أ^{٢}$ ، $س^{٢} - ٢أس = (س - أ)^{٢} - أ^{٢}$

١- لإكمال مُربّع العبارة الجبرية $س^{٢} + ١٠س$ ، يمكننا استخدام النتيجة (١) أعلاه على النحو الآتي: $(١٠ \div ٢ = ٥)$

$س^{٢} + ١٠س = (س + ٥)^{٢} - ٥^{٢}$

$س^{٢} + ١٠س = (س + ٥)^{٢} - ٢٥$

٢- لإكمال مُربّع العبارة الجبرية $س^{٢} + ٨س - ٧$ ، نستخدم مرة أخرى النتيجة (١) عند تطبيقها على جزء العبارة $س^{٢} + ٨س$ على النحو: $(٨ \div ٢ = ٤)$

$س^{٢} + ٨س - ٧ = (س + ٤)^{٢} - ٤^{٢} - ٧$

$س^{٢} + ٨س - ٧ = (س + ٤)^{٢} - ٢٣$

٣- لإكمال مُربّع العبارة الجبرية $٢س^{٢} - ٨س + ٥$ ، يجب أولًا أخذ العدد ٢ كعامل مشترك بين أول حدَّين، فيكون:

$٢س^{٢} - ٨س + ٥ = ٢(س^{٢} - ٤س) + ٥$

$(-٢ = ٢ ÷ -٤)$ $س^{٢} - ٤س = (س - ٢)^{٢} - ٢^{٢}$ ، مما يعطي:

$٢س^{٢} - ٨س + ٥ = ٢[(س - ٢)^{٢} - ٤] + ٥ = ٢(س - ٢)^{٢} - ٣$

مثال ١

أكمل مُربّع العبارة الجبرية $٥س^{٢} + ٢٠س + ٥٥$.

الحلّ

خُذ العدد ٥ كعامل مشترك: $٥س^{٢} + ٢٠س + ٥٥ = ٥(س^{٢} + ٤س) + ٥٥$

$(٢ = ٢ ÷ ٤)$ أكمل المربّع: $س^{٢} + ٤س = (س + ٢)^{٢} - ٢^{٢}$ ، مما يعطي:

بسّط، واكتب الناتج: $٥س^{٢} + ٢٠س + ٥٥ = ٥[(س + ٢)^{٢} - ٤] + ٥٥ = ٥(س + ٢)^{٢} + ٣٥$

مثال ٢

اكتب العبارة الجبرية ٣س^{٢} − ١٢س + ٣ في صورة ل(س − ك)^{٢} + ر ، حيث ل ، ك ، ر أعداد ثابتة.

الحلّ

الطريقة (١)

خذ ٣ كعامل مشترك من الحدَّين: ٣س^{٢} − ١٢س + ٣ = ٣(س^{٢} − ٤س) + ٣

(٣ ÷ ٢ = ١٫٥) أكمل المربّع لـ (س^{٢} − ٤س) : س^{٢} − ٤س = (س − ٢)^{٢} − ٢^{٢}

٣[(س − ٢)^{٢} − ٤] + ٣

٣(س − ٢)^{٢} − ١٢ + ٣

٣(س − ٢)^{٢} − ٩

∴ ل = ٣ ، ك = ٢ ، ر = −٩

الحلّ (تابع)

يمكننا أيضًا استخدام الطريقة البديلة الآتية لمقارنة المعاملات:

الطريقة (٢)

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

الحلّ (تابع) (تابع)

فكّ الأقواس وبسّط الناتج: ٢س^{٢} − ١٢س + ٣ = ل(س − ك)^{٢} + ر

٢س^{٢} − ١٢س + ٣ = لس^{٢} − ٢لكس + لك^{٢} + ر

قارن معاملات س^{٢} ومعاملات س والأعداد الثابتة:

٢ = ل ... (١) −١٢ = −٢ل ك ... (٢) ٣ = ل ك^{٢} + ر ... (٣)

عند تعويض ل = ٢ في المعادلة (٢) نجد أن قيمة ك = ٣

عند تعويض ل = ٢ ، ك = ٣ في المعادلة (٣) نجد أن قيمة ر = −١٥

اكتب الناتج: ٢س^{٢} − ١٢س + ٣ = ٢(س − ٣)^{٢} − ١٥

مثال ٣

اكتب العبارة الجبرية ٤س^{٢} + ٢٠س + ٥ في صورة (أس + ب)^{٢} + جـ ، حيث أ ، ب ، جـ أعداد ثابتة.

الحلّ

فكّ الأقواس وبسّط الناتج: ٤س^{٢} + ٢٠س + ٥ = (أس + ب)^{٢} + جـ

٤س^{٢} + ٢٠س + ٥ = أ^{٢}س^{٢} + ٢أبس + ب^{٢} + جـ

الحلّ (تابع)

قارن معاملات $س^2$ ومعاملات س والأعداد الثابتة:

$٤ = أ^2$ ... (١) $٢٠ = ٢أب$ ... (٢) $٥ = ب^2 + جـ$ ... (٣)

من المعادلة (١) نجد أن $أ = \pm ٢$

عند التعويض عن $أ = ٢$ في المعادلة (٢) نجد أن $ب = ٥$

عند التعويض عن $ب = ٥$ في المعادلة (٣) نجد أن $جـ = -٢٠$

$\therefore ٤س^٢ + ٢٠س + ٥ = (٢س + ٥)^٢ - ٢٠$

عند التعويض عن $أ = -٢$ في المعادلة (٢) نجد أن $ب = -٥$

عند التعويض عن $ب = -٥$ في المعادلة (٣) نجد أن $جـ = -٢٠$

$\therefore ٤س^٢ + ٢٠س + ٥ = (-٢س - ٥)^٢ - ٢٠$

$= (٢س + ٥)^٢ - ٢٠$

مساعدة: عندما تكون $أ^2$ عددًا موجبًا، فإن أ يكون لها قيمتان: إحداهما موجبة والأخرى سالبة.

تمارين ١-١ أ

١) اكتب كلّ عبارة من العبارات الجبرية الآتية في صورة $(س + أ)^2 + ب$:

أ $س^{٢}-٦س$	ب $س^{٢}+٨س$
ج $س^{٢}-٣س$	د $س^{٢}+١٥س$
هـ $س^{٢}+٤س+٨$	و $س^{٢}-٤س-٨$
ز $س^{٢}+٧س+١$	ح $س^{٢}-٣س+٤$

٢) اكتب كلّ عبارة من العبارات الجبرية الآتية في صورة أ(س + ب)² + جـ:

أ $٢س^{٢}-١٢س+١٩$	ب $٣س^{٢}-١٢س-١$
ج $٢س^{٢}+٥س-١$	د $٢س^{٢}+٧س+٥$

٣) اكتب كلّ عبارة من العبارات الجبرية الآتية في صورة أ − (س + ب)²:

أ $٤س-س^{٢}$	ب $٨س-س^{٢}$
ج $-٤-٣س-س^{٢}$	د $٩+٥س-س^{٢}$

٤) اكتب كلّ عبارة من العبارات الجبرية الآتية في صورة ل − ك(س + ن)²:

أ $-٧-٨س-٢س^{٢}$	ب $-٣-١٢س-٢س^{٢}$

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

ج ١٣+٤س−٢س^{٢}	د ٢+٥س−٣س^{٢}

٥) اكتب كلّ عبارة من العبارات الجبرية الآتية في صورة (أ س + ب)^{٢} + جـ:

أ ٩س^{٢}−٦س−٣	ب ٤س^{٢}+٢٠س+٣٠
ج ٢٥س^{٢}+٤٠س−٤	د ٩س^{٢}−٤٢س+٦١

١-١ ب استخدام الإكمال إلى مُربّع لحلّ المعادلات التربيعية

مثال ٤

استخدم الإكمال إلى مُربّع لحلّ المعادلة $\frac{٥}{س + ٢} + \frac{٣}{س - ٥} = ١$ ، حيث س ≠ −٢ ، س ≠ ٥ . اكتب الناتج في أبسط صورة.

الحلّ

اضرب طرفَي المعادلة في (س − ٥) وبسّط الكسر:

$$\frac{٥(س - ٥)}{س + ٢} + ٣ = ١ \times (س - ٥)$$

اضرب طرفَي المعادلة في (س + ٢) وبسّط الكسر:

$$٥(س - ٥) + ٣(س + ٢) = ١ \times (س - ٥)(س + ٢)$$

الحلّ (تابع)

فكّ وبسّط:

$$٥س - ٢٥ + ٣س + ٦ = س^{٢} - ٥س + ٢س - ١٠$$

$$س^{٢} - ١١س + ٩ = ٠$$

أكمل المُربّع: $(س - \frac{١١}{٢})^{٢} - \frac{١٢١}{٤} + ٩ = ٠$

بسّط: $(س - \frac{١١}{٢})^{٢} - \frac{٨٥}{٤} = ٠$

حلّ المعادلة: $(س - \frac{١١}{٢})^{٢} = \frac{٨٥}{٤}$

خذ الجذرين التربيعيين: $س - \frac{١١}{٢} = \pm \frac{\sqrt{٨٥}}{٢}$

بسّط: $س = \frac{١١ \pm \sqrt{٨٥}}{٢}$

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

تمارين ١-١ ب

١) حلَّ كلّ معادلة من المعادلات الآتية باستخدام الإكمال إلى مُربّع:

أ $س^{٢} + ٨س - ٩ = ٠$

ب $س^{٢} + ٤س - ١٢ = ٠$

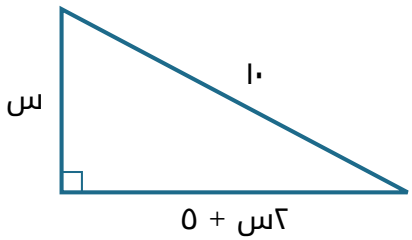
ج $س^{٢}-٢س-٣٥=٠$	د $س^{٢}-٩س+١٤=٠$
هـ $س^{٢}+٣س-١٨=٠$	و $س^{٢}+٩س-١٠=٠$

٢) حلَّ كلّ معادلة من المعادلات الآتية باستخدام الإكمال إلى مُربّع. اكتب الناتج في أبسط صورة:

أ $س^{٢}+٤س-٧=٠$	ب $س^{٢}-١٠س+٢=٠$
ج $س^{٢}+٨س-١=٠$	د $٢س^{٢}-٤س-٥=٠$
هـ $٢س^{٢}+٦س+٣=٠$	و $٢س^{٢}-٨س-٣=٠$

٣) حلَّ المعادلة $\frac{٥}{س+٢} + \frac{٣}{س-٤} = ٢$ ، واكتب الناتج في أبسط صورة.

٤) يبيّن الشكل المجاور مثلثًا قائم الزاوية أطوال أضلاعه (س) سم ، (٢س + ٥) سم ، ١٠ سم. أوجد قيمة س ، واكتب الناتج في أبسط صورة.



٥) أوجد الحلول الحقيقية للمعادلة $(٣س^{٢} + ٥س - ٧)^{٤} = ١$

ورقة الإجابات النموذجية ١-١ أ

ملاحظة: الإجابات من حسابي لأن كتاب الطالب لا يتضمن مفتاح إجابات.

١)

أ $س^{٢} - ٦س = (س - ٣)^{٢} - ٩$

ب $س^{٢} + ٨س = (س + ٤)^{٢} - ١٦$

ج $س^{٢} - ٣س = (س - \frac{٣}{٢})^{٢} - \frac{٩}{٤}$

د $س^{٢} + ١٥س = (س + \frac{١٥}{٢})^{٢} - \frac{٢٢٥}{٤}$

هـ $س^{٢} + ٤س + ٨ = (س + ٢)^{٢} + ٤$

و $س^{٢} - ٤س - ٨ = (س - ٢)^{٢} - ١٢$

ز $س^{٢} + ٧س + ١ = (س + \frac{٧}{٢})^{٢} - \frac{٤٥}{٤}$

ح $س^{٢} - ٣س + ٤ = (س - \frac{٣}{٢})^{٢} + \frac{٧}{٤}$

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

٢)

أ $٢س^{٢}-١٢س+١٩ = ٢(س - ٣)^{٢} + ١$

ب $٣س^{٢}-١٢س-١ = ٣(س - ٢)^{٢} - ١٣$

ج $٢س^{٢}+٥س-١ = ٢(س + \frac{٥}{٤})^{٢} - \frac{٣٣}{٨}$

د $٢س^{٢}+٧س+٥ = ٢(س + \frac{٧}{٤})^{٢} - \frac{٩}{٨}$

٣)

أ $٤س-س^{٢} = ٤ - (س - ٢)^{٢}$

ب $٨س-س^{٢} = ١٦ - (س - ٤)^{٢}$

ج $٤-٣س-س^{٢} = \frac{٢٥}{٤} - (س + \frac{٣}{٢})^{٢}$

د $٩+٥س-س^{٢} = \frac{٦١}{٤} - (س - \frac{٥}{٢})^{٢}$

٤)

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

أ) $٧-٨س-٢س^{٢} = ١٥ - ٢(س + ٢)^{٢}$

ب) $٣-١٢س-٢س^{٢} = ٢١ - ٢(س + ٣)^{٢}$

ج) $١٣+٤س-٢س^{٢} = ١٥ - ٢(س - ١)^{٢}$

د) $٢+٥س-٣س^{٢} = \frac{٤٩}{١٢} - ٣(س - \frac{٥}{٦})^{٢}$

٥)

أ) $٩س^{٢}-٦س-٣ = (٣س - ١)^{٢} - ٤$

ب) $٤س^{٢}+٢٠س+٣٠ = (٢س + ٥)^{٢} + ٥$

ج) $٢٥س^{٢}+٤٠س-٤ = (٥س + ٤)^{٢} - ٢٠$

د) $٩س^{٢}-٤٢س+٦١ = (٣س - ٧)^{٢} + ١٢$

ورقة الإجابات النموذجية ١-١ ب

ملاحظة: الإجابات من حسابي لأن كتاب الطالب لا يتضمن مفتاح إجابات.

١)

أ س = −٩ أو س = ١	ب س = −٦ أو س = ٢
ج س = −٥ أو س = ٧	د س = ٢ أو س = ٧
هـ س = −٦ أو س = ٣	و س = −١٠ أو س = ١

٢)

أ $س = -٢ \pm \sqrt{١١}$	ب $س = ٥ \pm \sqrt{٢٣}$
ج $س = -٤ \pm \sqrt{١٧}$	د $س = \frac{٢ \pm \sqrt{١٤}}{٢}$
هـ $س = \frac{-٣ \pm \sqrt{٣}}{٢}$	و $س = \frac{٤ \pm \sqrt{٢٢}}{٢}$

٣) ٥(س − ٤) + ٣(س + ٢) = ٢(س + ٢)(س − ٤)

$س^{٢}$ − ٦س − ١ = ٠

$(س - ٣)^{٢}$ = ١٠

$س = ٣ \pm \sqrt{١٠}$ (س ≠ −٢ ، ٤)

٤) $س^{٢} + (٢س + ٥)^{٢} = ١٠^{٢}$

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

٥س^{٢} + ٢٠س − ٧٥ = ٠

س^{٢} + ٤س − ١٥ = ٠

(س + ٢)^{٢} = ١٩

س = −٢ + $\sqrt{١٩}$ (تُرفض القيمة السالبة لأنها طول) ، أي س ≈ ٢٫٣٦ سم

٥) ٣س^{٢} + ٥س − ٧ = ١ أو ٣س^{٢} + ٥س − ٧ = −١

٣س^{٢} + ٥س − ٨ = ٠

(٣س + ٨)(س − ١) = ٠

س = ١ أو س = $-\frac{٨}{٣}$

٣س^{٢} + ٥س − ٦ = ٠

س = $\frac{-٥ \pm \sqrt{٩٧}}{٦}$

١-٢ التمثيل البياني للدالّة التربيعية

الصورة العامّة للدالّة التربيعية هي د(س) = أس² + ب س + جـ ، حيث أ ، ب ، جـ أعداد ثابتة ، أ ≠ ٠

شكل منحنى الدالّة د(س) = أس² + ب س + جـ مهمًا ويحتوي دائمًا على محور تماثل رأسي. يعتمد وضع المنحنى التربيعي على قيمة أ (معامل س²).

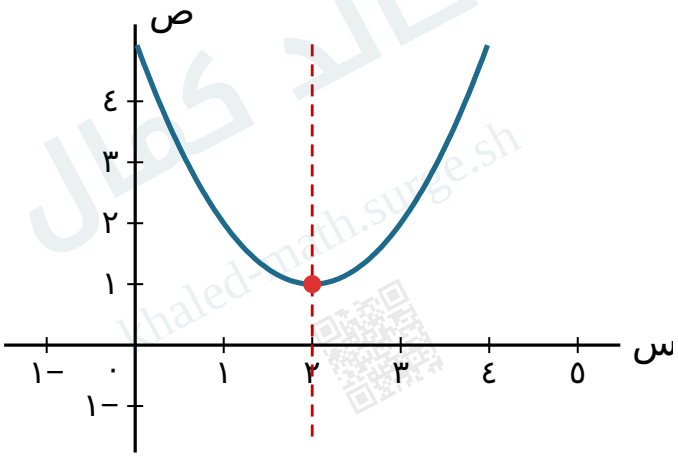
خالد كمال
khaled-math.surge.sh

إذا كان أ > ٠ يكون لمنحنى الدالّة **قيمة صغرى** minimum point ، وتكون أسفل نقطة في المنحنى.

إذا كان أ < ٠ يكون لمنحنى الدالّة **قيمة عظمى** maximum point ، وتكون أعلى نقطة في المنحنى.

تسمى **نقطة التحوّل** أو **نقطة الثبات** بنقطة **رأس المنحنى**.

مساعدة: في الدالّة التربيعية، النقطة التي يكون الميل عندها صفرًا تُسمّى نقطة الثبات stationary point أو نقطة التحوّل turning point.



لكلّ منحنى تربيعي محور تماثل يمرّ بنقطة رأس المنحنى.

سنطوّر في هذا الدرس مهارة مهمّة وهي مهارة «رسم المنحنى». لرسم المنحنى يجب أن تُعرض ميزات الدالّة وسلوكها.

عند رسم منحنى الدالّة التربيعية، يجب الوقوف عند الميزات الآتية:

- الشكل العام للمنحنى.
- الجزء المقطوع من كلّ محور من المحورَين.

• إحداثيات نقطة رأس المنحنى.

قد يُطلب إليك في بعض الأسئلة رسم المنحنى التربيعي، وتسمية بعض خواصه على الرسم.

مثال ٥

إذا كانت الدالّة د(س) = س^{٢} − ٣س − ٤ :

أ) أوجد نقاط تقاطع منحنى الدالّة د(س) مع المحورَين السيني والصادي.

ب) ارسم منحنى الدالّة د(س) ، وأوجد إحداثيات الرأس.

الحلّ

أ) ص = س^{٢} − ٣س − ٤

لإيجاد نقاط التقاطع مع المحورَين:

عندما س = ٠ ، فإنّ ص = −٤ (لتجد نقطة التقاطع مع المحور الصادي ، اجعل س = ٠)

عندما ص = ٠ ، فإنّ س^{٢} − ٣س − ٤ = ٠ (لتجد نقطتَي التقاطع مع المحور السيني ، اجعل ص = ٠)

(س − ٤)(س + ١) = ٠

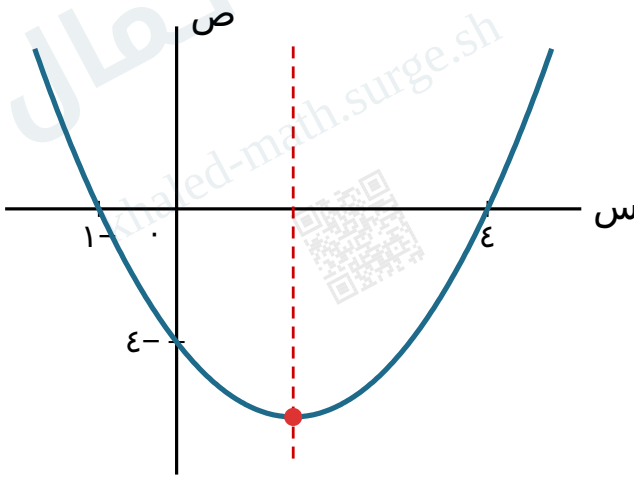
الحلّ (تابع)

س = ٤ أو س = −١

نقاط التقاطع مع المحورَين هي: (٠ ، −٤) ، (−١ ، ٠) ، (٤ ، ٠)

الحلّ (تابع)

ب) يمرّ محور التماثل في نقطة منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بين نقطتَي المقطع السيني: س = $\frac{٣}{٢}$



وعليه، تكون معادلة محور التماثل هي: س = $\frac{٣}{٢}$

عندما س = $\frac{٣}{٢}$ فإنّ ص = $(\frac{٣}{٢})^{٢} - ٣(\frac{٣}{٢}) - ٤ = -\frac{٢٥}{٤}$

وحيث إنّ أ > ٠ ، فإنّ شكل المنحنى مفتوح إلى الأعلى (شكل الحرف اللاتيني U)

الحلّ (تابع) (تابع)

النقطة الصغرى هي: $(\frac{٣}{٢} ، -\frac{٢٥}{٤})$

يمكنك أيضًا استخدام طريقة الإكمال إلى مربع لتساعدك على رسم منحنى الدالّة التربيعية.

يعطي الإكمال إلى مُربّع للعبارة الجبريّة $س^{٢} - ٣س - ٤$:

$$س^{٢} - ٣س - ٤ = (س - \frac{٣}{٢})^{٢} - (\frac{٣}{٢})^{٢} - ٤$$

$$= (س - \frac{٣}{٢})^{٢} - \frac{٢٥}{٤}$$

الجزء من العبارة الجبريّة $(س - \frac{٣}{٢})^{٢}$ مُربّع كامل، لذا فإنّ أقلّ قيمة يأخذها هي الصفر وتحصل عندما س = $\frac{٣}{٢}$

القيمة الصغرى للعبارة الجبريّة $(س - \frac{٣}{٢})^{٢} - \frac{٢٥}{٤}$ هي $-\frac{٢٥}{٤}$ وتحصل عندما س = $\frac{٣}{٢}$

وعليه، يكون للدالّة د(س) = $س^{٢} - ٣س - ٤$ قيمة صغرى عند النقطة $(\frac{٣}{٢} ، -\frac{٢٥}{٤})$

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

معادلة محور التماثل هي س = $\frac{٣}{٢}$

نتيجة ٢

إذا كُتبت الدالّة د(س) = أس^{٢} + ب س + جـ في صورة أ(س − ل)^{٢} + ك ، فإن:

- معادلة محور التماثل هي: س = ل = $-\frac{ب}{٢أ}$
- إذا كانت أ < ٠ ، فإننا نجد قيمة صغرى عند النقطة (ل ، ك).
- إذا كانت أ > ٠ ، فإننا نجد قيمة عظمى عند النقطة (ل ، ك).

مثال ٦

ارسم منحنى الدالّة ص = ١٦س − ٧ − ٤س^{٢}

الحلّ

بالإكمال إلى مُربّع ينتج أن:

١٦س − ٧ − ٤س^{٢} = ٩ − ٤(س − ٢)^{٢}

(س − ٢)^{٢} مُربّع كامل فيكون (س − ٢)^{٢} ≥ ٠ (تكون أصغر قيمة للمربع الكامل صفرًا ، عندما س = ٢)

القيمة العظمى لـ ٩ − ٤(س − ٢)^{٢} هي ٩ وتحصل عندما س = ٢

وعليه فإنّ للدالّة ص = ١٦س − ٧ − ٤س^{٢} قيمة عظمى عند النقطة (٢ ، ٩).

معادلة محور التماثل س = ٢

عندما س = ٠ ، فإنّ: ص = −٧

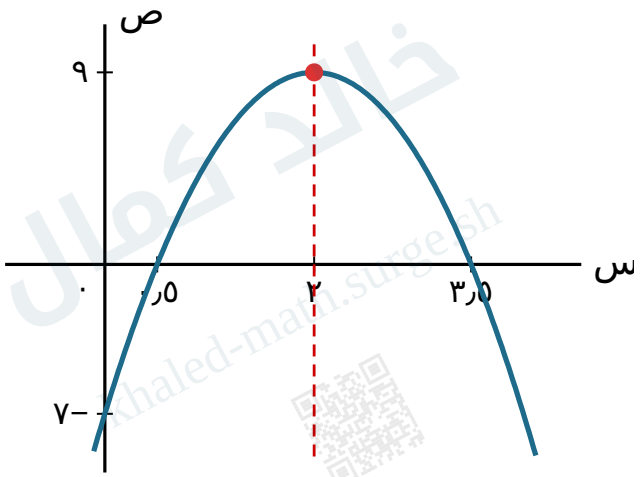
الحلّ (تابع)

وعندما ص = ٠ ، فإنّ: ٩ − ٤(س − ٢)^{٢} = ٠

$$(س - ٢)^{٢} = \frac{٩}{٤}$$

$$س - ٢ = \pm \frac{٣}{٢}$$

$$س = \frac{١}{٢} \text{ أو } س = ٣ \frac{١}{٢}$$



خالد كمال
khaled-math.stage.sh

تمارين ١-٢

١) استخدم تماثل كلّ دالّة من الدوال التربيعية الآتية لتجد القيمة العظمى أو القيمة الصغرى. ارسم منحنى كلّ دالّة مبيّنًا جميع نقاط التقاطع مع المحورَين:

أ ص = س^{٢} − ٦س + ٨

ب ص = س^{٢} + ٥س − ١٤

ج ص = ٢س^{٢} + ٧س − ١٥

د ص = ١٢ + س − س^{٢}

٢) أ) اكتب ٢س^{٢} − ٨س + ٥ في صورة أ(س + ب)^{٢} + جـ ، حيث أ ، ب ، جـ أعداد صحيحة.
ب) اكتب معادلة محور التماثل لمنحنى الدالّة ص = ٢س^{٢} − ٨س + ٥

٣) أ) اكتب ٧ + ٥س − س^{٢} في صورة أ − (س + ب)^{٢} ، حيث أ ، ب عددان ثابتان.
ب) أوجد إحداثيات نقطة رأس منحنى الدالّة ص = ٧ + ٥س − س^{٢} ، وحدد ما إذا كانت قيمة عظمى أو قيمة صغرى.

٤) أ) اكتب ٢س^{٢} + ٩س + ٤ في صورة أ(س + ب)^{٢} + جـ ، حيث أ ، ب ، جـ أعداد ثابتة.
ب) أوجد إحداثيات نقطة رأس منحنى الدالّة ص = ٢س^{٢} + ٩س + ٤ ، وحدّد ما إذا كانت قيمة عظمى أو قيمة صغرى.

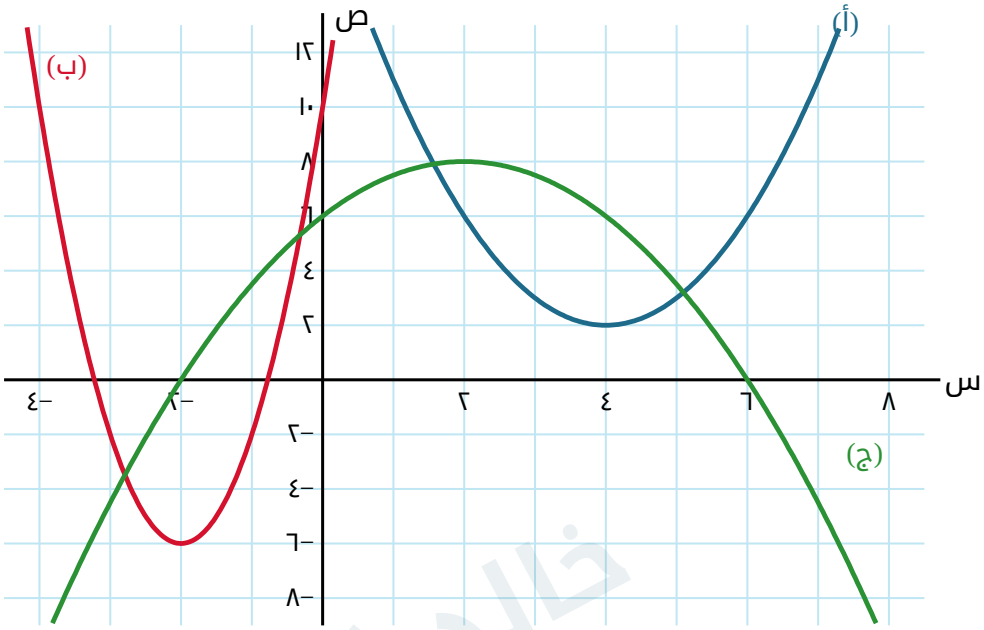
٥) أوجد القيمة الصغرى للعبارة الجبرية س^{٢} − ٧س + ٨ ، وقيمة س المناظرة لها.

٦) أ) اكتب العبارة الجبريّة ١ + س − ٢س^{٢} في صورة ل − ٢(س − ك)^{٢}.
ب) ارسم منحنى الدالّة ص = ١ + س − ٢س^{٢}

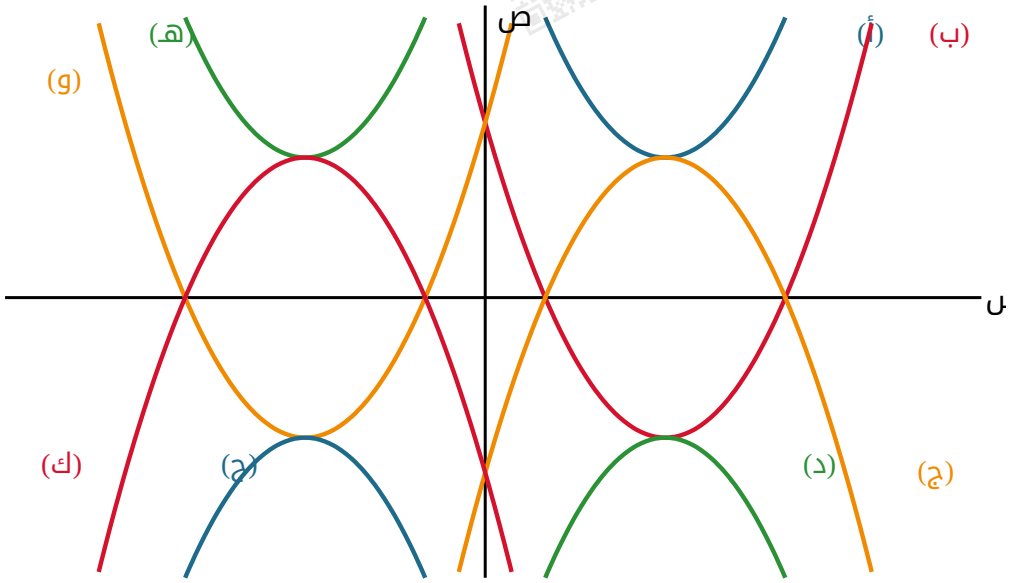
٧) بيّن أنّ منحنى الدالّة ص = ٤س^{٢} + ٢س + ٥ لا يقطع محور السينات.

خالد كمال
khaled-math.sa.e.sh

٨) ★ اكتب معادلة كلّ دالّة من الدوال التي منحنياتها (أ) ، (ب) ، (ج).



٩) ★ يبيّن الشكل أدناه ثمانية منحنيات لدوالّ تربيعية. معادلتا منحنيَين من المنحنيات الثمانية هما: ص = س^{٢} − ٦س + ١٣ ، ص = −س^{٢} − ٦س − ٥ . حدّد اسمَي هذَين المنحنيَين التربيعيَّين، وأوجِد معادلة كلّ منحنى من المنحنيات التربيعية الأخرى.



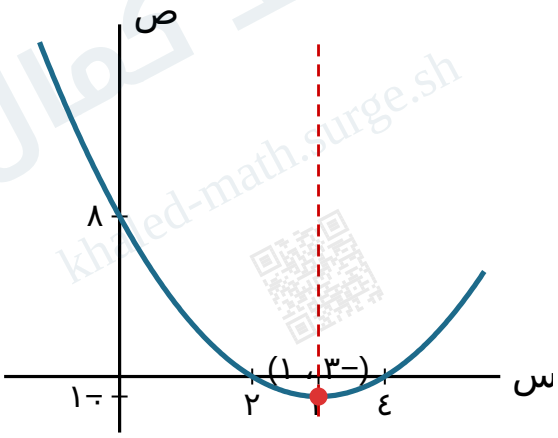
١٠) ★ إذا علمت أن إحداثيات رأس منحنى دالّة تربيعية (ك ، ل) ، فبيّن أن معادلة المنحنى هي: ص = أس^{٢} − ٢أ ك س + أ ك^{٢} + ل حيث أ ≠ ٠ ، واشرح السبب.

ورقة الإجابات النموذجية ١-٢

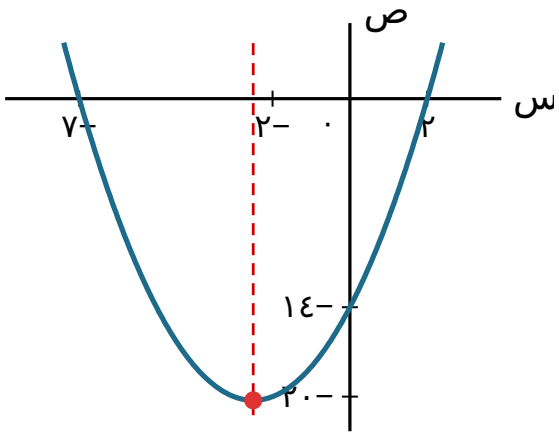
ملاحظة: الإجابات من حسابي لأن كتاب الطالب لا يتضمن مفتاح إجابات.

١)

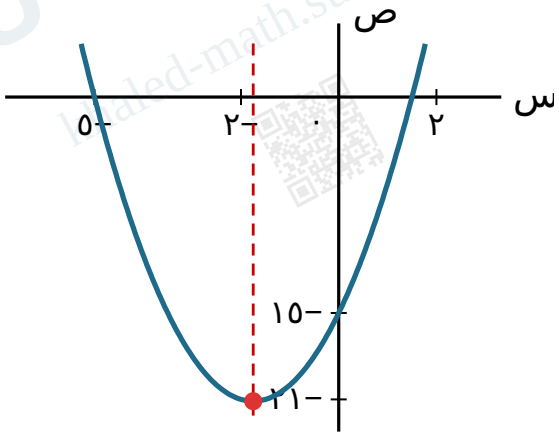
أ) ص = س^{٢}−٦س+٨ : (س − ٣)^{٢} − ١ ، قيمة صغرى عند الرأس (٣ ، −١) ، محور التماثل س = ٣ ، المقطع الصادي ٨ ، المقطع السيني: ٢ أو ٤



ب) ص = س^{٢}+٥س−١٤ : (س + $\frac{٥}{٢}$)^{٢} − $\frac{٨١}{٤}$ ، قيمة صغرى عند الرأس (−$\frac{٥}{٢}$ ، −$\frac{٨١}{٤}$) ، محور التماثل س = −$\frac{٥}{٢}$ ، المقطع الصادي −١٤ ، المقطع السيني: −٧ أو ٢

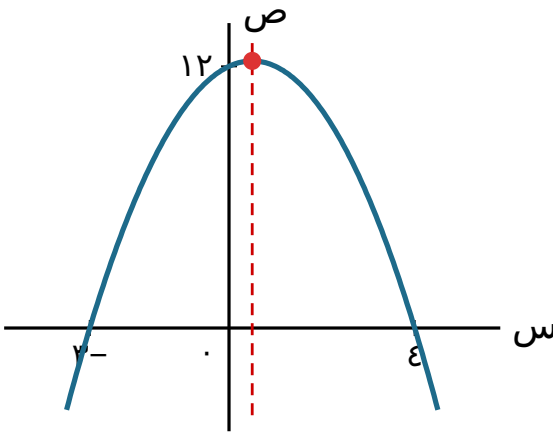


ج) ص = ٢س^{٢}+٧س−١٥ : ٢(س + $\frac{٧}{٤}$)^{٢} − $\frac{١٦٩}{٨}$ ، قيمة صغرى عند الرأس (− $\frac{٧}{٤}$ ، − $\frac{١٦٩}{٨}$) ، محور التماثل س = − $\frac{٧}{٤}$ ، المقطع الصادي −١٥ ، المقطع السيني: −٥ أو $\frac{٣}{٢}$



د) ص = ١٢+س−س^{٢} : −(س − $\frac{١}{٢}$)^{٢} + $\frac{٤٩}{٤}$ ، قيمة عظمى عند الرأس ($\frac{١}{٢}$ ، $\frac{٤٩}{٤}$) ، محور التماثل س = $\frac{١}{٢}$ ، المقطع الصادي ١٢ ، المقطع السيني: −٣ أو ٤

خالد كمال
khaled-math.surge.sh



٢) أ) $٢س^{٢} - ٨س + ٥ = ٢(س - ٢)^{٢} - ٣$ ب) س = ٢

٣) أ) $٧ + ٥س - س^{٢} = \frac{٥٣}{٤} - (س - \frac{٥}{٢})^{٢}$

ب) الرأس $(\frac{٥}{٢} ، \frac{٥٣}{٤})$ ، وهي قيمة عظمى لأن أ = −١ < ٠

٤) أ) $٢س^{٢} + ٩س + ٤ = ٢(س + \frac{٩}{٤})^{٢} - \frac{٤٩}{٨}$

ب) الرأس $(-\frac{٩}{٤} ، -\frac{٤٩}{٨})$ ، وهي قيمة صغرى لأن أ = ٢ > ٠

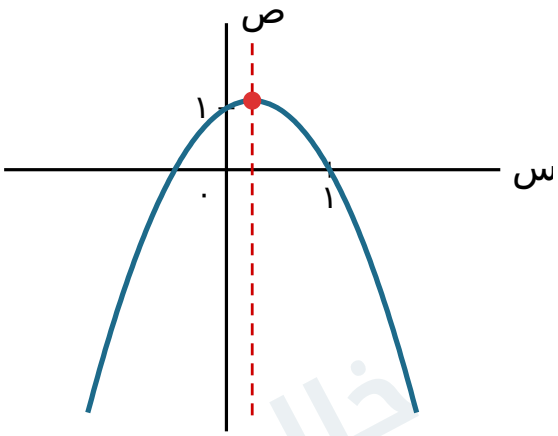
٥) $س^{٢} - ٧س + ٨ = (س - \frac{٧}{٢})^{٢} - \frac{١٧}{٤}$

القيمة الصغرى = $-\frac{١٧}{٤}$ عندما س = $\frac{٧}{٢}$

٦) أ) $١ + س - ٢س^{٢} = \frac{٩}{٨} - ٢(س - \frac{١}{٤})^{٢}$ ، أي ل = $\frac{٩}{٨}$ ، ك = $\frac{١}{٤}$

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

ب) قيمة عظمى عند الرأس ($\frac{١}{٤}$ ، $\frac{٩}{٨}$) ، المقطع الصادي ١ ، المقطعان السينيان: س = $-\frac{١}{٢}$ أو س = ١



٧) ٤س^{٢} + ٢س + ٥ : المميّز ب^{٢} − ٤أجـ = ٤ − ٨٠ = −٧٦ < ٠ ، أو بالإكمال إلى مُربّع:

٤(س + $\frac{١}{٤}$)^{٢} + $\frac{١٩}{٤}$ > ٠ لكل قيمة س ، فلا يقطع المنحنى محور السينات.

٨) (أ): الرأس (٤ ، ٢) ، فتكون ص = أ(س − ٤)^{٢} + ٢ ، ومن المنحنى (٢ ، ٦) نجد أ = ١ ، أي ص = س^{٢} − ٨س + ١٨

(ب): ص = ٤س^{٢} + ١٦س + ١٠ = ٤(س + ٢)^{٢} − ٦ (الرأس (−٢ ، −٦) ويمرّ بالنقطة (٠ ، ١٠))

(ج): الرأس (٢ ، ٨) والمقطعان السينيان −٢ و ٦ ، أي ص = $-\frac{١}{٢}$(س − ٢)^{٢} + ٨ = $-\frac{١}{٢}$ س^{٢} + ٢س + ٦

٩) المنحنى ص = س^{٢} − ٦س + ١٣ = (س − ٣)^{٢} + ٤ هو (أ) ، ورأسه (٣ ، ٤) ، والمنحنى ص = −س^{٢} − ٦س − ٥ = ٤ − (س + ٣)^{٢} هو (ك) ، ورأسه (−٣ ، ٤).

(من الشكل: رؤوس المنحنيات الثمانية هي (±٣ ، ±٤) لكلّ منها منحنى مفتوح إلى الأعلى وآخر إلى الأسفل.)

(ب): ص = س^{٢} − ٦س + ٥ = (س − ٣)^{٢} − ٤

(ج): ص = −س^{٢} + ٦س − ٥ = ٤ − (س − ٣)^{٢}

(د): ص = −س^{٢} + ٦س − ١٣ = −٤ − (س − ٣)^{٢}

(هـ): ص = س^{٢} + ٦س + ١٣ = (س + ٣)^{٢} + ٤

(و): ص = س^{٢} + ٦س + ٥ = (س + ٣)^{٢} − ٤

(ح): ص = −س^{٢} − ٦س − ١٣ = −٤ − (س + ٣)^{٢}

١٠) الرأس (ك ، ل) فمحور التماثل س = ك ، وتكون المعادلة على الصورة ص = أ(س − ك)^{٢} + ل (لأنّ الحدّ (س − ك)^{٢} أصغر ما يمكن ، وهو صفر ، عند الرأس). بفكّ الأقواس: ص = أس^{٢} − ٢أ ك س + أ ك^{٢} + ل.

١-٣ جذور المعادلة التربيعية

إذا كانت د(س) دالّة، نسمّي حلول المعادلة د(س) = ٠ **جذور الدالّة د(س)** roots.

إليك حلّ ثلاث معادلات تربيعية في صورة أس^{٢} + ب س + جـ = ٠ باستخدام الصيغة س = $\frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ}$

الحالات الثلاث

١) $س^{٢} + ٢س - ٨ = ٠$

$$س = \frac{-٢ \pm \sqrt{٢^{٢} - ٤ \times ١ \times (-٨)}}{٢ \times ١} = \frac{-٢ \pm \sqrt{٣٦}}{٢}$$

$س = ٢$ أو $س = -٤$

$\therefore \sqrt{٣٦} > ٠$ لذا يوجد جذران حقيقيان مختلفان.

٢) $س^{٢} + ٦س + ٩ = ٠$

$$س = \frac{-٦ \pm \sqrt{٦^{٢} - ٤ \times ١ \times ٩}}{٢ \times ١} = \frac{-٦ \pm \sqrt{٠}}{٢}$$

$س = -٣$ أو $س = -٣$

يوجد جذر حقيقي واحد، لكننا غالبًا نقول إنه يوجد جذران حقيقيان متساويان.

٣) $س^{٢} + ٢س + ٦ = ٠$

$$س = \frac{-٢ \pm \sqrt{٢^{٢} - ٤ \times ١ \times ٦}}{٢ \times ١} = \frac{-٢ \pm \sqrt{-٢٠}}{٢}$$

لا يوجد جذر حقيقي ، لأنّ $\sqrt{-٢٠}$ ليس عددًا حقيقيًا، لذا لا توجد جذور حقيقية.

يسمّى الجزء الموجود تحت الجذر التربيعي في الصيغة التربيعية **المميِّز** discriminant.

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

نتيجة ٣

ب^{٢} − ٤أجـ هو مميّز المعادلة أس^{٢} + ب س + جـ = ٠

تخبرنا إشارة المميّز (موجبة كانت أو صفرًا أو سالبة) عن عدد الجذور الحقيقية للمعادلة التربيعية.

ب^{٢} − ٤أجـ	نوع الجذور
٠ <	جذران حقيقيان مختلفان.
٠ =	جذران حقيقيان متساويان (جذر حقيقي واحد مكرّر).
٠ >	لا توجد جذور حقيقية.

مثال ٧

إذا كانت س^{٢} + ٥س − ٧ = ٠ ، فأوجد:

أ) مميّز المعادلة.

ب) عدد جذور المعادلة.

الحلّ

أ) المميّز = ب^{٢} − ٤أجـ (عوّض عن أ = ١ ، ب = ٥ ، جـ = −٧)

= ٥^{٢} − ٤ × ١ × (−٧)

الحلّ (تابع)

= ٥٣

ب) ∵ المميّز ٥٣ > ٠ ∴ يوجد جذران حقيقيان مختلفان للمعادلة.

مثال ٨

أوجد قيم ك إذا كان للمعادلة ٤س^{٢} + كس + ١ = ٠ جذران متساويان.

الحلّ

∵ الجذرين متساويان ∴ ب^{٢} − ٤أجـ = ٠ (عوّض عن قيم أ ، ب ، جـ)

ك^{٢} − ٤ × ٤ × ١ = ٠

ك^{٢} = ١٦ (حلّ المعادلة)

ك = −٤ أو ك = ٤

تمارين ١-٣

١) أوجد مميّز كلّ معادلة من المعادلات الآتية، محدّدًا ما إذا كان للمعادلة جذران حقيقيان مختلفان، أو جذران حقيقيان متساويان، أو لا جذور حقيقية لها:

أ $س^{٢}-١٢اس+٣٦=٠$	ب $س^{٢}+٥س-٣٦=٠$
ج $س^{٢}+٩س+٢=٠$	د $٤س^{٢}-٤س+١=٠$
هـ $٢س^{٢}-٧س+٨=٠$	و $٣س^{٢}+١٠اس-٢=٠$

٢) استخدم المميّز لتحدّد عدد جذور المعادلة: ٢ − ٥س = $\frac{٤}{س}$

٣) أوجد قيمَ ك إذا كان للمعادلة $س^{٢}$ − ٥س + ٩ = ك(٥ − س) جذران متساويان.

٤) ★ أوجِد قيمة ك في كلّ معادلة من المعادلات الآتية علمًا بأنّ لكلّ منها جذرَين حقيقيَّين متساويَين:

أ $س^{٢}+كس+٤=٠$	ب $٤س^{٢}+٤(ك-٢)س+ك=٠$
ج $(ك+٢)س^{٢}+٤ك=(٤ك+٢)س$	د $س^{٢}-٢س+١=٢ك(ك-٢)$
هـ $(ك+١)س^{٢}+كس-٢ك=٠$	و $٤س^{٢}-(ك-٢)س+٩=٠$

٥) للمعادلة ك $س^{٢}$ + ل س + ٥ = ٠ جذر حقيقي مكرّر. أوجِد قيمة ك بدلالة ل.

ورقة الإجابات النموذجية ١-٣

ملاحظة: الإجابات من حسابي لأن كتاب الطالب لا يتضمن مفتاح إجابات.

١)

أ $س^{٢}-١٢س+٣٦ = ٠$: المميّز = ٠ ← جذران حقيقيان متساويان

ب $س^{٢}+٥س-٣٦ = ٠$: المميّز = ١٦٩ ← جذران حقيقيان مختلفان

ج $س^{٢}+٩س+٢ = ٠$: المميّز = ٧٣ ← جذران حقيقيان مختلفان

د $٤س^{٢}-٤س+١ = ٠$: المميّز = ٠ ← جذران حقيقيان متساويان

هـ $٢س^{٢}-٧س+٨ = ٠$: المميّز = −١٥ ← لا جذور حقيقية

و $٣س^{٢}+١٠س-٢ = ٠$: المميّز = ١٢٤ ← جذران حقيقيان مختلفان

٢) $٢س - ٥س^{٢} = ٤$ ← $٥س^{٢} - ٢س + ٤ = ٠$

المميّز = $٤ - ٨٠ = -٧٦ < ٠$ ← لا توجد جذور حقيقية.

٣) $س^{٢} + (ك - ٥)س + ٩ - ٥ك = ٠$

المميّز = $(ك - ٥)^{٢} - ٤(٩ - ٥ك) = ك^{٢} + ١٠ك - ١١ = ٠$

(ك + ١١)(ك − ١) = ٠ ← ك = ١ أو ك = −١١

٤)

أ س^{٢}+كس+٤=٠ ← المميّز = ٠ ← ك = ٤ أو ك = −٤

ب ٤س^{٢}+٤(ك−٢)س+ك=٠ ← المميّز = ٠ ← ك = ١ أو ك = ٤

ج (ك+٢)س^{٢}+٤ك=(٤ك+٢)س ← المميّز = ٠ ← ك = $\frac{١}{٤}$

د س^{٢}−٢س+١=٢ك(ك−٢) ← المميّز = ٠ ← ك = ٠ أو ك = ٢

هـ (ك+١)س^{٢}+كس−٢ك=٠ ← المميّز = ٠ ← ك = ٠ أو ك = $-\frac{٨}{٩}$

و ٤س^{٢}−(ك−٢)س+٩=٠ ← المميّز = ٠ ← ك = −١٠ أو ك = ١٤

٥) ل^{٢} − ٤ × ك × ٥ = ٠ ← ك = $\frac{ل^{2}}{٢٠}$

١-٤ الصيغة التربيعية

يُمكن حلّ المعادلة التربيعية باستخدام **الصيغة التربيعية** Quadratic formula. إذا كانت أ س^{٢} + ب س + جـ = ٠ حيث أ ، ب ، جـ أعداد ثابتة ، أ ≠ ٠ ، فإنّ:

نتيجة ٤

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{2} - ٤أجـ}}{٢أ}$$

يُمكن إثبات هذه الصيغة التربيعية باستخدام الإكمال إلى مُربّع للمعادلة أس^{2} + ب س + جـ = ٠ :

أ س^{٢} + ب س + جـ = ٠

اقسم طرفَي المعادلة على أ: س^{٢} + $\frac{ب\ س}{أ}$ + $\frac{جـ}{أ}$ = ٠

أكمل المُربّع: (س + $\frac{ب}{٢أ}$)^{٢} − ($\frac{ب}{٢أ}$)^{٢} + $\frac{جـ}{أ}$ = ٠

أعد ترتيب المعادلة: (س + $\frac{ب}{٢أ}$)^{٢} = $\frac{ب^{2}}{٤أ^{2}}$ − $\frac{جـ}{أ}$

وحّد المقامات في الطرف الأيسر: (س + $\frac{ب}{٢أ}$)^{٢} = $\frac{ب^{2} - ٤أجـ}{٤أ^{2}}$

أوجد الجذر التربيعي لطرفَي المعادلة: س + $\frac{ب}{٢أ}$ = ± $\frac{\sqrt{ب^{2} - ٤أجـ}}{٢أ}$

اطرح $\frac{ب}{٢أ}$ من كلا الطرفين: س = − $\frac{ب}{٢أ}$ ± $\frac{\sqrt{ب^{2} - ٤أجـ}}{٢أ}$

جمّع حدود الطرف الأيسر: س = $\frac{-ب \pm \sqrt{ب^{2} - ٤أجـ}}{٢أ}$

خالد كمال
khaled-math-surge.sn

مساعدة: تذكّر أهمية الجزء المتعلق بالرمز ± قبل √ في الصيغة.

يجب أن تكون قادرًا على حلّ المعادلات باستخدام الصيغة التربيعية مباشرة من دون برهنتها.

مثال ٩

حلَّ المعادلة ٦س^{٢} − ٣س − ٢ = ٠ باستخدام الصيغة التربيعية مقرّبًا الناتج إلى أقرب عدد مكوّن من ٣ أرقام معنوية.

الحلّ

عوّض في الصيغة التربيعية عن أ = ٦ ، ب = −٣ ، جـ = −٢

$$س = \frac{-(-٣) \pm \sqrt{(-٣)^{٢} - ٤ \times ٦ \times (-٢)}}{٢ \times ٦}$$

بسّط:

$$س = \frac{٣ + \sqrt{٥٧}}{١٢} \quad أو \quad س = \frac{٣ - \sqrt{٥٧}}{١٢}$$

قرّب إلى أقرب عدد مكوّن من ٣ أرقام معنوية:

س = ٠,٨٧٩ أو س = −٠,٣٧٩

تمارين ١-٤

١) حلَّ كلّ معادلة من المعادلات الآتية باستخدام الصيغة التربيعية، مقرّبًا الناتج إلى أقرب منزلتين عشريتَين:

أ $س^{٢}-١٠س-٣=٠$	**ب** $س^{٢}+٦س+٤=٠$
ج $س^{٢}+٣س-٥=٠$	**د** $٢س^{٢}+٥س-٦=٠$
هـ $٤س^{٢}+٧س+٢=٠$	**و** $٥س^{٢}+٧س-٢=٠$

٢) مستطيل أطوال أضلاعه (س) سم ، (٣س − ٢) سم ، ومساحته ٦٣ سم². أوجد قيمة س مقرّبًا الناتج إلى أقرب عدد مكوّن من ٣ أرقام معنوية.

٣) المستطيل (أ) طوله (س) سم وعرضه (٢س − ٤) سم ، والمستطيل (ب) طوله (س + ١) سم وعرضه (٥ − س) سم. إذا علمت أن مساحة المستطيل (أ) تساوي مساحة المستطيل (ب). فأوجد قيمة س مقرّبًا الناتج إلى أقرب عدد مكوّن من ٣ أرقام معنوية.

٤) ★ حلَّ المعادلة $\frac{٥}{س - ٣} + \frac{٢}{س + ١} = ١$ مقرّبًا الناتج إلى أقرب عدد مكوّن من ٣ أرقام معنوية.

٥) ★ حلَّ المعادلة التربيعية أ $س^{٢}$ − ب س + جـ = ٠ واكتب النواتج بدلالة أ ، ب ، جـ. ما العلاقة بين حلول هذه المعادلة وحلول المعادلة أ $س^{٢}$ + ب س + جـ = ٠ ؟

ورقة الإجابات النموذجية ١-٤

ملاحظة: الإجابات من حسابي لأن كتاب الطالب لا يتضمن مفتاح إجابات.

١)

أ $س^{٢} - ١٠س - ٣ = ٠$ ← $س = -٠,٢٩$ أو $س = ١٠,٢٩$

ب $س^{٢} + ٦س + ٤ = ٠$ ← $س = -٥,٢٤$ أو $س = -٠,٧٦$

ج $س^{٢} + ٣س - ٥ = ٠$ ← $س = -٤,١٩$ أو $س = ١,١٩$

د $٢س^{٢} + ٥س - ٦ = ٠$ ← $س = -٣,٣٩$ أو $س = ٠,٨٩$

هـ $٤س^{٢} + ٧س + ٢ = ٠$ ← $س = -١,٣٩$ أو $س = -٠,٣٦$

و $٥س^{٢} + ٧س - ٢ = ٠$ ← $س = -١,٦٤$ أو $س = ٠,٢٤$

٢) $س(٣س - ٢) = ٦٣$ ← $٣س^{٢} - ٢س - ٦٣ = ٠$

$$س = \frac{٢ \pm \sqrt{٧٦٠}}{٦}$$ ← $س \approx ٤,٩٣$ (تُرفض القيمة السالبة لأنها طول)

٣) $س(٢س - ٤) = (س + ١)(٥ - س)$ ← $٣س^{٢} - ٨س - ٥ = ٠$

خالد كمال
khaled-math-surge.sh

س = $\frac{٨ \pm \sqrt{١٢٤}}{٦}$ ← س ≈ ٣,١٩ (تُرفض القيمة السالبة لأنّ الطول والعرض موجبان)

٤) ٥(س + ١) + ٢(س − ٣) = (س − ٣)(س + ١) ← $س^{٢}$ − ٩س − ٢ = ٠

س = $\frac{٩ \pm \sqrt{٨٩}}{٢}$ ← س ≈ ٩,٢٢ أو س ≈ −٠,٢١٧

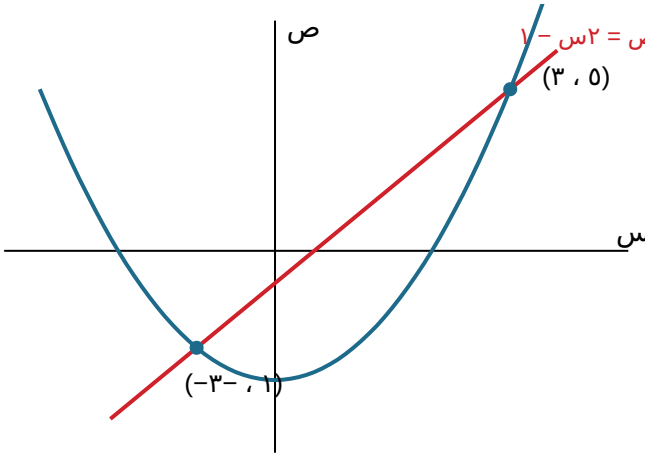
٥) س = $\frac{ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ}$

حلول المعادلة أ $س^{٢}$ + ب س + جـ = ٠ هي س = $\frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ}$.

أي إنّ حلولها هي النظائر الجمعية (المعكوسات الجمعية) لحلول المعادلة أ $س^{٢}$ − ب س + جـ = ٠.

١-٥ حلّ المعادلات الآنيّة (معادلة خطّية ومعادلة تربيعية)

سوف نتعلّم في هذا الدرس كيف نحلّ معادلتَين آنيتَين إحداهما خطّية والأخرى تربيعية.



يُبيّن الشكل أعلاه منحنى الدالّة ص = س^{٢} − ٤ ، والمستقيم ص = ٢س − ١

إحداثيات نقطتَي التقاطُع هما (−١ ، −٣) ، (٣ ، ٥)

هذا يعني أن س = −١ ، ص = −٣ و س = ٣ ، ص = ٥ حلول للمعادلتَين الآنيتَين

ص = س^{٢} − ٤ ، ص = ٢س − ١

يُمكن أيضًا إيجاد الحلول جبريًّا:

ص = س^{٢} − ٤ ..... (١)

ص = ٢س − ١ ..... (٢)

عوّض عن ص من المعادلة (٢) في المعادلة (١):

٢س − ١ = س^{٢} − ٤ (أعد ترتيب المعادلة.)

س^{٢} − ٢س − ٣ = ٠ (حلّل إلى العوامل.)

(س + ١)(س − ٣) = ٠

س = −١ أو س = ٣

عوّض عن س = −١ في المعادلة (٢) للحصول على: ص = −٢ − ١ = −٣

عوّض عن س = ٣ في المعادلة (٢) للحصول على: ص = ٦ − ١ = ٥

الحلول هي: س = −١ ، ص = −٣ و س = ٣ ، ص = ٥

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

مثال ١٠

حلَّ المعادلتَين الآتيتَين آنيًّا:

$٢س + ٢ص = ٧$

$س^{٢} - ٤ص^{٢} = ٨$

الحلّ

$٢س + ٢ص = ٧$ ..... (١)

$س^{٢} - ٤ص^{٢} = ٨$ ..... (٢)

من المعادلة (١) ، $س = \frac{٧ - ٢ص}{٢}$ (عوّض عن س في المعادلة (٢))

$(\frac{٧ - ٢ص}{٢})^{٢} - ٤ص^{٢} = ٨$ (فُكّ الأقواس.)

تابع الحلّ

$\frac{٤٩ - ٢٨ص + ٤ص^{٢}}{٤} - ٤ص^{٢} = ٨$ (اضرب طرفَي المعادلة في ٤)

$٤٩ - ٢٨ص + ٤ص^{٢} - ١٦ص^{٢} = ٣٢$ (أعد ترتيب الحدود.)

تابع الحلّ (تابع)

$١٢ص^{٢} + ٢٨ص - ١٧ = ٠$ (حلّل إلى العوامل.)

$(٦ص + ١٧)(٢ص - ١) = ٠$

$ص = -\frac{١٧}{٦}$ أو $ص = \frac{١}{٢}$

عوّض عن $ص = -\frac{١٧}{٦}$ في المعادلة (١) للحصول على $س = \frac{١٩}{٣}$

عوّض عن $ص = \frac{١}{٢}$ في المعادلة (١) للحصول على $س = ٣$

الحلول هي: $س = \frac{١٩}{٣}$ ، $ص = -\frac{١٧}{٦}$ و $س = ٣$ ، $ص = \frac{١}{٢}$

خالد كمال
khaled-math.stage.sh

تمارين ١-٥

١) حلَّ كلّ زوج من أزواج المعادلات الآتية آنيًّا:

أ $ص = س^{٢}$
$ص = ٦ - س$

ب $س^{٢} + ٢سص = ٨$
$س + ٤ص = ٦$

ج $س^{٢} + ص^{٢} = ١٠٠$
$٣ص = س + ١٠$

د $٨س^{٢} - ٢سص = ٤$
$ص = ٣س - ١$

هـ) $س - ٢ص = ٦$
$س^{٢} - ٤سص = ٢٠$

و) $٤س - ٣ص = ٥$
$س^{٢} + ٣سص = ١٠$

ز) $٢ص - س = ٥$
$٢س^{٢} - ٣ص^{٢} = ١٥$

ح) $س + ٢ص = ٦$
$س^{٢} + ص^{٢} + ٤سص = ٢٤$

ط) $٥س - ٢ص = ٢٣$
$س^{٢} - ٥سص + ص^{٢} = ١$

ي) $٢س - ص = ١٤$
$ص^{٢} = ٨س + ٤$

ك) $٢س^{٢} + ٣ص = ١٩ + ٠$
$٢س^{٢} + ٣ص = ٥$

ل) $س + ٢ص = ٥$
$س^{٢} + ص^{٢} = ١٠$

م) $س - ١٢ص = ٣٠$
$٢ص^{٢} - سص = ٢٠$

٢) مُربّعان مجموع محيطَيهما ٥٠ سم ، ومجموع مساحتَيهما ٩٣٫٢٥ سم². أوجد طول ضلع كلّ مُربّع.

٣) دائرتان مجموع محيطَيهما (٣٦π) سم ، ومجموع مساحتَيهما (١٧٠π) سم². أوجد نصف قطر كلّ دائرة.

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

٤) يُبيّن الشكل المجاور مجسَّمًا مكوّنًا من نصف كرة نصف قطرها (نق) سم ، وأسطوانة نصف قطر قاعدتها (نق) سم وارتفاعها (ع) سم. إذا علمت أن ارتفاع المجسّم الكلّي ١٨ سم ومساحته السطحية ٢٠٥π سم^{٢} ، فأوجد قيمة نق ، وقيمة ع.

مساعدة: المساحة السطحية (م) لأسطوانة نصف قطرها (نق) وارتفاعها (ع) تساوي م = ٢π نق ع + ٢π نق^{٢}

٥) يقطع المستقيم ص = ٢ − س المنحنى ٥س^{٢} − ص^{٢} = ٢٠ عند النقطتَين ا ، ب. أوجد إحداثيات النقطتَين ا ، ب.

٦) يقطع المستقيم ٢س + ٥ص = ١ المنحنى س^{٢} + ٥سص − ٤ص^{٢} + ١٠ = ٠ عند النقطتَين ا ، ب. أوجد إحداثيات النقطتَين ا ، ب

٧) ★ (أ) اقسم العدد ١٠ إلى جزأين بحيث يكون الفرق بين مُربّعيهما ٦٠

(ب) اقسم العدد ن إلى جزأين بحيث يكون الفرق بين مُربّعيهما د .

ورقة الإجابات النموذجية ا-٥

ملاحظة: الإجابات من حسابي لأن كتاب الطالب لا يتضمن مفتاح إجابات.

ا)

أ

ص=٦−س ، ص=س^{٢}

س = −٣ ، ص = ٩ و س = ٢ ، ص = ٤

ب

$$س + ٤ص = ٦ \quad ، \quad س^{٢} + ٢سص = ٨$$

$$س = -٨ ، ص = \frac{٧}{٢} \quad و \quad س = ٢ ، ص = ١$$

ج

$$٣ص = س + ١٠ \quad ، \quad س^{٢} + ص^{٢} = ١٠٠$$

$$س = -١٠ ، ص = ٠ \quad و \quad س = ٨ ، ص = ٦$$

د

$$ص = ٣س - ١ \quad ، \quad ٨س^{٢} - ٢سص = ٤$$

$$س = -٢ ، ص = -٧ \quad و \quad س = ١ ، ص = ٢$$

هـ

$$س - ٢ص = ٦ \quad ، \quad س^{٢} - ٤سص = ٢٠$$

$$س = ٢ ، ص = -٢ \quad و \quad س = ١٠ ، ص = ٢$$

و

$$٤س - ٣ص = ٥ \quad ، \quad س^{٢} + ٣سص = ١٠$$

$$س = -١ ، ص = -٣ \quad و \quad س = ٢ ، ص = ١$$

خالد كمال
khaled-math.sure.sh

ز

$$٢ص-س=٥ \quad ، \quad ٢س^{٢}-٣ص^{٢}=١٥$$

$$س = -٣ ، ص = ١ \quad و \quad س = ٩ ، ص = ٧$$

ح

$$س+٢ص=٦ \quad ، \quad س^{٢}+ص^{٢}+٤سص=٢٤$$

$$س = ٢ ، ص = ٢ \quad و \quad س = ١٠ ، ص = -٢$$

ط

$$٥س-٢ص=٢٣ \quad ، \quad س^{٢}-٥سص+ص^{٢}=١$$

$$س = -٥ ، ص = -٢٤ \quad و \quad س = ٥ ، ص = ١$$

ي

$$٢س-ص=١٤ \quad ، \quad ص^{٢}=٨س+٤$$

$$س = ٤ ، ص = -٦ \quad و \quad س = ١٢ ، ص = ١٠$$

ك

$$٢س+٣ص+١٩=٠ \quad ، \quad ٢س^{٢}+٣ص=٥$$

$$س = -٣ ، ص = -\frac{١٣}{٣} \quad و \quad س = ٤ ، ص = -٩$$

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

ل

س + ٢ص = ٥ ، $س^{٢} + ص^{٢} = ١٠$

س = −١ ، ص = ٣ و س = ٣ ، ص = ١

م

س − ١٢ص = ٣٠ ، $٢ص^{٢} - سص = ٢٠$

س = ٦ ، ص = −٢ و س = ١٨ ، ص = −١

٢)

أ + ب = ١٢,٥ ، $أ^{٢} + ب^{٢} = ٩٣,٢٥$

$٢أ^{٢} - ٢٥أ + ٦٣ = ٠$

$(٢أ - ٧)(أ - ٩) = ٠$

طولا الضلعَين: ٣,٥ سم ، ٩ سم

٣)

ر + s = ١٨ ، $ر^{٢} + s^{٢} = ١٧٠$

$ر^{٢} - ١٨ر + ٧٧ = ٠$

$(ر - ٧)(ر - ١١) = ٠$

نصفا القطرَين: ٧ سم ، ١١ سم

٤)

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

المساحة السطحية = ٣π ر^{٢} + ٢π ر ع = ٢٠٥π

ر + ع = ١٨

ر^{٢} + ٣٦ر − ٢٠٥ = ٠

(ر + ٤١)(ر − ٥) = ٠

نق = ٥ سم (يُرفض −٤١) ، ع = ١٣ سم

٥)

٥س^{٢} − (٢ − س)^{٢} = ٢٠

س^{٢} + س − ٦ = ٠

س = −٣ ، ص = ٥ و س = ٢ ، ص = ٠

٦)

س = −٢ ، ص = ١ و س = ٣ ، ص = −١

٧)

(أ) أ + ب = ١٠ ، أ^{٢} − ب^{٢} = ٦٠

أ − ب = ٦

الجزآن: ٨ ، ٢

(ب) أ + ب = ن ، أ^{٢} − ب^{٢} = d

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

$$\text{أ} - \text{ب} = \frac{\text{د}}{\text{ن}}$$

الجزآن: $\frac{\text{ن}^2 + \text{د}}{\text{٢ن}}$ ، $\frac{\text{ن}^2 - \text{د}}{\text{٢ن}}$

١-٦ حلّ معادلات تربيعية أكثر تعقيدًا

يُمكن أن يُطلب إليك أن تحلّ معادلة تربيعية بدلالة س.

عند حل هذه المعادلات الأكثر تعقيدًا، من المهم الأخذ بالاعتبار عدد الحلول الموجودة، لأن المعادلات الأصلية ليست تربيعية، فقد نجد أن لدينا عددًا غير متوقع من الحلول أو أن بعض الحلول الفعلية مرفوضة.

خالد كمال
khaled-mathematics.sh

مثال ١١

حلَّ المعادلة $\text{٤س}^{\text{٤}} - \text{٣٧س}^{\text{٢}} + \text{٩} = \text{٠}$

الحلّ

$\text{٤س}^{\text{٤}} - \text{٣٧س}^{\text{٢}} + \text{٩} = \text{٠}$ (ضع $\text{ص} = \text{س}^2$)

$\text{٤ص}^{\text{٢}} - \text{٣٧ص} + \text{٩} = \text{٠}$ (حلّ المعادلة التربيعية.)

$(\text{٤ص} - \text{١})(\text{ص} - \text{٩}) = \text{٠}$

الحلّ (تابع)

ص = $\frac{١}{٤}$ أو ص = ٩ (عوّض س^{٢} بدلًا من ص)

س^{٢} = $\frac{١}{٤}$ أو س^{٢} = ٩

س = ± $\frac{١}{٢}$ أو س = ±٣

لاحظ أن هذه المعادلة لها أربعة حلول ، وليس حلّين.

مثال ١٢

حلَّ المعادلة س − ٤$\sqrt{\text{س}}$ − ١٢ = ٠

الحلّ

س − ٤$\sqrt{\text{س}}$ − ١٢ = ٠ (ضع ص = $\sqrt{\text{س}}$)

ص^{٢} − ٤ص − ١٢ = ٠

(ص + ٢)(ص − ٦) = ٠

ص = −٢ أو ص = ٦ (عوّض $\sqrt{\text{س}}$ عن ص)

الحلّ (تابع)

$\sqrt{س} = -٢$ أو $\sqrt{س} = ٦$

$\sqrt{س} = -٢$ ليس لها حلّ حقيقي لأنّ $\sqrt{س}$ لا يمكن أن يكون سالبًا. (من المعلوم أن $\sqrt{س}$ عدد غير سالب.)

∴ س = ٣٦ (لاحظ أن هذه المعادلة لها حلّ واحد.)

مثال ١٣

حلَّ المعادلة $٣(٩^{س}) - ٢٨(٣^{س}) + ٩ = ٠$

الحلّ

$٣(٣^{س})^{٢} - ٢٨(٣^{س}) + ٩ = ٠$ (ضع ص = $٣^{س}$)

$٣ص^{٢} - ٢٨ص + ٩ = ٠$

$(٣ص - ١)(ص - ٩) = ٠$

ص = ٩ أو ص = $\frac{١}{٣}$

$٣^{س} = ٩$ أو $٣^{س} = \frac{١}{٣}$ ($٣^{٢} = ٩$ ، $٣^{-١} = \frac{١}{٣}$)

الحلّ (تابع)

س = ٢ أو س = −١

تمارين ١-٦

١) أوجد قيم س الحقيقية التي تحقّق كلّ معادلة من المعادلات الآتية:

أ) $س^{٤}-١٣س^{٢}+٣٦=٠$

ب) $س^{٦}-٧س^{٣}-٨=٠$

ج) $س^{٤}-٦س^{٢}+٥=٠$

د) $٢س^{٤}-١١س^{٢}+٥=٠$

هـ) $٣س^{٤}+س^{٢}-٤=٠$

و) $٨س^{٦}-٩س^{٣}+١=٠$

ز) $س^{٤}+٢س^{٢}-١٥=٠$

ح) $س^{٤}+٩س^{٢}+١٤=٠$

ط) $س^{٨}-١٥س^{٤}-١٦=٠$

ي) $٣٢س^{١٠}-٣١س^{٥}-١=٠$

ك) $\frac{٩}{س^{٤}}+\frac{٥}{س^{٢}}=٤$

ل) $\frac{٨}{س^{٦}}+\frac{٧}{س^{٣}}=١$

٢) حلَّ كلّ معادلة من المعادلات الآتية:

أ) $٢س-٩\sqrt{س}+١٠=٠$

ب) $\sqrt{س}(\sqrt{س}+١)=٦$

ج $٦س - ١٧\sqrt{س} + ٥ = ٠$

د $س - ١٠\sqrt{س} + ٢ = ٠$

هـ $٨س + ٥ = ١٤\sqrt{س}$

و $٣\sqrt{س} + \frac{٥}{\sqrt{س}} = ١٦$

ورقة الإجابات النموذجية ١-٦

ملاحظة: الإجابات من حسابي لأن كتاب الطالب لا يتضمن مفتاح إجابات.

١)

أ

$ت = س^{٢}$

$٤ ، ٩$

$س = \pm ٢$ أو $س = \pm ٣$

ب

$ت = س^{٣}$

$-١ ، ٨$

$س = ٢$ أو $س = -١$

ج

$$ت = س^{٢}$$

$$٥ ، ١$$

$$س = \pm ١ \text{ أو } س = \pm \sqrt{٥}$$

د

$$ت = س^{٢}$$

$$\frac{١}{٢} ، ٥$$

$$س = \pm \sqrt{٥} \text{ أو } س = \pm \frac{\sqrt{٢}}{٢}$$

هـ

$$ت = س^{٢}$$

$$-\frac{٤}{٣} ، ١ \text{ (مرفوض)}$$

$$س = \pm ١$$

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

و

$$ت = س^{٣}$$

$$\frac{١}{٨} ، ١$$

$$س = ١ \text{ أو } س = \frac{١}{٢}$$

ز

$$ت = س^{٢}$$

$$٣ ، -٥ \text{ (مرفوض)}$$

$$س = \pm \sqrt{٣}$$

ح

$$ت = س^{٢}$$

$$-٢ ، -٧ \text{ (مرفوضان)}$$

لا توجد حلول حقيقية

ط

$$ت = س^{٤}$$

$$١٦ ، -١ \text{ (مرفوض)}$$

$$س = \pm ٢$$

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

ي

$$ت = س^{٥}$$

$$\frac{١}{٣٢}- ، ١$$

$$س = ١ \text{ أو } س = -\frac{١}{٢}$$

ك

$$ت = \frac{١}{س^{٢}}$$

$$٩ت^{٢} + ٥ت - ٤ = ٠$$

$$ت = \frac{٤}{٩} ، -١ \text{ (مرفوض)}$$

$$س = \pm\frac{٣}{٢}$$

ل

$$ت = \frac{١}{س^{٣}}$$

$$٨ت^{٢} + ٧ت - ١ = ٠$$

$$ت = \frac{١}{٨} ، -١$$

$$س = ٢ \text{ أو } س = -١$$

٢)

أ

$$ص = \sqrt{س} : ٢ص^{٢} - ٩ص + ١٠ = ٠$$

$$ص = ٢ ، \frac{٥}{٢}$$

$$س = ٤ \text{ أو } س = \frac{٢٥}{٤}$$

ب

$$ص = \sqrt{س} : ص^{٢} + ص - ٦ = ٠$$

$$ص = ٢ ، -٣ \text{ (مرفوض)}$$

$$س = ٤$$

ج

$$ص = \sqrt{س} : ٦ص^{٢} - ١٧ص + ٥ = ٠$$

$$ص = \frac{٥}{٢} ، \frac{١}{٣}$$

$$س = \frac{٢٥}{٤} \text{ أو } س = \frac{١}{٩}$$

خالد كمال
khaledkamath.surge.sh

د

$$ص = \sqrt{س} : ١٠ص^{٢} + ص - ٢ = ٠$$

$$ص = \frac{٢}{٥} ، -\frac{١}{٢} \text{ (مرفوض)}$$

$$س = \frac{٤}{٢٥}$$

هـ

$$ص = \sqrt{س} : ٨ص^{٢} - ١٤ص + ٥ = ٠$$

$$ص = \frac{٥}{٤} ، \frac{١}{٢}$$

$$س = \frac{٢٥}{١٦} \text{ أو } س = \frac{١}{٤}$$

و

$$ص = \sqrt{س} : ٣ص^{٢} - ١٦ص + ٥ = ٠$$

$$ص = ٥ ، \frac{١}{٣}$$

$$س = ٢٥ \text{ أو } س = \frac{١}{٩}$$

١-٧ حلّ المتباينات التربيعية

سبق أن تعرّفنا على كيفية حلّ المتباينات الخطّيّة. فيما يأتي مثالَين على ذلك:

حلّ المتباينة ٢(س + ٧) > −٤

٢(س + ٧) > −٤ (فُكّ الأقواس.)

٢س + ١٤ > −٤ (اطرح ١٤ من طرفَي المتباينة.)

٢س > −١٨ (اقسم الطرفَين على ٢)

س > −٩

حلّ المتباينة ١١ − ٢س ≤ −٤

١١ − ٢س ≤ −٤ (اطرح ١١ من الطرفَين.)

−٢س ≤ −١٥ (اقسم الطرفَين على −٢)

$$س \geq \frac{١٥}{٢}$$

استُخدم في المثال الثاني أعلاه النتيجة الآتية:

نتيجة ٥

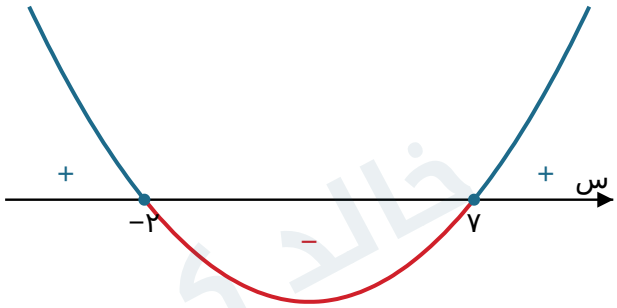
إذا ضربنا طرفَي المتباينة في عدد سالب ، أو قسمناهما على عدد سالب يجب عكس إشارة المتباينة.

يمكن حلّ المتباينات التربيعية برسم منحنى ومعرفة متى يكون المنحنى فوق المحور السيني أو تحته.

مثال ١٤

حلَّ المتباينة س^{٢} − ٥س − ١٤ > ٠

الحلّ



أوجد نقاط التقاطع مع المنحنى (ارسم منحنى الدالّة ص = س^{٢} − ٥س − ١٤)

عندما ص = ٠ ، فإن س^{٢} − ٥س − ١٤ = ٠

(س + ٢)(س − ٧) = ٠

س = −٢ أو س = ٧

تابع الحلّ

وعليه ، فإنّ نقاط تقاطع المنحنى مع المحور السيني هي: −٢ ، ٧

تابع الحلّ (تابع)

بما أنّ المطلوب إيجاد الحلّ عندما تكون المتباينة موجبة، يجب أن نجد مدى قيم س التي يكون المنحنى عندها موجبًا (فوق المحور السيني).

الحلّ هو: س < −٢ أو س > ٧

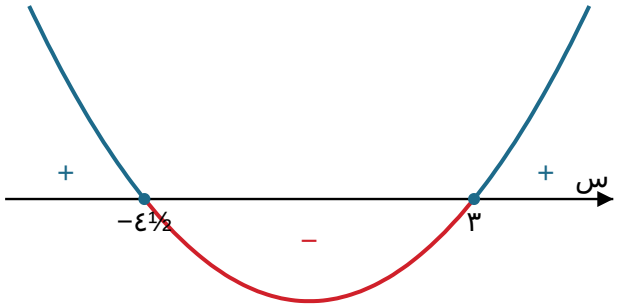
مساعدة: عند رسم منحنى الدالّة، عليك فقط معرفة اتجاهه إلى الأعلى أو إلى الأسفل ونقاط تقاطعه مع المحور السيني. من غير الضروري إيجاد الرأس أو الجزء المقطوع من المحور الصادي.

مثال ١٥

حلَّ المتباينة ٢س^{٢} + ٣س ≥ ٢٧

الحلّ

٢س^{٢} + ٣س − ٢٧ ≥ ٠ (أعد ترتيب الحدود.)



الحلّ (تابع)

ارسم منحنى الدالّة ص = ٢س^{٢} + ٣س − ٢٧

عندما ص = ٠ ، فإن ٢س^{٢} + ٣س − ٢٧ = ٠

(٢س + ٩)(س − ٣) = ٠

س = $-\frac{٩}{٢}$ أو س = ٣

تابع الحلّ

∴ الجزء المقطوع من المحور السيني هو −٤½ ، ٣

لحلّ المتباينة ٢س^{٢} + ٣س −
٢٧ ≥ ٠ نحتاج إلى إيجاد قيم س التي يكون المنحنى عندها صفرًا أو سالبًا (تحت محور السينات).

الحلّ هو: −٤½ ≤ س ≤ ٣

مثال ١٦

أوجد قيم ك إذا كان للمعادلة ك س^{٢} − ٢ك س + ٨ = ٠ جذران مختلفان.

الحلّ

ك س^{٢} − ٢ك س + ٨ = ٠

لأنه يوجد جذران مختلفان ، فإنّ: ب^{2} − ٤أجـ > ٠ (عوّض عن أ ، ب ، جـ)

(−٢ك)^{2} − ٤ × ك × ٨ > ٠

٤ك^{٢} − ٣٢ك > ٠

٤ك(ك − ٨) > ٠



يمكن أن نستخدم المنحنى لنرى أن قيم النقاط الحرجة هي ٠ ، ٨ ، أي أن:
ك < ٠ أو ك > ٨

سيتم التعبير عن ك في صورة متباينة.

استكشاف ١

سُئل نوّاف أن يحلّ المتباينة $\frac{٢س - ٤}{س}$ ≥ ٧ فعرض الحلّ الآتي:

استكشاف ١ (تابع)

اضرب طرفَي المتباينة في س: ٢س − ٤ ≤ ٧س

اطرح ٢س من كلا الطرفَين: −٤ ≤ ٥س

اقسم الطرفَين على ٥: س ≥ $-\frac{٤}{٥}$

جرّب خالد أن يتأكّد ما إذا كان س = −١ يحقّق المتباينة الأصلية ، فكتب:

عندما س = −١: ٢(−١) − ٤ ÷ (−١) = ٦

وعليه ، فإنّ س = −١ هي قيمة لـ س لا تحقّق المتباينة الأصلية. فيكون حلّ نوّاف غير صحيح!

ناقش حلّ نوّاف مع زملائك في الصف ، شارحًا الخطأ الذي وقع فيه.

كيف يمكن أن يعالج نوّاف المسألة ليحصل على الحلّ الصحيح؟

تمارين ١-٧

١) حلَّ كلّ متباينة من المتباينات الآتية:

أ س(س−٣)≥٠	**ب** (س−٣)(س+٢)>٠
ج (س−٤)(س−٦)≥٠	**د** (٢س+٣)(س−٢)>٠

هـ (٥−س)(س+٦)≤٠

و (١−٣س)(٢س+١)<٠

٢) حلَّ كلّ متباينة من المتباينات الآتية:

أ $س^{٢}-٢٥\leq٠$

ب $س^{٢}+٧س+١٠\geq٠$

ج $س^{٢}+٦س-٧<٠$

د $١٤س^{٢}+١٧س-٦\geq٠$

هـ $٦س^{٢}-٢٣س+٢٠>٠$

و $٢س^{٢}-٧س-٤>٠$

٣) حلَّ كلّ متباينة من المتباينات الآتية:

أ $س^{٢}>٣٦-٥س$

ب $١٥س>س^{٢}+٥٦$

ج $س(س+١٠)\geq١٢-س$

د $س^{٢}+٤س<٣(س+٢)$

هـ $(س+٣)(١-س)>س-١$

و $٢س(س+٣)>(٤س+٣)(٣س-١)$

ز $(س+٤)^{٢}\leq٢٥$

ح $(س-٢)^{٢}>١٤-س$

ط $٦س(س+١)<٥(٧-س)$

٤) أوجِد قيم س التي تحقّق $\frac{٥}{٢س^{٢}+س-١٥}<٠$

٥) أوجِد قيم س التي تحقّق:

أ $(س-٥)^{٢} < ٤$ ، $س^{٢}-٣س \geq ١٠$

ب $س^{٢}+٤س-٢١ \geq ٠$ ، $س^{٢}-٩س+٨ < ٠$

ج $س^{٢}+س-٢ > ٠$ ، $س^{٢}-٢س-٣ \leq ٠$

٦) أوجِد قيم س التي تحقّق $٢^{س^{٢}-٣س-٤} < ١$

٧) حلَّ كلّ متباينة من المتباينات الآتية:

أ $\frac{س(س-١)}{س+١} < س$

ب $\frac{س^{٢}-٩}{س-١} \leq ٤$

ج $\frac{س^{٢}-٢س-١٥}{س-٢} \leq ٠$

د $\frac{س^{٢}+٤س-٥}{س^{٢}-٤} \geq ٠$

هـ $\frac{س-٣}{س+٤} \leq \frac{س+٢}{س-٥}$

ورقة الإجابات النموذجية ١-٧

ملاحظة: الإجابات من حسابي لأن كتاب الطالب لا يتضمن مفتاح إجابات.

١)

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

أ $٠ \geq س \geq ٣$

ب $س < -٢$ أو $س > ٣$

ج $٤ \geq س \geq ٦$

د $-\frac{٣}{٢} < س < ٢$

هـ $-٦ \geq س \geq ٥$

و $س < -\frac{١}{٢}$ أو $س > \frac{١}{٣}$

٢)

أ $س \geq -٥$ أو $س \leq ٥$

ب $-٥ \geq س \geq -٢$

ج $س < -٧$ أو $س > ١$

د $-\frac{٣}{٢} \geq س \geq \frac{٢}{٧}$

هـ $\frac{٤}{٣} > س > \frac{٥}{٢}$

و $-\frac{١}{٢} > س > ٤$

٣)

أ $-٩ > س > ٤$

ب $س < ٧$ أو $س > ٨$

ج $-١٢ \geq س \geq ١$

د $-٣ > س > ٢$

هـ $س < -٤$ أو $س > ١$

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

و $س < -\frac{١}{٢}$ أو $س > \frac{٣}{٥}$

ز $س \geq -٩$ أو $س \leq ١$

ح $س < -٢$ أو $س > ٥$

ط $-\frac{٧}{٢} < س < \frac{٥}{٣}$

٤) المقام $(٢س - ٥)(س + ٣)$ سالب: $-٣ < س < \frac{٥}{٢}$

٦) الأسّ موجب: $س^{٢} - ٣س - ٤٠ > ٠$

$(س - ٨)(س + ٥) > ٠$

$س < -٥$ أو $س > ٨$

٥)

أ $٣ > س \geq ٥$ $((س-٥)^{٢} < ٤ \leftarrow ٣ < س < ٧$ ؛ $س^{٢}-٣س \geq ١٠$
$\leftarrow -٢ \geq س \geq ٥)$

ب $-٧ \geq س > ١$ $(-٧ \geq س \geq ٣$ ؛ $س < ١$ أو $س > ٨)$

ج $س < -٢$ أو $س \leq ٣$ $(س < -٢$ أو $س > ١$ ؛ $س \geq -١$
أو $س \leq ٣)$

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

٧)

أ $-١ < س < ٠$

ب $-١ \geq س < ١$ أو $س \leq ٥$

ج $-٣ \geq س < ٢$ أو $س \leq ٥$

د $-٥ \geq س < -٢$ أو $١ \geq س < ٢$

هـ $س < -٤$ أو $\frac{١}{٢} \geq س > ٥$

٨-١ التقاطع بين المستقيم ومنحنى الدالّة التربيعية

يوجد رابط بين عدد جذور المعادلة التربيعية $أس^{٢} + ب س + جـ = ٠$ ، والمنحنى المناظر للدالّة $ص = أس^{٢} + ب س + جـ$

ب² − ٤أجـ	نوع الجذور	شكل منحنى الدالّة ص = أس² + ب س + جـ
< ٠	جذران حقيقيان مختلفان.	يقطع المنحنى المحور السيني في نقطتَين مختلفتَين. (أ > ٠ أو أ < ٠)
= ٠	جذران حقيقيان متساويان (جذر حقيقي واحد مكرّر).	يلامس المنحنى محور السينات في نقطة واحدة. (أ > ٠ أو أ < ٠)
> ٠	لا توجد جذور حقيقية.	يقع المنحنى تحت محور السينات أو فوق محور السينات بشكل كامل. (أ < ٠ أو أ > ٠)

تعلّمنا سابقًا أن نجد نقاط تقاطع مستقيم ، ومنحنى الدالّة التربيعية عبر حلّ معادلتَيهما آنيًّا.

يساعدنا مميّز المعادلة الناتجة على معرفة عدد نقاط تقاطعهما. الحالات الثلاث الممكنة مبيّنة في الجدول الآتي:

ب² − ٤أجـ	نوع الجذور	المستقيم ومنحنى الدالّة
< ٠	جذران حقيقيان مختلفان.	نقطتا تقاطع مختلفتان.
= ٠	جذران حقيقيان متساويان (جذر مكرّر).	نقطة تقاطع واحدة (المستقيم مماسّ).
> ٠	لا توجد جذور حقيقية.	لا توجد نقاط تقاطع.

يوجد ثلاث حالات ممكنة عندما يتقاطع خطّ مستقيم مع منحنى الدالّة التربيعية.

الحالة الأولى	الحالة الثانية	الحالة الثالثة
يوجد نقطتا تقاطع.	يوجد نقطة تقاطع واحدة.	لا يوجد نقطة تقاطع.
يقطع المستقيم المنحنى في نقطتَين مختلفتَين.	يلامس المستقيم المنحنى في نقطة واحدة فقط ، ممّا يعني أنّ المستقيم **مماس** Tangent للمنحنى.	لا يقطع المستقيم المنحنى.

مثال ١٧

أوجِد قيمة ك بحيث يكون المستقيم ص = س + ك مماسّ لمنحنى الدالّة ص = س^{٢} + ٥س + ٢

الحلّ

س^{٢} + ٥س + ٢ = س + ك (ساوِ بين المعادلتَين.)

س^{٢} + ٤س + (٢ − ك) = ٠ (أعد ترتيب الحدود.)

بما أنّ المستقيم مماسّ للمنحنى ، فإنّ مميّز المعادلة التربيعية يجب أن يساوي صفرًا. لذا:

ب^{٢} − ٤أجـ = ٠

٤^{٢} − ٤ × ١ × (٢ − ك) = ٠ (عوّض.)

الحلّ (تابع)

١٦ − ٨ + ٤ك = ٠

٤ك = −٨

ك = −٢

يتضمن المثال الآتي معادلة تربيعية تساعدنا في إيجاد شروط التقاطع بين المستقيم والمعادلة التربيعية.

مثال ١٨

أوجِد مجموعة قيم ك بحيث يقطع المستقيم ص = ك س − ١ منحنى الدالّة ص = س^{٢} − ٢س في نقطتَين مختلفتَين.

الحلّ

س^{٢} − ٢س = كس − ١ (ساوِ بين المعادلتَين.)

س^{٢} − (ك + ٢)س + ١ = ٠ (أعد ترتيب الحدود.)

بما أنّ المستقيم يقطع المنحنى في نقطتَين مختلفتَين ، فإنّ مميّز المعادلة التربيعية يجب أن يكون أكبر من الصفر.

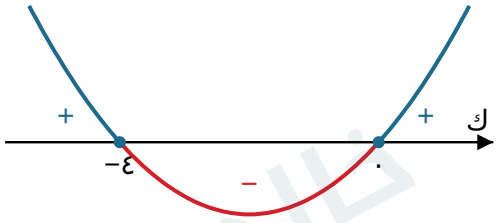
ب^{٢} − ٤أجـ > ٠

الحلّ (تابع)

(ك + ٢)^{٢} − ٤ × ١ × ١ > ٠ (عوّض.)

ك^{٢} + ٤ك > ٠

ك(ك + ٤) > ٠



تابع الحلّ

القيمتان هما −٤ ، ٠

وعليه ، تكون ك < −٤ أو ك > ٠

تمارين ١-٨

١) المستقيم ص = كس + ١ مماسّ للمنحنى ص = س^{٢} − ٧س + ٢. أوجد قيمتَي ك.

٢) المحور السيني مماسّ لمنحنى الدالّة ص = س^{٢} − (ك + ٣)س + (٣ك + ٤). أوجِد قيمتَي ك.

٣) المستقيم ص = ك − ٣س مماسّ للمنحنى س^{٢} + ٢سص − ٢٠ = ٠.
(أ) أوجِد قيمتَي ك.
(ب) أوجِد إحداثيات نقطتَي تقاطع المستقيم والمنحنى.

٤) المستقيم ص = مس + ٦ مماسّ للمنحنى ص = س^{٢} − ٤س + ٧. أوجِد قيمتَي م ، وأوجِد إحداثيات نقطتَي التماس.

٥) يقطع المستقيم ص = ٢س − ١ المنحنى ص = س^{٢} + كس + ٣ في نقطتَين مختلفتَين. أوجِد مجموعة قيم ك.

٦) يقطع المستقيم ص = ك − س المنحنى ص = ٥ − ٣س − س^{٢} في نقطتَين مختلفتَين. أوجِد مجموعة قيم ك.

٧) المستقيم ص = عس + ٥ لا يقطع المنحنى ص = س^{٢} − س + ٦ أبدًا. أوجِد مجموعة قيم ع.

٨) المستقيم ص = ٢س − ١٠ لا يقطع المنحنى ص = س^{٢} − ٦س + ك أبدًا. أوجِد مجموعة قيم ك.

٩) ★ المستقيم ص = كس + ٦ مماسّ للدائرة س^{٢} + ص^{٢} − ١٠س + ٨ص = ٨٤. أوجِد قيمة ك.

١٠) ★ المستقيم ص = مس + جـ مماسّ للمنحنى ص = س^{٢} − ٤س + ٤. أثبت أن م^{٢} + ٨م + ٤جـ = ٠.

١١) ★ المستقيم ص = مس + جـ مماسّ للمنحنى أ س^{٢} + ب ص^{٢} = جـ. أثبت أن م^{٢} = $\frac{\text{أ}}{\text{أبجـ} - \text{ب}}$.

ورقة الإجابات النموذجية ١-٨

ملاحظة: الإجابات من حسابي لأن كتاب الطالب لا يتضمن مفتاح إجابات.

١)

$س^{٢} - (ك + ٧)س + ١ = ٠$

$(ك + ٧)^{٢} - ٤ = ٠$

$ك = -٥$ أو $ك = -٩$

٢)

$(ك + ٣)^{٢} - ٤(ك٣ + ٤) = ٠$

$ك^{٢} - ٦ك - ٧ = ٠$

$ك = ٧$ أو $ك = -١$

٣)

(أ) $س^{٢} + ٢س(ك - ٣س) - ٢٠ = ٠$

$٥س^{٢} - ٢كس + ٢٠ = ٠$

$٤ك^{٢} - ٤٠٠ = ٠$

$ك = ١٠$ أو $ك = -١٠$

(ب) عند $ك = ١٠$: $س = ٢$ ، $ص = ٤$

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

(٢ ، ٤)

عند ك = −١٠: س = −٢ ، ص = −٤

(−٢ ، −٤)

٤)

$س^{٢} - (٤ + م)س + ١ = ٠$

$(٤ + م)^{٢} - ٤ = ٠$

م = −٢ : نقطة التماس (١ ، ٤)

م = −٦ : نقطة التماس (−١ ، ١٢)

٥)

$س^{٢} + (ك - ٢)س + ٤ = ٠$

$(ك - ٢)^{٢} - ١٦ > ٠$

ك < −٢ أو ك > ٦

٦)

$س^{٢} + ٢س + (ك - ٥) = ٠$

$٤ - ٤(ك - ٥) > ٠$

ك > ٦

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

٧)

$س^{٢} - (ا + ع)س + ا = ٠$

$(ا + ع)^{٢} - ٤ < ٠$

$-٣ < ع < ا$

٨)

$س^{٢} - ٨س + (ك + ١٠) = ٠$

$٦٤ - ٤(ك + ١٠) > ٠$

$ك < ٦$

٩)

$س^{٢} + (كس + ٦)^{٢} - ١٠اس + ٨(كس + ٦) = ٨٤$

$(ا + ك^{٢})س^{٢} + (٢٠ك - ١٠)س = ٠$

$(٢٠ك - ١٠)^{٢} = ٠$

$ك = \frac{ا}{٢}$

١٠)

$س^{٢} - ٤س + ٤ = مس + جـ$

$س^{٢} - (٤ + م)س + (٤ - جـ) = ٠$

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

$(٤ + م)^{٢} - ٤(٤ - جـ) = ٠$

$م^{٢} + ٨م + ٤جـ = ٠$

II)

$أ\ س^{٢} + ب(مس + جـ)^{٢} = جـ$

$(أ + ب\ م^{٢})س^{٢} + ٢بمجـ\ س + (ب\ جـ^{٢} - جـ) = ٠$

$٤ب^{٢}\ م^{٢}\ جـ^{٢} - ٤(أ + ب\ م^{٢})(ب\ جـ^{٢} - جـ) = ٠$

$جـ(ب\ م^{٢} - أ\ ب\ جـ + أ) = ٠$

$$م^{2} = \frac{أبجـ - أ}{ب}$$

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

قائمة التحقّق من التعلّم والفهم

يمكن حلّ المعادلات التربيعية بالطرق الآتية:

- الإكمال إلى مُربّع.
- استخدام الصيغة التربيعية: $س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{2} - ٤أجـ}}{٢أ}$

حلّ المعادلات الآنيّة (معادلة خطّيّة ومعادلة تربيعية)

- أعِد ترتيب حدود المعادلة حيث تكتب س بدلالة ص أو ص بدلالة س.
- عوِّض عن س أو ص في المعادلة التربيعية ، ثمّ حلّ المعادلة الناتجة منها.

النقطة العظمى والنقطة الصغرى ومحور التماثل

للدالّة التربيعية د(س) = أس^{2} + ب س + جـ والتي تكتب في صورة د(س) = أ(س − ل)^{2} + ك:

• معادلة محور التماثل هي: س = ل = $-\frac{\text{ب}}{\text{٢أ}}$

• إذا كان أ > ٠ ، فيوجد قيمة صغرى عند النقطة (ل ، ك).

• إذا كان أ < ٠ ، فيوجد قيمة عظمى عند النقطة (ل ، ك).

المعادلة التربيعية أس^{2} + ب س + جـ = ٠ ومنحنى الدالّة ص = أس^{2} + ب س + جـ

• المميّز = ب^{2} − ٤أجـ.

• إذا كان ب^{2} − ٤أجـ > ٠ ، فيكون للمعادلة أس^{2} + ب س + جـ = ٠ جذران مختلفان.

• إذا كان ب^{2} − ٤أجـ = ٠ ، فيكون للمعادلة أس^{2} + ب س + جـ = ٠ جذران متساويان.

• إذا كان ب^{2} − ٤أجـ < ٠ ، فلا توجد جذور حقيقية للمعادلة أس^{2} + ب س + جـ = ٠

• الشرط الواجب توافره ليكون للمعادلة التربيعية جذور حقيقية هو: ب^{2} − ٤أجـ ≥ ٠

تقاطع المستقيم مع منحنى الدالّة التربيعية بالصورة العامة

• إذا تقاطع مستقيم مع منحنى دالّة تربيعية بالصورة العامة في نقطة واحدة ، فيكون المستقيم مماسًّا للمنحنى عند تلك النقطة.

خالد كمال
Khaled-math.surge.sh

• يؤدّي حلّ معادلتَي المستقيم والدالّة التربيعية آنيًّا إلى معادلة في صورة أس^{٢} + ب س + جـ = ٠

• تعطي العبارة ب^{٢} − ٤أجـ معلومات عن تقاطع المستقيم مع منحنى الدالّة التربيعية.

تمارين مراجعة نهاية الوحدة الأولى

١) (أ) اكتب ٩س^{٢} − ١٥س في صورة (٣س − أ)^{٢} − ب

(ب) أوجِد قيم س التي تحقّق المتباينة ٩س^{٢} − ١٥س > ٦

٢) أوجِد جذور المعادلة $\frac{٢٥}{\text{س}^{٢}} = ٤ + \frac{٣٦}{\text{س}^{٤}}$

٣) أوجِد قيم ك عندما يتقاطع المستقيم ص = ك س − ٣ مع منحنى الدالّة ص = س^{٢} − ٩س في نقطتَين مختلفتَين.

٤) أوجِد قيم ك عندما يتقاطع المستقيم ص = ٢س + ك مع المنحنى ص = ١ + ٢ك س − س^{٢} في نقطتَين مختلفتَين.

٥) (أ) أوجِد إحداثيات رأس منحنى الدالّة التربيعية ص = ٤س^{٢} − ١٢س + ٧

(ب) أوجِد قيم العدد الثابت ك إذا كان المستقيم ص = ك س + ٣ مماسًّا لمنحنى الدالّة ص = ٤س^{٢} − ١٢س + ٧

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

٦) منحنى معادلته ص = ٥ − ٢س + س² ، ومستقيم معادلته ص = ٢س + ك ، حيث ك عدد ثابت.

(أ) بيِّن أنّ الإحداثي السيني لنقاط تقاطع المنحنى مع المستقيم يُحقق المعادلة س² − ٤س + (٥ − ك) = ٠

(ب) يقطع المستقيم المنحنى في نقطتَين مختلفتَين ا ، ب لإحدى قيم ك. أوجِد إحداثيات النقطة ب إذا علمت أن إحداثيات النقطة ا هي (−٢ ، ١٣).

(ج) إذا كان المستقيم مماسًّا للمنحنى عند النقطة ع ، فأوجِد قيمة ك وإحداثيات النقطة ع.

٧) منحنى معادلته ص = س² − ٥س + ٧ ، ومستقيم معادلته ص = ٢س − ٣

(أ) بيِّن أنّ منحنى الدالّة يقع فوق محور السينات.

(ب) أوجِد إحداثيات نقاط تقاطع المستقيم مع منحنى الدالّة.

(ج) اكتب قيم س التي تحقّق المتباينة س² − ٥س + ٧ < ٢س − ٣

٨) منحنى معادلته ص = ١٠اس − س²

(أ) اكتب ١٠اس − س² في صورة أ − (س + ب)²

(ب) اكتب إحداثيات رأس منحنى الدالّة.

(ج) أوجِد قيم س حيث ص ≤ ٩

٩) ★ منحنى معادلته ص = س² − ٤س + ٤ ، ومستقيم معادلته ص = م س ، حيث م عدد ثابت.

(أ) إذا كانت م = ١ ، يتقاطع المستقيم والمنحنى في النقطتَين ا ، ب ، فأوجِد إحداثيات نقطة المنتصف بين النقطتَين ا ، ب

(ب) أوجِد قيمة م التي تجعل المستقيم مماسًّا للمنحنى ، وأوجِد إحداثيات نقطة التماسّ.

خالد كمال
khaled-math.site

١٠) ★ (أ) اكتب ٢س^{٢} − ٤س + ١ في صورة أ(س + ب)^{٢} + جـ ، وأوجِد إحداثيات نقطة القيمة الصغرى للمنحنى ص = ٢س^{٢} − ٤س + ١

(ب) إذا قطع المستقيم س − ص + ٤ = ٠ منحنى الدالّة ص = ٢س^{٢} − ٤س + ١ عند النقطتَين ك ، ل ، وكانت إحداثيات ك (٣ ، ٧). أوجِد إحداثيات النقطة ل

١١) ★ تمثّل المعادلة ص = $\sqrt{٣}$ س − $\frac{٤٩س^{٢}}{٩٠٠٠}$ مسار جسم مقذوف ، حيث قيم س ، ص بالأمتار.

(أ) أوجِد المدى الأفقي للجسم المقذوف.

(ب) أوجِد أكبر ارتفاع يصل إليه الجسم المقذوف.

ورقة الإجابات النموذجية: مراجعة الوحدة ١

ملاحظة: الإجابات من حسابي لأن كتاب الطالب لا يتضمن مفتاح إجابات.

١)

(أ) ٩س^{٢} − ١٥س = (٣س − $\frac{٥}{٢}$)^{٢} − $\frac{٢٥}{٤}$

أ = $\frac{٥}{٢}$ ، ب = $\frac{٢٥}{٤}$

(ب) ٣س^{٢} − ٥س − ٢ > ٠

س < − $\frac{١}{٣}$ أو س > ٢

٢)

ت = $\frac{\text{ا}}{\text{س}^2}$: ٣٦ت^2 − ٢٥ت + ٤ = ٠

(٩ت − ٤)(٤ت − ١) = ٠

ت = $\frac{٤}{٩}$ أو $\frac{١}{٤}$

س = ± $\frac{٣}{٢}$ أو س = ±٢

٣)

س^٢ − (٩ + ك)س + ٣ = ٠

(٩ + ك)^٢ − ١٢ > ٠

ك < −٩ − ٣$\sqrt{٢}$ أو ك > −٩ + ٣$\sqrt{٢}$

٤)

س^٢ + (٢ − ٢ك)س + (ك − ١) = ٠

٤(ك − ١)(ك − ٢) > ٠

ك < ١ أو ك > ٢

٥)

(أ) ٤س^2 − ١٢س + ٧ = ٤(س − $\frac{٣}{٢}$)^2 − ٢

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

الرأس $\left(\frac{٣}{٢}\ ،\ -٢\right)$

(ب) $٤س^{٢} - (١٢ + ك)س + ٤ = ٠$

$(١٢ + ك)^{٢} - ٦٤ = ٠$

ك = −٤ أو ك = −٢٠

٦)

(أ) $س^{٢} + س٢ - ٥ = ٢س + ك$

$س^{٢} - ٤س + (٥ - ك) = ٠$

(ب) ١٣ = −٤ + ك

ك = ١٧ ، $س^{٢} - ٤س - ١٢ = ٠$

س = −٢ أو س = ٦

ب (٦ ، ٢٩)

(ج) $١٦ - ٤(٥ - ك) = ٠$

ك = ١ ، س = ٢ ، ص = ٥

ع (٢ ، ٥)

٧)

(أ) المميّز = ٢٥ − ٢٨ = −٣ < ٠ ومعامل $س^{٢}$ موجب

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

المنحنى فوق محور السينات.

(ب) $س^{٢} - ٧س + ١٠ = ٠$

$س = ٢$ أو $س = ٥$

$(٢ ، ١)$ ، $(٥ ، ٧)$

(ج) $س < ٢$ أو $س > ٥$

٨)

(أ) $(س - ٥)^{٢} = س^{٢} - ١٠س + ٢٥$

(ب) الرأس $(٥ ، ٢٥)$

(ج) $س^{٢} - ١٠س + ٩ \geq ٠$

$١ \geq س \geq ٩$

٩)

(أ) $س^{٢} - ٥س + ٤ = ٠$

أ $(١ ، ١)$ ، ب $(٤ ، ٤)$

نقطة المنتصف $(\frac{٥}{٢} ، \frac{٥}{٢})$

(ب) $س^{٢} - (٤ + م)س + ٤ = ٠$

$(٤ + م)^{٢} = ١٦$

م = ٠ أو م = −٨

م = ٠ : نقطة التماس (٢ ، ٠) ؛ م = −٨ : نقطة التماس (−٢ ، ١٦)

(١٠

(أ) ٢س^{٢} − ٤س + ١ = ٢(س − ١)^{٢} − ١

النقطة الصغرى (١ ، −١)

(ب) ص = س + ٤

٢س^{٢} − ٥س − ٣ = ٠

س = ٣ أو س = $-\frac{١}{٢}$

ل ($-\frac{١}{٢}$ ، $\frac{٧}{٢}$)

(١١

(أ) ص = ٠

س = ٠ أو س = $\frac{\sqrt[٣]{٩٠٠٠}}{٤٩}$

المدى الأفقي = $\frac{\sqrt[٣]{٩٠٠٠}}{٤٩}$ م ≈ ٣١٨,١ م

(ب) عند س = $\frac{\sqrt[٣]{٤٥٠٠}}{٤٩}$

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

أكبر ارتفاع = $\frac{٦٧٥٠}{٤٩}$ م ≈ ١٣٧٫٨ م

خالد كمال
khaled-math.surge.sh