٢-١ المشتقة الأولى

تعلّمت سابقًا كيفية تقدير ميل منحنى عند نقطة من خلال رسم خط **مماس** مناسب، ومن ثم حساب ميل هذا المماس.

رسم خط المماس يعطي تقديرًا للميل عند نقطة التماس، وهذه العملية تستغرق وقتًا. لذا سنتعلم طريقة لإيجاد الميل الدقيق للمنحنى عند أي نقطة عليه دون رسم مماس.

هذه الطريقة تسمى **التفاضل (الاشتقاق)**. وللقيام بذلك علينا **إيجاد المشتقة** للدالة أو لمعادلة المنحنى.

خالد كمال
khalid-math.surge.sh

استكشاف ١

استكشاف ١

تمّ إعطاء ثلاثة طلبة أ ، ب ، ج ، مخططات للمنحنى نفسه.

طلب إليهم رسم خط مماس عند نقطة على المنحنى حيث س = ٥ ، ومن ثم حساب ميل المماس عند تلك النقطة.

للقيام بذلك، حدّد الطلبة إحداثيات نقطتين على المماس الذي رسموه.

الأشكال في كتاب الطالب صفحة ٤٧.

الطالب أ: (٠,٦ ، ١,٤) و (٦ ، ٧)

الطالب ب: (٠,٨ ، ٢) و (٦,٤ ، ٨)

الطالب ج: (٠,٩ ، ٢,٥) و (٦,٥ ، ٧,٩)

أسئلة استكشاف ١

١) استخدم النقطتين المحدّدتين لحساب ميل المماس الذي رسمه كل من الطلبة أدناه، مقرّبًا إلى أقرب منزلتين عشريتين:

أ الطالب أ	ب الطالب ب	ج الطالب ج
.....	.....	.....

٢) إذا رُسم مماس بشكل دقيق عند س = ٥ على المنحنى، فسيمر خلال (١,٢ ، ٠,٩٥) و (٨,٢ ، ٧,٠٥).

أ) ما هو الميل الصحيح للمماس عند س = ٥ ؟

ب) ناقش وأكمل العبارة الآتية:

ميل ..... عند س = ٥ هو ذاته ميل ..... عند س = ٥

ميل المماس والمنحنى

الميل عند نقطة على المنحنى هو ذاته ميل المماس المرسوم بدقة عند تلك النقطة، وهما:

- **موجبان** عندما يميل المماس إلى الأعلى من اليسار إلى اليمين (يصنع المماس زاوية حادة مع محور السينات الموجب).
- **صفر** عندما يكون المماس أفقيًا (موازيًا لمحور السينات).
- **سالبان** عندما يميل المماس إلى الأسفل من اليسار إلى اليمين (يصنع المماس زاوية منفرجة مع محور السينات الموجب).

الأشكال الثلاثة في كتاب الطالب صفحة ٤٨.

الميل عند ص = س^{٢}

خالد كمال
khaled-mathsurge.sh

يعرض الجدول الآتي الميل (م) عند ست نقاط على منحنى معادلته ص = س^{٢}

الإحداثي السيني للنقطة	−٢	−١	٠	١	٢	٣
ميل المنحنى	−٤	−٢	٠	٢	٤	٦

يمكنك أن تلاحظ العلاقة بين الإحداثي السيني وقيمة الميل في كل حالة: يساوي الميل الإحداثي السيني مضروبًا في ٢

> هذا يعني أن الميل عند أي نقطة على المنحنى ص = د(س) = س^{٢} يساوي ٢س

ثلاث صيغ لكتابة الميل

١) إذا كان ص = س^{٢} فإن الميل هو $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = ٢س

٢) إذا كان د(س) = س^{٢} فإن الميل هو د′(س) = ٢س

٣) إذا كان د(س) = س^{٢} فإن الميل هو $\frac{\text{د}}{\text{د س}}$ (س^{٢}) = ٢س

تسمى $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ **المشتقة الأولى** لـ ص بالنسبة إلى س. كذلك تسمى د′(س) المشتقة الأولى بالنسبة إلى س.

المشتقة الأولى ودالة الميل

إذا كان ص = د(س) منحنى دالة، تعرف **المشتقة الأولى** (first derivative) على أنها **دالة الميل** (gradient function) للمنحنى.

يرمز أحيانًا إلى مشتقة معادلة المنحنى بـ ص′

اشتقاق دوال القوة

لقد اكتشفت أن مشتقة د(س) = س^{٢} هي د′(س) = ٢س

يمكنك، من خلال رسم مماسات دقيقة على منحنى د(س) = س^{٣}، أن تكتشف أن مشتقتها هي د′(س) = ٣س^{٢}

بطريقة مماثلة، مشتقة د(س) = س^{٤} هي د′(س) = ٤س^{٣} وأن مشتقة د(س) = س^{٥} هي د′(س) = ٥س^{٤}

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

يمكنك ملاحظة وجود علاقة جبرية بين دالة القوة د(س) ومشتقتها د′(س). تقود هذه النتائج إلى قاعدة القوة (القاعدة العامة لاشتقاق دوال القوة).

نتيجة ١: قاعدة القوة

نتيجة ١

$$\frac{\text{د}}{\text{د س}}(\text{س}^{\text{ن}}) = \text{ن س}^{\text{ن}-١}$$

وهذا صحيح لأي قوة حقيقية ن

من الأمثلة على ذلك:

- إذا كان ص = س^{١٠}، فإن $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = ١٠ \times \text{س}^{١٠-١} = ١٠\text{س}^{٩}$

أمثلة على قاعدة القوة

- إذا كان د(س) = س $^{\frac{٣}{٢}}$ ، فإن د′(س) = $\frac{٣}{٢} \times \text{س}^{\frac{٣}{٢}-١} = \frac{٣}{٢}\text{س}^{\frac{١}{٢}} = \frac{٣}{٢}\sqrt{\text{س}}$

- إذا كان د(س) = س^{٣}، فإن $\frac{\text{د}}{\text{د س}}(\text{س}^{٣}) = ٣\text{س}^{٢}$

مثال ١

مثال ١

أوجد مشتقة كل من الصيغ الآتية:

أ $س^{٧}$	ب $\frac{١}{س}$	ج د(س) = $\sqrt{س}$
د ص = ٢	هـ ص = س	

حل مثال ١ (أ، ب)

الحل

أ) $\frac{د}{د\ س}(س^{٧}) = ٧س^{٧-١}$

$= ٧س^{٦}$ (اضرب في القوة ٧ ثم اطرح ١ من القوة)

ب) $\frac{د}{د\ س}(\frac{١}{س}) = \frac{د}{د\ س}(س^{-١})$

(اكتب $\frac{١}{س}$ على الشكل $س^{-١}$)

$= -١ \times س^{-١-١}$ (اضرب في القوة -١ ثم اطرح ١ من القوة)

$= -س^{-٢}$

الحل (تابع)

$= -\frac{١}{س^{٢}}$ (اكتب الإجابة في صيغة السؤال نفسها)

حل مثال ١ (ج)

الحل

ج) د(س) = $\sqrt[٢]{س}$

اكتب $\sqrt[٢]{س}$ على الشكل $س^{\frac{١}{٢}}$

د(س) = $س^{\frac{١}{٢}}$

د′(س) = $\frac{١}{٢} س^{\frac{١}{٢}-١}$ (اضرب في القوة $\frac{١}{٢}$ ثم اطرح ١ من القوة)

= $\frac{١}{٢} س^{-\frac{١}{٢}}$

= $\frac{١}{٢\sqrt{س}}$

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

حل مثال ١ (د، هـ)

الحل

د) ص = ٢ (اكتب ٢ على الشكل ٢س^{٠})

ص = ٢س^{٠}

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = ٢ × ٠ × س$^{٠-١}$ (اضرب في القوة ٠ ثم اطرح ١ من القوة)

= ٠

هـ) ص = س (اكتب س على الشكل س^{١})

ص = س^{١}

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = ١ × س$^{١-١}$ = س^{٠} (استخدم س^{٠} = ١)

= ١

خالد كمال
khaled-math-surge.sh

نتائج ٢ و ٣

نتيجة ٢

إذا كانت د(س) = أ ، فإن د′(س) = ٠

إذا كانت د(س) = س ، فإن د′(س) = ١

قانون الضرب في ثابت

نتيجة ٣

إذا كان ك عددًا ثابتًا ، د(س) دالة ، فإن: $\frac{\text{د}}{\text{د س}}$ [ك د(س)] = ك $\frac{\text{د}}{\text{د س}}$ [د(س)]

نتيجة ٤: قانون الجمع والطرح

نتيجة ٤

إذا كانت د(س) = هـ(س) + ق(س) فإن د′(س) = هـ′(س) + ق′(س)

إذا كانت د(س) = هـ(س) − ق(س) فإن د′(س) = هـ′(س) − ق′(س)

مساعدة: إذا كانت د(س) = هـ(س) × ق(س) فإن د′(س) ≠ هـ′(س) × ق′(س) ، وإذا كانت د(س) = هـ(س) ÷ ق(س) فإن د′(س) ≠ هـ′(س) ÷ ق′(س)

مثال ٢

مثال ٢

أوجد المشتقة بالنسبة إلى س:

مثال ٢ (تابع)

أ $٤س^{٣}$

ب $\frac{٣}{س^{٢}}$

ج $٤س^{٣} - \frac{٣}{س^{٢}} + \frac{١}{٤}س^{٨}$

حل مثال ٢ (أ، ب)

الحل

أ) $\frac{د}{د\ س}(٤س^{٣}) = ٤\ \frac{د}{د\ س}(س^{٣})$ (باستخدام قانون الضرب في ثابت)

$= ٤ \times ٣س^{٢}$

$= ١٢س^{٢}$

ب) $\frac{د}{د\ س}(\frac{٣}{س^{٢}}) = \frac{د}{د\ س}(٣س^{-٢})$ (بكتابة $\frac{٣}{س^{٢}}$ على الشكل $٣س^{-٢}$)

$= ٣\ \frac{د}{د\ س}(س^{-٢})$ (باستخدام قانون الضرب في ثابت)

$= ٣ \times (-٢)س^{-٢-١}$

الحل (تابع)

$$= -٦س^{-٣} = -\frac{٦}{س^{٣}}$$

حل مثال ٢ (ج)

الحل

ج) $\frac{د}{د\ س}(٤س^{٣} - \frac{٣}{س^{٢}} + \frac{١}{٤}س^{٨})$

$= ١٢س^{٢} - (-\frac{٦}{س^{٣}}) + \frac{د}{د\ س}(\frac{١}{٤}س^{٨})$ (استخدم الناتج من الجزئية أ والجزئية ب في مشتقة الحدّين الأول والثاني)

$= ١٢س^{٢} + \frac{٦}{س^{٣}} + \frac{١}{٤} \times ٨س^{٧}$

$= ١٢س^{٢} + \frac{٦}{س^{٣}} + ٢س^{٧}$

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

مثال ٣

مثال ٣

إذا كان د(س) = $\frac{٤}{\sqrt{س}}$ + ٥ ، فأوجد د′(س)

الحل

د(س) = $\frac{٤}{\sqrt{س}}$ + ٥ (اكتب $\frac{٤}{\sqrt{س}}$ على الشكل ٤س$^{-\frac{١}{٢}}$)

= ٤س$^{-\frac{١}{٢}}$ + ٥

د′(س) = ٤ $\frac{د}{د\ س}$ (س$^{-\frac{١}{٢}}$) + $\frac{د}{د\ س}$ (٥)

= ٤ × (−$\frac{١}{٢}$)س$^{-\frac{١}{٢}-١}$ + ٠

= −٢س$^{-\frac{٣}{٢}}$

= − $\frac{٢}{س^{\frac{٣}{٢}}}$ = − $\frac{٢}{س\sqrt{س}}$

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

مثال ٤ (أ)

مثال ٤

أوجد د′(س) لكل ممّا يأتي:

أ) د(س) = (س + ٥)(س − ٣)

الحل

د(س) = (س + ٥)(س − ٣) (فك الأقواس)

= س^{٢} + ٥س − ٣س − ١٥ (اجمع الحدود المتشابهة)

= س^{٢} + ٢س − ١٥

∴ د′(س) = $\frac{\text{د}}{\text{د س}}$ (س^{٢} + ٢س − ١٥)

= ٢س + ٢

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

مثال ٤ (ب)

مثال ٤

ب) د(س) = $\frac{\text{س}^{٢} + ٢\text{س} - ٤}{\text{س}}$

الحل

$$د(س) = \frac{س^{٢} + ٢س - ٤}{س} \quad \text{(اقسم كل حد في البسط على المقام)}$$

$$د(س) = \frac{س^{٢}}{س} + \frac{٢س}{س} - \frac{٤}{س}$$

$$= س + ٢ - ٤س^{-١}$$

$$\therefore د'(س) = \frac{د}{د\ س}(س + ٢ - ٤س^{-١})$$

$$= ١ + ٠ - ٤ \times (-١)س^{-٢}$$

$$= ١ + ٤س^{-٢} = ١ + \frac{٤}{س^{٢}}$$

خالد كمال
khaled-matir.surge.sh

تمارين ٢-١

١) أوجد المشتقة بالنسبة إلى س:

أ $س^{٥}$	**ب** ٥ س	**ج** $س^{-٤}$
د $\frac{١}{س}$	**هـ** ٨	**و** $\sqrt[٣]{س^{٢}}$

ز $٢س^{٣} \times ٣ س^{٢}$

ح $\frac{١١س^{٥}}{٣س^{٢}}$

تمارين ٢-١ (تابع ١)

٢) أوجد د′(س) لكل ممّا يأتي:

أ $د(س) = ٢س^{٤}$

ب $د(س) = ٣س^{٥}$

ج $د(س) = \frac{١}{٢}س^{٦}$

د $د(س) = \frac{٣}{س}$

هـ $د(س) = \frac{٥}{٣س^{٢}}$

و $د(س) = -٢$

ز $د(س) = \frac{٤س}{\sqrt{س}}$

ح $د(س) = \frac{٢\sqrt{س}}{٣س^{٢}}$

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

تمارين ٢-١ (تابع ٢)

٣) أوجد $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ لكل ممّا يأتي:

أ $\text{ص} = ٥\text{س}^{٢} - \text{س} + ١$

ب $\text{ص} = ٢\text{س}^{٣} + ٨\text{س} - ٤$

ج $\text{ص} = ٧ - ٣\text{س} - ٥\text{س}^{٢}$

د $\text{ص} = (\text{س} + ٥)(\text{س} - ٤)$

هـ $\text{ص} = (٢\text{س}^{٢} - ٣)^{٢}$

و $\text{ص} = \frac{٢\text{س} - ٥}{\text{س}}$

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

تمارين ٢-١ (تابع ٣)

٣) (تابع)

أ $\text{ص} = ٧\text{س}^{٢} - \frac{٣}{\text{س}} + \frac{٢}{\text{س}^{٢}}$

ب $ص = ٣س + \frac{٥}{س} - \frac{١}{\sqrt{٢س}}$

.....

ج $ص = \frac{٤س^{٢} + ٣س - ٢}{\sqrt{س}}$

.....

ورقة الإجابات النموذجية ٢-١

تمرين ١:

أ $٥س^{٤}$

ب ٥

ج $-٤س^{-٥}$

د $-\frac{١}{س^{٢}}$

هـ ٠

و $\frac{٢}{\sqrt[٣]{٣س}}$

ز $٣٠س^{٤}$

ح $١١س^{٢}$

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

ورقة الإجابات النموذجية ٢-١ (تابع)

تمرين ٢:

أ $٨س^{٣}$	ب $١٥س^{٤}$
ج $٣س^{٥}$	د $-\frac{٣}{س^{٢}}$
هـ $-\frac{١٠}{٣س^{٣}}$	و ٠
ز $\frac{٢}{\sqrt{س}}$	ح $-\frac{١}{س\sqrt{س}}$

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

ورقة الإجابات النموذجية ٢-١ (تابع)

تمرين ٣:

أ $١٠س - ١$	ب $٦س^{٢} + ٨$
ج $-٣ - ١٠س$	د $٢س + ١$

هـ $٦اس^{٣} - ٢٤س$

و $٢ + \frac{٥}{س^{٢}}$

ز $٤اس + \frac{٣}{س^{٢}} - \frac{٤}{س^{٣}}$

ح $٣ - \frac{٥}{س^{٢}} + \frac{ا}{٤س\sqrt{س}}$

ط $٦\sqrt{س} + \frac{٣}{٢س\sqrt{س}} + \frac{ا}{س\sqrt{س}}$

ملاحظة: الإجابات من حسابي لأن كتاب الطالب لا يتضمن مفتاح إجابات.

تمرين ا (و): $\sqrt[٣]{س^{٢}} = س^{\frac{٢}{٣}}$ ، ومشتقتها $\frac{٢}{٣} \times س^{-\frac{ا}{٣}}$

خالد كمال
khaled-math-forge.sh

٢-٢ الميل عند نقطة

تعلّمت كيفية إيجاد مشتقة الدالة، وتُعرف مشتقة الدالة أيضًا بدالة الميل.

يمكنك إيجاد الميل عند نقطة على منحنى من خلال تعويض الإحداثي السيني للنقطة في دالة الميل.

نتيجة ٥

لإيجاد الميل عند النقطة س = أ على منحنى ص = د(س) نوجد قيمة د′(أ) أو $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ عند س = أ

استكشاف ٢

استكشاف ٢

تبيّن كل من الجداول أدناه الميل عند خمس نقاط في أربعة تمثيلات مختلفة.
ادرس الجداول ثم زاوج معادلة كل منحنى بواحدة من دوال الميل الآتية:

أ) $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = ٥$

ب) $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = ٣س^{٢}$

ج) $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = -\frac{١}{س^{٢}}$

د) $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = ٤س^{٣}$

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

استكشاف ٢ (١، ٢)

١) للمنحنى الذي معادلته ص = س^{٣}

الإحداثي السيني للنقطة	−١	٠	١	٢	٣
ميل المنحنى	٣	٠	٣	١٢	٢٧

٢) للمنحنى الذي معادلته ص = س^{٤}

الإحداثي السيني للنقطة	−١	٠	١	٢	٣
ميل المنحنى	−٤	٠	٤	٣٢	١٠٨

استكشاف ٢ (٣، ٤)

٣) للمنحنى الذي معادلته ص = ٥س

الإحداثي السيني للنقطة	−١	٠	١	٢	٣
ميل المنحنى	٥	٥	٥	٥	٥

٤) للمنحنى الذي معادلته ص = $\frac{١}{س}$

الإحداثي السيني للنقطة	−٢	−١	١	٢	٣
ميل المنحنى	$-\frac{١}{٤}$	−١	−١	$-\frac{١}{٤}$	$-\frac{١}{٩}$

خالد كمال
khaled-math.sudan.sh

مثال ٥

مثال ٥

إذا كان د(س) = ٨ + ١١س − س^{٢} ، فأوجد:

أ) د′(س)

ب) ميل المنحنى ص = د(س) عند:

١) س = ٤ ٢) س = −٣

حل مثال ٥

الحل

أ) د′(س) = $\frac{\text{د}}{\text{د س}}$ (٨ + ١١س − س^{٢})

أوجد مشتقة كل حدّ ثم اجمع أو اطرح

= ٠ + ١١ − ٢س

= ١١ − ٢س

ب) ١) د′(٤) = ١١ − ٢ × ٤ = ٣

بالتعويض عن س = ٤ في د′(س)

عند س = ٤ ، الميل يساوي ٣

٢) د′(−٣) = ١١ − ٢ × −٣ = ١٧

الحل (تابع)

بالتعويض عن س = −٣ في د′(س)

عند س = −٣ ، الميل يساوي ١٧

مثال ٦

مثال ٦

منحنى معادلته ص = د(س) = ٣س^{٢} + ١٢س − ٧

أوجد إحداثيات النقطة (س ، ص) على المنحنى حيث الميل يساوي الصفر.

حل مثال ٦

الحل

∵ د′(س) = ٠ (عند النقطة (س ، ص) حيث الميل يساوي الصفر)

$$\frac{\text{د}}{\text{د س}}(٣س^{٢} + ١٢س - ٧) = ٠$$

٣ × ٢س + ١٢ − ٠ = ٠

٦س + ١٢ = ٠

س = −٢

الحل (تابع)

القيمة س = −٢ هي الإحداثي السيني للنقطة (س ، ص) حيث الميل يساوي الصفر

حل مثال ٦ (تابع)

الحل

عوّض س = −٢ في معادلة المنحنى ص = د(س) لإيجاد الإحداثي الصادي للنقطة

ص = ٣س^{٢} + ١٢س − ٧

= ٣(−٢)^{٢} + ١٢(−٢) − ٧

= ١٢ − ٢٤ − ٧

= −١٩

ميل المنحنى يساوي الصفر عند (−٢ ، −١٩)

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

تمارين ٢-٢

١) أوجد ميل المنحنيات ص = د(س) الآتية عند قيم س المعطاة:

أ) د(س) = ٢س^{٢} − س + ٢ عند س = ٢

ب د(س) = ١٠اس − ٢س^{٢} عند س = ٣

ج د(س) = $\frac{١}{٢}$س^{٢} − ٥س + ١ عند س = ٣

د د(س) = ٣س^{٣} − ٤س^{٢} + س عند س = ٠

تمارين ٢-٢ (تابع ١)

١) (تابع) أوجد ميل المنحنيات ص = د(س) الآتية عند قيم س المعطاة:

هـ د(س) = ١١اس + ٢س^{٣} − ٥ عند س = −٢

و د(س) = ٧س − $\frac{١٢}{\text{س}}$ عند س = ٢

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

ز $د(س) = ٥س^{٩} - ٤٠س - ٧$ عند $س = ١$

ح $د(س) = \frac{١٦}{\sqrt{س}} + \frac{س}{٣}$ عند $س = ٩$

تمارين ٢-٢ (تابع ٢)

٢) أوجد الإحداثيات السينية والصادية للنقطة على منحنى:

أ $ص = ٨س - س^{٢}$ حيث الميل يساوي -٢

ب $ص = ٢س^{٢} + ٥س - ٣$ حيث الميل يساوي ٩

ج $ص = ٦س^{٢} - ٤س + ٧$ حيث الميل يساوي ٢٠

خالد كمال
khaled-mathsurge.sh

تمارين ٢-٢ (تابع ٣)

٢) (تابع) أوجد الإحداثيات السينية والصادية للنقطة على منحنى:

د ص = ١٠ − ٣٢س − ٤س^{٢} حيث الميل يساوي ٠

هـ ص = ١٩ − ٣٦$\sqrt{\text{س}}$ حيث الميل يساوي −٩

و ص = (٣س − ٢)(٢س − ٣) حيث الميل يساوي −٢

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

تمارين ٢-٢ (٣، ٤)

٣) لمنحنى د(س) = أس^{٣} − ٣س^{٢} + ٤ ميل يساوي ٠ عند النقطة حيث س = ٣ ، أوجد قيمة أ

٤) لمنحنى ص = −٢س + ٤س^{٢} − ب س^{٣} ميل يساوي ٢٠ عند النقطة حيث س = ٢ ، أوجد قيمة ب

تمرين ٢-٢ (٥)

٥) ميل منحنى معادلته د(س) = $\frac{٢}{٣}$ س^{٣} − $\frac{٣}{٢}$ س^{٢} − ١٩اس يساوي ١ عند نقطتَين:

أ) بيّن أن الإحداثي السيني لإحدى النقطتَين يساوي ٤

ب) أوجد الإحداثي السيني للنقطة الأخرى حيث الميل يساوي ١

ورقة الإجابات النموذجية ٢-٢

تمرين ١:

أ ٧	ب −٢	ج −٢
د ١	هـ ٣٥	و ١٠
ز ٥	ح $\frac{١}{٢٧}$	

تمرين ٢ (س ، ص):

أ (٥ ، ١٥)	ب (١ ، ٤)	ج (٢ ، ٢٣)
د (−٤ ، ٧٤)	هـ (٤ ، −٥٣)	

و $\left(\frac{١١}{١٢}\ ،\ -\frac{٧}{٨}\right)$

تمرين ٣: أ = $\frac{٢}{٣}$ | **تمرين ٤:** ب = $-\frac{١}{٢}$ | **تمرين ٥ (ب):** س = $-\frac{٥}{٢}$

ملاحظة: الإجابات من حسابي لأن كتاب الطالب لا يتضمن مفتاح إجابات.

استكشاف ٢ (المزاوجة): ١ ← ب ، ٢ ← د ، ٣ ← أ ، ٤ ← جـ

٣-٢ معادلة المماس

الميل عند نقطة على المنحنى يساوي ميل المماس عند تلك النقطة.

إذًا، إذا كنا نعرف ميل المماس، فيمكننا أن نجد أيضًا معادلته في الصيغة ص = م س + جـ، حيث (م) الميل، جـ المقطع الصادي.

خالد كمال
khaled-math.stars.sh

وبذلك تكون صيغة معادلة المماس للمنحنى عند النقطة (س١ ، ص١) هي ص = م س + جـ، م = د′(س١)، جـ = ص١ − م س١، حيث (س١ ، ص١) تمثل إحداثيات نقطة التماس.

نتيجة ٦

نتيجة ٦

للمنحنى ص = د(س)، إذا كانت قيمة $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ هي الميل (م) عند النقطة (س١ ، ص١)، فإن معادلة مماس المنحنى عند تلك النقطة تعطى من خلال إحدى الصيغ التالية:

- ص = م س + جـ، حيث م = د′(س١)، جـ = ص١ − م س١
- ص − ص١ = م (س − س١)

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

مثال ٧

مثال ٧

د(س) = ٤س^{٣} − ٩س^{٢} + ٣س معادلة منحنى، أوجد:

أ) د′(س)

ب) ميل المنحنى عند س = ١

ج) معادلة مماس المنحنى د(س) = ٤س^{٣} − ٩س^{٢} + ٣س عند س = ١

حل مثال ٧ (أ، ب)

الحل

أ) د′(س) = $\frac{\text{د}}{\text{د س}}$ (٤س^{٣} − ٩س^{٢} + ٣س)

أوجد المشتقة بالنسبة إلى س لإيجاد دالة الميل

= ٤ × ٣س^{٢} − ٩ × ٢س + ٣

= ١٢س^{٢} − ١٨س + ٣

ب) د′(١) = ١٢ × (١)^{٢} − ١٨ × ١ + ٣ = ١٢ − ١٨ + ٣ = −٣

بالتعويض عن س = ١ في دالة الميل

∴ عند س = ١، الميل يساوي −٣

خالد كمال
khaled-math.surgesh

حل مثال ٧ (ج)

الحل

ج) ص = ٤(١)^{٣} − ٩(١)^{٢} + ٣ × ١ = −٢

بالتعويض عن س = ١ في معادلة المنحنى لإيجاد الإحداثي الصادي للنقطة

ميل المماس يساوي −٣ ويمر بالنقطة (١ ، −٢)

ص = −٣س + جـ

جـ = ص − (−٣س) = ص + ٣س = −٢ + ٣ × ١ = ١

معادلة المماس: ص = −٣س + ١ أو ص = ١ − ٣س

مثال ٨

مثال ٨

رُسم مماس على المنحنى د(س) = س^{٢} − ٤س − ٥ عند النقطة (٠ ، −٥).

أوجد معادلة هذا المماس.

حل مثال ٨

الحل

د′(س) = $\frac{\text{د}}{\text{د س}}$ (س^{٢} − ٤س − ٥) = ٢س − ٤

أوجد مشتقة ص بالنسبة إلى س لإيجاد دالة الميل

د′(٠) = ٢ × ٠ − ٤ = −٤

بالتعويض عن س = ٠ في دالة الميل

∴ عند س = ٠، الميل يساوي −٤

المماس يمر بالنقطة (٠ ، −٥) إذًا جـ = −٥

معادلة المماس: ص = −٤س − ٥

ملاحظة الكتاب: إذا كان المماس يمر بالنقطة (٠ ، ص) فإن الجزء المقطوع من محور الصادات (جـ) يساوي قيمة الإحداثي الصادي.

مثال ٩

مثال ٩

د(س) = ٨ − $\frac{٨}{\text{س}}$ معادلة منحنى، أوجد:

أ) قيمة ب، إذا كانت النقطة ($\frac{١}{٢}$ ، ب) تقع على المنحنى.

ب) دالة الميل للمنحنى.

ج) معادلة مماس المنحنى عند النقطة حيث س = $\frac{١}{٢}$

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

حل مثال ٩ (أ، ب)

الحل

أ) ص = ٨ − $\frac{٨}{\text{س}}$

ب = ٨ − ٨ ÷ $\frac{١}{٢}$ = ٨ − ١٦ = −٨

عوّض س = ½ في معادلة المنحنى

ب) د′(س) = $\frac{\text{د}}{\text{د س}}$(٨ − $\frac{٨}{\text{س}}$) = $\frac{\text{د}}{\text{د س}}$(٨ − ٨س$^{-١}$)

= ٠ − ٨ × (−١)س$^{-٢}$

الحل (تابع)

$$= \frac{٨}{س^{٢}}$$

أوجد مشتقة كل حدّ واستخدم قانوني الجمع أو الطرح

حل مثال ٩ (ج)

الحل

ج) د′$(\frac{١}{٢})$ = $\frac{٨}{(\frac{١}{٢})^{٢}}$ = ٣٢

بالتعويض عن س = ½ في صيغة د′(س)

ميل المماس يساوي ٣٢ ويمر بالنقطة $(\frac{١}{٢}$ ، −٨)

ص = ٣٢س + جـ

جـ = ص − ٣٢س = −٨ − ٣٢ × $\frac{١}{٢}$ = −٢٤

معادلة المماس: ص = ٣٢س − ٢٤

تمارين ٢-٣

ا) رُسم مماس على منحنى معادلته ص = س^{٢} عند النقطة (٢ ، ٤)، أوجد:

أ د′(س)

ب ميل المماس

ج معادلة هذا المماس في الصيغة ص = م س + جـ

تمارين ٢-٣ (٢)

٢) رُسم مماس على منحنى معادلته ص = ٦ + ٨س − ٢س^{٢} عند النقطة (٠ ، ٦)، أوجد:

أ د′(س)

ب ميل المماس

ج معادلة هذا المماس في الصيغة ص = م س + جـ

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

تمارين ٢-٣ (٣)

٣) أوجد معادلة المماس للمنحنيات الآتية عند النقاط المعطاة:

أ د(س) = $س^{٣}$ + ٧ عند النقطة على المنحنى حيث س = ١

ب د(س) = $\frac{١}{٢}س^{٢}$ + س − ٢ عند النقطة على المنحنى حيث س = ٢

ج د(س) = ٢٠ − ٢س − $س^{٢}$ عند النقطة على المنحنى حيث س = ٠

خالد كمال
khaled-math.stage.sh

تمارين ٢-٣ (٣ تابع)

٣) (تابع) أوجد معادلة المماس للمنحنيات الآتية عند النقاط المعطاة:

د د(س) = $س^{٤}$ − ٣س عند النقطة على المنحنى حيث س = ١

هـ د(س) = $\frac{١}{س}$ + س عند النقطة على المنحنى حيث س = −١

.....

و د(س) = (٢س + ٣)(س − ٦)

عند النقطة على المنحنى حيث س = ٥

.....

تمارين ٢-٣ (٤، ٥)

٤) بيّن أن الميل على المنحنى ص = س^{٢} + ٩ يساوي الميل على المنحنى ص = س^{٢} − ٩ لكل قيم س

٥) رُسم مماس على المنحنى ص = س^{٢} − ١٢س + ٤٣ عند النقطة (٥ ، ٨).

أ) بيّن أن ميل المماس يساوي −٢

ب) أوجد إحداثيات النقطة التي يقطع هذا المماس عندها المحور السيني.

تمارين ٢-٣ (٦)

٦) رُسم مماسان على المنحنى ص = س^{٢} − ٣س + ٨ عند النقطتَين حيث س = ١ ، س = ٢

يبيّن الرسم الآتي أجزاء من المنحنى والمماسَين. أوجد معادلة كل من المماسَين.

الرسم في كتاب الطالب صفحة ٦٠ (منحنى أحمر ومماسان متقاطعان).

تمارين ٢-٣ (٧)

٧) يمكن حساب المسافة التي قطعها جزيء انطلاقًا من نقطة البداية ص متر، من خلال الصيغة ص = ٣س − ٠٫٠٠١س^{٢}، حيث س يمثل الزمن بالثواني.

أ) كم يبعد الجزيء عن نقطة البداية بعد ١٠ ثوانٍ؟

ب) تعبّر دالة الميل ($\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$) عن سرعة الجزيء عند أية نقطة خلال رحلته، أوجد:

ا) سرعة الجزيء. ٢) سرعة الجزيء بعد ٢٠ ثانية.

مساعدة (الكتاب): السرعة هي قياس التغير في المسافة (ص) لكل وحدة من الزمن (س)، لذا فإن السرعة تساوي مشتقة المسافة.

ورقة الإجابات النموذجية ٢-٣

تمرين ١: أ) ٢س | ب) ٤ | ج) ص = ٤س − ٤

تمرين ٢: أ) ٨ − ٤س | ب) ٨ | ج) ص = ٨س + ٦

تمرين ٣: أ) ص = ٣س + ٥ | ب) ص = ٣س − ٤ | ج) ص = −٢س + ٢٠

د) ص = س − ٣ | هـ) ص = −٢ | و) ص = ااس − ٦٨

تمرين ٤: مشتقة كل منهما ٢س (الثابت ٩ أو −٩ مشتقته صفر)

تمرين ٥: أ) د′(٥) = ٢×٥ − ١٢ = −٢ | ب) ص = −٢س + ١٨ ، تقطع المحور السيني عند (٩ ، ٠)

تمرين ٦: عند س = ١: ص = −س + ٧ | عند س = ٢: ص = س + ٤

تمرين ٧: أ) ٢٩٫٩ م | ب) السرعة = ٣ − ٠٫٠٠٢س | ٢) ٢٫٩٦ م/ث

ملاحظة: الإجابات من حسابي لأن كتاب الطالب لا يتضمن مفتاح إجابات.

٢-٤ المشتقة الثانية

عند إيجاد مشتقة ص بالنسبة إلى س، نحصل على $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$

تسمى $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ **المشتقة الأولى (first derivative)** لـ ص بالنسبة إلى س

وإذا أوجدنا مشتقة $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ بالنسبة إلى س، نحصل على $\frac{\text{د}}{\text{د س}}\left(\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}\right)$، والتي نكتبها عادة على الشكل $\frac{\text{د}^{٢}\text{ ص}}{\text{د س}^{٢}}$

رموز المشتقة الثانية

وباستخدام ترميز الدوال يكون رمز المشتقة الأولى هو د′(س) والمشتقة الثانية هو د″(س)

تسمى كل من $\frac{د^٢ ص}{د س^٢}$ ، د″(س) **المشتقة الثانية (second derivative)** لـ ص بالنسبة إلى س

مثال على المشتقتين

فمثلًا ص = $س^٣ + ٥س^٢ - ٣س + ٢$ أو د(س) = $س^٣ + ٥س^٢ - ٣س + ٢$

$\frac{د ص}{د س} = ٣س^٢ + ١٠س - ٣$ أو د′(س) = $٣س^٢ + ١٠س - ٣$

$\frac{د^٢ ص}{د س^٢} = ٦س + ١٠$ أو د″(س) = $٦س + ١٠$

مثال ١٠

مثال ١٠

إذا كانت ص = د(س) = $٢س^٣ - \frac{١}{٢} س^٢ + ٧س - ١١$

أ) أوجد د′(س)

ب) أوجد د″(س)

ج) عند س = −١:

١) أوجد قيمة المشتقة الأولى.

٢) حدّد ما إذا كانت قيمة المشتقة الثانية موجبة أو سالبة.

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

حل مثال ١٠ (أ، ب)

الحل

أ) د′(س) = $\frac{\text{د}}{\text{د س}}$ (٢س^{٣} − $\frac{١}{٢}$ س^{٢} + ٧س − ١١)

أوجد مشتقة ص بالنسبة إلى س

= ٢ × ٣س^{٢} − ½ × ٢س + ٧ − ٠

= ٦س^{٢} − س + ٧

ب) د″(س) = $\frac{\text{د}^{٢}\text{ ص}}{\text{د س}^{٢}}$ = $\frac{\text{د}}{\text{د س}}$ (٦س^{٢} − س + ٧)

أوجد مشتقة د′(س) بالنسبة إلى س

= ١٢س − ١

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

حل مثال ١٠ (ج)

الحل

ج) ١) د′(−١) = ٦(−١)^{٢} − (−١) + ٧ = ٦ + ١ + ٧ = ١٤

عوّض س = −١ في المشتقة الأولى

٢) د″(−١) = ١٢(−١) − ١ = −١٣

عوّض س = −١ في المشتقة الثانية

قيمة المشتقة الثانية سالبة عند س = −١

مثال ١١

مثال ١١

أوجد قيمة س التي تجعل المشتقة الثانية للدالة د(س) = ٧س^{٣} + ٢س^{٢} − ٥س + ١ تساوي ١١

حل مثال ١١

الحل

د(س) = ٧س^{٣} + ٢س^{٢} − ٥س + ١

د′(س) = ٢١س^{٢} + ٤س − ٥

أوجد مشتقة د(س) لإيجاد المشتقة الأولى

د″(س) = ٤٢س + ٤

أوجد مشتقة د′(س) لإيجاد المشتقة الثانية

٤٢س + ٤ = ١١ (المشتقة الثانية تساوي ١١)

$$س = \frac{١١ - ٤}{٤٢} = \frac{١}{٦}$$

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

تمارين ٢-٤

١) أوجد المشتقة الثانية لكل ممّا يأتي:

أ $ص = ٤س^{٣} - ٣س^{٢} - ٩س + ٦$

ب $ص = \frac{٢}{٣}س^{٣} + \frac{٥}{٢}س^{٢} - ١٥$

ج $ص = ٢٠ - ٧س + ٣س^{٢} - ٨س^{٣}$

د $ص = ٢س^{٢} + ٧س - ٣$

تمارين ٢-٤ (تابع ١)

١) (تابع) أوجد المشتقة الثانية لكل ممّا يأتي:

هـ $د(س) = \frac{٥}{٦}س^{٣} + ١٧س$

و $د(س) = ١ - \frac{٣}{٨}س^{٤} + س^{٥}$

ز $د(س) = \frac{١٠}{س}$

ح $د(س) = (٣س^{٢} - ٢س + ٦)(س + ٤)$

تمارين ٢-٤ (٢)

٢) إذا كان $د(س) = س^{٣} + ٢س^{٢} + ٣س + ٤$ ، فأوجد قيمة:

أ $د(٢)$

ب $د'(٢)$

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

ج د″(٢)

.....

تمارين ٢-٤ (٣)

٣) أوجد قيمة س التي تجعل المشتقة الثانية للدالة:

أ) د(س) = ٨س^{٣} + ٥س^{٢} − ١٢س + ٢ تساوي ٢٦

ب) د(س) = $\frac{٣}{٤}$ س^{٣} + ٨س^{٢} تساوي ١٠

ج) د(س) = ٦س^{٣} − ٣س^{٢} + س مساوية للمشتقة الثانية للدالة ف(س) = ٢س + ٨س^{٢} − ٤س^{٣}

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

تمارين ٢-٤ (٤، ٥)

٤) قيمة المشتقة الثانية للدالة ص = ٧س^{٣} − أ س^{٢} + ٥ س تساوي ٤ عند س = ٢ ، أوجد قيمة الثابت أ

٥) قيمة المشتقة الثانية للدالة د(س) = ٣٠ − ٢س + ٣س^{٢} − س^{٣} تساوي ٨ عند س = أ ، أوجد:

أ) قيمة الثابت أ

ب) ميل المنحنى د(س) = ٣٠ − ٢س + ٣س^{٢} − س^{٣} عند النقطة حيث س = أ٣

تمارين ٢-٤ (٦)

٦) يمكن حساب المسافة التي قطعها جزيء انطلاقًا من نقطة البداية ص متر، من خلال الصيغة ص = ٢س + ١٥س^{٢} − $\frac{٢}{٣}$ س^{٣}، حيث س يمثل الزمن بالثواني.

أ) كم يبعد الجزيء عن نقطة البداية بعد ٣ ثوانٍ؟

ب) تعطي المشتقة الثانية ($\frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}}$) صيغة لتسارع الجزيء عند أية نقطة خلال رحلته، أوجد:

ا) تسارع الجزيء. ٢) تسارع الجزيء بعد ٥ ثوانٍ.

مساعدة (الكتاب): التسارع يساوي المشتقة الأولى للسرعة، أي أنه يساوي المشتقة الثانية للمسافة.

ورقة الإجابات النموذجية ٢-٤

تمرين ١: أ) ٢٤س − ٦ | ب) ٤س + ٥ | ج) ٦ − ٤٨س | د) ٤

هـ) ٥س | و) − $\frac{٩}{٢}$ س^{٢} + ٢٠س^{٣} | ز) $\frac{٢٠}{س^{٣}}$ | ح) ١٨س + ٢٠

تمرين ٢: أ) ٢٦ | ب) ٢٣ | ج) ١٦

تمرين ٣: أ) س = $\frac{١}{٣}$ | ب) س = − $\frac{٤}{٣}$ | ج) س = $\frac{١١}{٣٠}$

تمرين ٤: أ = ٤٠ | **تمرين ٥:** أ) أ = $-\frac{١}{٣}$ | ب) −١١

تمرين ٦: أ) ١٢٣ م | ب) ا) ٣٠ − ٤س | ٢) ١٠ م/ث^{٢}

ملاحظة: الإجابات من حسابي لأن كتاب الطالب لا يتضمن مفتاح إجابات.

٢-٥ الدوال المتزايدة والمتناقصة

استكشاف ٣

ا) يبيّن التمثيل الآتي منحنى ص = د(س). أكمل العبارات الآتية عن ص = د(س) في المجال المبيّن في المخطط:

كلما تزايدت قيمة س، ..... قيمة ص

إشارة الميل عند أي نقطة هي دائمًا .....

هل الدالة متزايدة أم متناقصة؟

الرسم في كتاب الطالب صفحة ٦٤ (منحنى يصعد من اليسار إلى اليمين).

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

استكشاف ٣ (٢)

استكشاف ٣

٢) يبيّن التمثيل الآتي منحنى ص = ف(س). أكمل العبارات الآتية عن ص = ف(س) في المجال المبيّن في المخطط:

كلما تزايدت قيمة س، ..... قيمة ص

إشارة الميل عند أي نقطة هي دائمًا .....

هل هذا النوع من الدوال هو دوال متزايدة أم متناقصة؟

الرسم في كتاب الطالب صفحة ٦٤ (منحنى يهبط من اليسار إلى اليمين).

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

استكشاف ٣ (٣)

استكشاف ٣

٣) خذ الآن منحنيَي الدالتَين د(س) = س^{٢} ، هـ(س) = −س^{٢} ، وهما مرسومان في المخطط (كتاب الطالب صفحة ٦٥). أكمل العبارات الآتية:

أ) د(س) = س^{٢} متزايدة في الفترة .....

ب) د(س) = س^{٢} متناقصة في الفترة .....

استكشاف ٣ (تابع)

ج) هـ(س) = −س^{٢} متزايدة في الفترة .....

د) هـ(س) = −س^{٢} متناقصة في الفترة .....

الدالة المتزايدة والمتناقصة

من خلال استكشاف ٣، تكون الدالة د(س) **متزايدة** إذا تزايدت قيم د(س) كلما تزايدت قيم س، إذا كان د(س$_{١}$) < د(س$_{٢}$) لكل س$_{١}$ < س$_{٢}$

بطريقة مماثلة، تكون الدالة د(س) **متناقصة** إذا تناقصت قيم د(س) كلما تزايدت قيم س، إذا كان د(س$_{١}$) > د(س$_{٢}$) لكل س$_{١}$ < س$_{٢}$

الدالة عند نقطة

كما يمكننا دراسة تزايد دالة عند نقطة، ونعني بذلك أن قيم الدالة متزايدة **حول** هذه النقطة.

إذا كان ميل الدالة موجبًا عند نقطة ما تكون الدالة متزايدة عند تلك النقطة.

بالطريقة نفسها تكون دالة متناقصة عند نقطة ما، **إذا كان ميل الدالة سالبًا عند تلك النقطة.**

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

قسما التمثيل البياني

يمكننا تقسيم التمثيل البياني إلى قسمَين مختلفَين:

- تتزايد د(س) عندما س < أ ، أي أن د′(س) > ٠
- تتناقص د(س) عندما س > أ ، أي أن د′(س) < ٠

أي أن:

- تتزايد د(س) عند س = ل إذا كان د′(ل) > ٠
- تتناقص د(س) عند س = م إذا كان د′(م) < ٠

أما النقطة التي يلتقي عندها القسمان (س = أ) فيكون ميل المنحنى عندها صفرًا، أي د′(أ) = ٠

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

نتيجة ٧

نتيجة ٧

تكون الدالة ص = د(س) في الفترة المعطاة لـ س:

- متزايدة إذا كان د′(س) = $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ > ٠ على كامل الفترة.
- متناقصة إذا كان د′(س) = $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ < ٠ على كامل الفترة.

مثال ١٢

مثال ١٢

بيّن أن د(س) = س^{٢} − ٦س + ١١ :

أ) متناقصة عند س = ١

ب) متزايدة في الفترة ٤ ≥ س ≥ ١٠

حل مثال ١٢

الحل

د(س) = س^{٢} − ٦س + ١١

د′(س) = ٢س − ٦ (أوجد المشتقة)

أ) د′(١) = ٢ × ١ − ٦ = −٤ (عوّض س = ١ في المشتقة)

∵ د′(١) < ٠ (اكتب ما تعنيه نتيجتك)

∴ د(س) = س^{٢} − ٦س + ١١ متناقصة عند س = ١

حل مثال ١٢ (ب)

الحل

ب) د′(س) = ٢س − ٦

الحل (تابع)

د′(٤) = ٢ × ٤ − ٦ = ٢ (عوّض س = ٤ ، س = ١٠ في المشتقة)

د′(١٠) = ٢ × ١٠ − ٦ = ١٤

∴ د′(٤) > ٠ ، د′(١٠) > ٠

∴ تكون الدالة د(س) في الفترة ٤ ≤ س ≤ ١٠ متزايدة

إيجاد الإحداثي الصادي لنقطتَي النهاية للفترة يؤكد كذلك أن الدالة متزايدة:

د(٤) = (٤)^{٢} − ٦ × ٤ + ١١ = ٣ ، د(١٠) = (١٠)^{٢} − ٦ × ١٠ + ١١ = ٥١

مثال ١٣

مثال ١٣

أوجد مجموعة قيم س التي تجعل الدالة د(س) = ٢١ + ٤س − س^{٢} :

أ) متناقصة.

ب) متزايدة.

حل مثال ١٣

الحل

د(س) = ٢١ + ٤س − س^{٢}

د′(س) = ٤ − ٢س (أوجد المشتقة)

الحل (تابع)

أ) تتناقص د(س) عندما د′(س) < ٠

٤ − ٢س < ٠

−٢س < −٤

س > ٢

د(س) = ٢١ + ٤س − س^{٢} متناقصة عندما س > ٢

ب) تتزايد د(س) عندما د′(س) > ٠

٤ − ٢س > ٠

س < ٢

د(س) = ٢١ + ٤س − س^{٢} متزايدة عندما س < ٢

مساعدة (الكتاب): تذكر أنه يجب عكس إشارة التباين عند ضرب أو قسمة طرفَي المتباينة بعدد سالب.

خالد كمال
khaled-math.surge.sa

تمارين ٢-٥

١) حدد ما إذا كانت كل من الدوال الآتية متزايدة أو متناقصة عند النقطة أو الفترة المعطاة:

أ ص = س^{٢} − ٦س عند س = ٤

ب ص = س^{٢} − ٨س + ١٠ عند س = ٣

جـ ص = ٦ − س − س^{٢} عند س = ١

د د(س) = ٢س^{٢} + ٥س + ١ عند س = −١

تمارين ٢-٥ (تابع ١)

١) (تابع) حدد ما إذا كانت كل من الدوال الآتية متزايدة أو متناقصة عند النقطة أو الفترة المعطاة:

هـ د(س) = $\frac{١}{٢}$س^{٢} − ٣س + ١٧ عند س = $-\frac{١}{٢}$

و د(س) = (٥ − ٢س)(٨ + س) عند س = $-\frac{٥}{٢}$

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

ز د(س) = ٣س^{٢} − ١٤س + ٩ في الفترة ٣ ≥ س ≥ ٩

ح د(س) = ٥ − ١٥س − ٣س^{٢} في الفترة −١ ≥ س ≥ ٢

تمارين ٢-٥ (٢)

٢) أوجد مجموعة قيم س التي تجعل الدالة:

أ) د(س) = س^{٢} + ١٠س − ١٢ متناقصة.

ب) د(س) = ٥س^{٢} − ١١س + ٣ متزايدة.

ج) د(س) = $\frac{٣}{٤}$ س^{٢} + $\frac{١}{٢}$ س − ٥ متزايدة.

تمارين ٢-٥ (٢ تابع)

٢) (تابع) أوجد مجموعة قيم س التي تجعل الدالة:

د) د(س) = ٨ − ٢س − $\frac{٦}{٥}$ س^{٢} متناقصة.

هـ) د(س) = ١ − ١٤س − $\frac{٧}{٢}$ س^{٢} متزايدة.

فالد كمال
khaled-math.surge.sh

و) د(س) = (٢س − ٥)(٣س + ٤) متناقصة.

تمارين ٢-٥ (٣، ٤)

٣) تنتج شركة تصنيع س سلعة في اليوم. يمكن كتابة دالة الربح ل(س) من خلال الصيغة ل(س) = ٠٫٠٠٤س^{٢} − ٠٫٦س ، أوجد قيم س التي تجعل الربح متزايدًا.

٤) بيّن أن الدالة د(س) = س − ٨ − س^{٢} متناقصة في الفترة ١ ≤ س ≤ ٦

ورقة الإجابات النموذجية ٢-٥

تمرين ١: أ) متزايدة (د′(٤) = ٢) | ب) متناقصة (−٢) | ج) متناقصة (−٣) | د) متزايدة (١)

هـ) متزايدة (٣,٥) | و) متناقصة (−١) | ز) متزايدة (د′ = ٦س − ١٤ موجبة على الفترة) | ح) متناقصة (د′ = −١٥ − ٦س سالبة على الفترة)

تمرين ٢: أ) س > −٥ | ب) س > $\frac{١١}{١٠}$ | ج) س > −$\frac{١}{٣}$

د) س > −$\frac{٥}{٦}$ | هـ) س > −٢ | و) س < $\frac{٧}{١٢}$

تمرين ٣: ل′(س) = ٠٫٠٠٨س − ٠٫٦ > ٠ ، إذًا س < ٧٥

تمرين ٤: د′(س) = ١ − ٢س ، وهي سالبة لكل س ≥ ١ ، إذًا الدالة متناقصة في الفترة

ملاحظة: الإجابات من حسابي لأن كتاب الطالب لا يتضمن مفتاح إجابات.

تمارين مراجعة نهاية الوحدة الثانية (١-٤)

١) أوجد ميل المنحنى ص = د(س) = −٤س^{٢} − ١٨ − ١١س عند النقطة حيث س = −٢

٢) أوجد الإحداثيات السينية والصادية للنقطة على منحنى ص = د(س) = ٩س − س^{٢} حيث الميل يساوي ١

٣) لمنحنى ص = د(س) = أس^{٣} + ٥س^{٢} + ٢س − ١ ميل يساوي ٧ عند النقطة حيث س = −١ أوجد قيمة الثابت أ

٤) أوجد معادلة المماس لمنحنى ص = د(س) = ٨ + ٢س − ٧س^{٢} عند النقطة (٢ ، −١٦)

تمارين مراجعة نهاية الوحدة الثانية (٥-٨)

٥) أوجد قيمة المشتقة الثانية للدالة د(س) = ١٢س − س^{٦} − ٥س^{٣} عند س = −١

٦) أوجد قيمة س التي تجعل المشتقة الثانية للدالة د(س) = ٣س^{٣} − س^{٢} + ٩س + ٤ تساوي ٧

٧) حدد ما إذا كانت الدالة د(س) = ٧ − ٣س − ٢س^{٢} متزايدة أو متناقصة عند س = −١

٨) أوجد مجموعة قيم س التي تجعل الدالة د(س) = ١١ − $\frac{٩}{٢}$ س − $\frac{٥}{٢}$ س^{٢} متناقصة.

ورقة الإجابات النموذجية (المراجعة)

١) د′(س) = −٨س − ١١ ، د′(−٢) = ١٦ − ١١ = ٥

٢) د′(س) = ٩ − ٢س = ١ ، س = ٤ ، ص = ٣٦ − ١٦ = ٢٠ ، النقطة (٤ ، ٢٠)

٣) د′(س) = ٣أس^{٢} + ١٠س + ٢ ، د′(−١) = ٣أ − ١٠ + ٢ = ٧ ، أ = ٥

٤) د′(س) = ٢ − ١٤س ، د′(٢) = −٢٦ ، ص + ١٦ = −٢٦(س − ٢) ، ص = −٢٦س + ٣٦

٥) د′(س) = ١٢ − ٦س^{٥} − ١٥س^{٢} ، د″(س) = −٣٠س^{٤} − ٣٠س ، د″(−١) = −٣٠ + ٣٠ = ٠

٦) د″(س) = ١٨س − ٢ = ٧ ، س = $\frac{١}{٢}$

٧) د′(س) = −٣ − ٤س ، د′(−١) = ١ وهي موجبة ، إذًا الدالة متزايدة

٨) د′(س) = − $\frac{٩}{٢}$ − ٥س > ٠ ، إذًا س < − $\frac{٩}{١٠}$

ملاحظة: الإجابات من حسابي لأن كتاب الطالب لا يتضمن مفتاح إجابات. في تمرين ١ قرأت الدالة −٤س^{٢} − ١٨ − ١١س كما هي مطبوعة (١٨ ثابت).

خالد كمال
khaled-math.sure.sh