١-١ الدالة الأسّية الطبيعية

الأساس الطبيعي (هـ)

تعلّمت سابقًا الصيغة الأسّية $أ^{س}$ حيث يسمى أ بالأساس، وتسمى س بالأس (القوة).
بالتعويض في الصيغة الأسّية $أ^{س}$ عن قيمة أ بعدد أويلر (هـ) والذي يمثل القيمة التقريبية ٢,٧١٨٢٨، ينتج ما يسمى بالصيغة الأسّية الطبيعية وهي $هـ^{س}$، ويسمى العدد هـ بالأساس الطبيعي.

الصيغة الأسّية: $أ^{س}$ ← الصيغة الأسّية الطبيعية: $هـ^{س}$
الأساس: أ ← هـ ، الأس (القوة): س

لإيجاد قيمة $هـ^{٢}$ نستخدم الحاسبة بالضغط على المفاتيح: [e^x] [٢] [=]
فنحصل على الناتج ٧,٤ مقربًا إلى أقرب منزلة عشرية واحدة.

نتيجة ١

يمكن تطبيق قوانين القوى التي تعلمتها سابقًا على الأساس الطبيعي هـ.

نتيجة ١:

$هـ^{م} \times هـ^{ن} = هـ^{م + ن}$

$هـ^{م} \div هـ^{ن} = هـ^{م - ن}$

مثال ١

مثال ١

اكتب كلًّا من العبارات الآتية في أبسط صيغة أسّية:

أ $هـ^{٧} \times هـ^{٤}$

.....

ب $هـ^{٧} \div هـ^{٤}$

.....

ج $هـ^{١٩} \times هـ^{-٦}$

.....

د $هـ^{١٣} \div هـ^{-٢}$

.....

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

حل مثال ١

الحل

أ) $هـ^{٧} \times هـ^{٤} = هـ^{٧ + ٤} = هـ^{١١}$

ب) $هـ^{٧} \div هـ^{٤} = هـ^{٧ - ٤} = هـ^{٣}$

ج) $هـ^{١٩} \times هـ^{-٦} = هـ^{١٩ + (-٦)} = هـ^{١٣}$

د) $هـ^{١٣} \div هـ^{-٢} = هـ^{١٣ - (-٢)} = هـ^{١٥}$

مثال ٢

مثال ٢

هـ^{٣} = ٢٠ ، هـ^{٦} = ٤٠٣ ، هـ^{٨} = ٢٩٨١ (مقرّبة إلى أقرب عدد صحيح)

استخدم هذه القيم لإيجاد قيم المقادير الآتية، مقرّبًا الناتج إلى أقرب عدد صحيح:

أ هـ^{١١}	ب هـ^{٥}	ج هـ^{٩}

حل مثال ٢

الحل

أ) هـ^{١١} = هـ$^{٣ + ٨}$ = هـ^{٣} × هـ^{٨} = ٢٠ × ٢٩٨١ = ٥٩٦٢٠

ب) هـ^{٥} = هـ$^{٨ - ٣}$ = هـ^{٨} ÷ هـ^{٣} = ٢٩٨١ ÷ ٢٠ = ١٤٩

ج) هـ^{٩} = هـ$^{٣ + ٦}$ = هـ^{٣} × هـ^{٦} = ٢٠ × ٤٠٣ = ٨٠٦٠

مثال ٣

مثال ٣

استخدم الحاسبة لإيجاد القيم الآتية، مقرّبة إلى أقرب ثلاث منازل عشرية.

أ هـ^{٣,٧}	ب هـ$^{-١}$	ج هـ$^{-٢,٥}$

د $\frac{١٢}{\sqrt{هـ}}$	هـ $\sqrt[٣]{هـ}$

نصيحة: يمكن جعل العدد سالبًا بالضغط على مفتاح [+/−]. وبعض الحاسبات تستخدم [−] أو [(−)].

حل مثال ٣

الحل

أ) $هـ^{٣,٧} = ٤٠,٤٤٧$

ب) $هـ^{-١} = ٠,٣٦٨$

ج) $هـ^{-٢,٥} = ٠,٠٨٢$

د) $\frac{١٢}{\sqrt{هـ}} = ٧,٢٧٨$

هـ) $\sqrt[٣]{هـ} = ١,٣٩٦$ (أو $هـ^{\frac{١}{٣}}$)

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

الدالة الأسّية الطبيعية

الدالة الأسّية الطبيعية: د(س) = $هـ^{س}$ ، ومعادلة المنحنى ص = $هـ^{س}$

من الرسم البياني لـ ص = هـ^س:

- المنحنى يمرّ بالنقطة (٠ ، ١).
- المنحنى لا يلامس ولا يقطع المحور السيني أبدًا.
- د(س) > ٠ لكل قيم س.
- المنحنى متزايد.

الرسم البياني في كتاب الطالب صفحة ٢٢.

تمارين ١-١

١) استخدم الحاسبة لإيجاد القيم الآتية مقربًا الناتج إلى أقرب ثلاث منازل عشرية:

أ هـ^٣	ب هـ^٢,٧	ج هـ^٠,٨ .....
د هـ^١,٢٥	هـ هـ^(٢/٣)	

تمارين ١-١ (تابع ١)

٢) استخدم الحاسبة لإيجاد القيم الآتية مقربًا الناتج إلى أقرب ثلاث منازل عشرية:

أ هـ^-٢	ب هـ^-٠,٣	ج هـ^-١,٦ .....

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

د $هـ^{-٠,٠٩}$

هـ $هـ^{-\frac{٤}{٣}}$

تمارين ١-١ (تابع ٢)

٣) استخدم الحاسبة لإيجاد القيم الآتية مقربًا الناتج إلى أقرب ثلاث منازل عشرية:

أ $\sqrt{هـ}$

ب $\sqrt{هـ^{٣}}$

ج $\frac{١}{\sqrt[٣]{هـ^{٢}}}$

د $هـ^{٣} + هـ^{٢}$

هـ $هـ^{-٢} - هـ^{-٣}$

خالد كمال
khaled-math-surge.sh

تمارين ١-١ (تابع ٣)

٥) استخدم القيم التقريبية $هـ^{١,٢} = ٣,٣٢$ ، $هـ^{٢,٤} = ١١$ ، $هـ^{٧,٢} = ١٣٣٩$، لتقدير القيم الآتية مقربة إلى أقرب عدد صحيح:

أ $هـ^{٩,٦}$

ب $هـ^{٦}$

ج $\sqrt{١٣٣٩}$

التمرين ٤ والتمرين ٦ (والفرع أ وب) يعتمدان على الرسم البياني، وهي في كتاب الطالب صفحة ٢٤ و ٢٥.

ورقة الإجابات النموذجية ١-١

تمرين ١: أ) ٢٠٫٠٨٦ | ب) ١٤٫٨٨ | ج) ٢٫٢٢٦ | د) ٣٫٤٩ | هـ) ١٫٩٤٨

تمرين ٢: أ) ٠٫١٣٥ | ب) ٠٫٧٤١ | ج) ٠٫٢٠٢ | د) ٠٫٩١٤ | هـ) ٠٫٢٦٤

تمرين ٣: أ) ١٫٦٤٩ | ب) ٤٫٤٨٢ | ج) ٠٫٥١٣ | د) ٢٧٫٤٧٥ | هـ) ٠٫٠٨٦

تمرين ٥: أ) هـ$^{٩٫٦}$ = هـ$^{٢٫٤}$ × هـ$^{٧٫٢}$ = ١١ × ١٣٣٩ ≈ ١٤٧٢٩ (بالحاسبة ١٤٧٦٥) | ب) هـ^{٦} = ٤٠٣ | ج) $\sqrt{١٣٣٩}$ = هـ$^{٣٫٦}$ ≈ ٣٦٫٦

ملاحظة: الإجابات من حسابي لأن كتاب الطالب لا يتضمن مفتاح إجابات. التمرينان ٤ و ٦ حسب الرسم.

١-٢ الدالة اللوغاريتمية الطبيعية ومعكوسها

صيغة الدالة اللوغاريتمية هي د(س) = لـوأ س ، حيث أ أساس اللوغاريتم. فمثلًا د(س) = لـو٢ س حيث ٢ هو أساس اللوغاريتم، د(س) = لـو س حيث ١٠ هو أساس اللوغاريتم.

وعند استخدام عدد أويلر (هـ) كأساس للوغاريتم بحيث تكون د(س) = لـوهـ س ، فتسمى بالدالة اللوغاريتمية الطبيعية وتختصر إلى الصورة د(س) = لـط س.

لإيجاد قيمة لـط ٢ نضغط على المفاتيح: **[ln] [٢] [=]**
فنحصل على الناتج ٠٫٧ لأقرب منزلة عشرية.

مثال ٥

مثال ٥

استخدم الحاسبة لإيجاد القيم الآتية، مقرّبًا الناتج إلى أقرب ثلاث منازل عشرية إن أمكن:

أ لـط ١٣

ب لـط ٠٫٥ + لـط هـ

ج هـلـط ١١ + هـلـط ٨

د لـط هـ^{٥} − لـط هـ^{٢}

هـ هـ^{٢} − لـط ٥٠

حل مثال ٥

الحل

أ) لـط ١٣ = ٢٫٥٦٥

ب) لـط ٠٫٥ + لـط هـ = −٠٫٦٩٣ + ١ = ٠٫٣٠٧

ج) هـلـط ١١ + هـلـط ٨ = ١١ + ٨ = ١٩

د) لـط هـ^{٥} − لـط هـ^{٢} = ٥ − ٢ = ٣

هـ) هـ^{٢} − لـط ٥٠ = ٧٫٣٨٩ − ٣٫٩١٢ = ٣٫٤٧٧

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

ترتيب المفاتيح قد يختلف من حاسبة إلى أخرى.

نتيجة ٢

يمكن تطبيق قوانين اللوغاريتم التي تعلمتها سابقًا على اللوغاريتمات الطبيعية.

نتيجة ٢: لكل أ > ٠ ، س > ٠ ، ص > ٠ :

قانون الضرب: لـط س ص = لـط س + لـط ص

قانون القسمة: لـط $\frac{\text{س}}{\text{ص}}$ = لـط س − لـط ص

قانون القوة: لـط $\text{أ}^{\text{س}}$ = س لـط أ

بالإضافة إلى:

لـط ١ = ٠ ، لـط هـ = ١ ، لـط $\text{هـ}^{\text{س}}$ = س ، $\text{هـ}^{\text{لـط س}}$ = س ، لـط $\frac{١}{\text{س}}$ = − لـط س

مثال ٦

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

مثال ٦

بدون استخدام الحاسبة أوجد ناتج:

أ لـط $\text{هـ}^{٥,٢}$ − لـط $\text{هـ}^{٣,٣}$

ب ٤ لـط $\text{هـ}^{٧}$ + $\text{هـ}^{٢}$ لـط ٣

ج لـط $\frac{٣}{٧}$ + لـط $\frac{٧}{٣}$

حل مثال ٦

الحل

أ) لـط هـ^{٥,٢} − لـط هـ^{٣,٣} = ٥,٢ − ٣,٣ = ١,٩

ب) ٤ لـط هـ^{٧} + هـ$^{٢\,لط\,٣}$ = ٤ × ٧ + هـ$^{لط\,٩}$ = ٢٨ + ٩ = ٣٧

ج) لـط $\frac{٣}{٧}$ + لـط $\frac{٧}{٣}$ = لـط ($\frac{٣}{٧}$ × $\frac{٧}{٣}$) = لـط ١ = ٠

باستخدام: لـط هـ^{أ} = أ ، وقانون القوة ، وقانون الضرب.

خصائص دالة اللوغاريتم الطبيعي

الدالة د(س) = لـط س معرّفة لقيم س > ٠ فقط. المنحنى لا يقطع المحور الصادي أبدًا.

س < ٠ : ليس لها وجود (لـط س غير معرفة)

س = ٠ : ليس لها وجود (لـط س غير معرفة)

٠ < س < ١ : لـط س < ٠ ، كلما اقتربت س من الواحد اقتربت لـط س من ٠

س = ١ : لـط ١ = ٠

س > ١ : لـط س > ٠ ، كلما زادت س تزيد لـط س

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

المنحنى والاستكشاف ٢ و ٣ في كتاب الطالب صفحة ٢٨ و ٢٩.

نتيجة ٣: المعكوس

منحنيا الدالة الأسّية الطبيعية والدالة اللوغاريتمية الطبيعية هما انعكاس أحدهما للآخر حول المستقيم ص = س.
يعني هذا أن معكوس الدالة الأسّية الطبيعية هو دالة لوغاريتمية طبيعية، ومعكوس الدالة اللوغاريتمية الطبيعية هو دالة أسّية طبيعية.

نتيجة ٣: بالنسبة إلى الأساس هـ:

- إذا كان د(س) = هـ^{س} ، فإن د$^{-١}$(س) = لـط س
- إذا كان ف(س) = لـط س ، فإن ف$^{-١}$(س) = هـ^{س}

مثال ٧

مثال ٧

أوجد معكوس كل من هاتين الدالتين:

أ ع(س) = هـ^{٢س}	ب د(س) = لـط ٥س

حل مثال ٧

الحل

أ) ع(س) = هـ^{٢س}

ص = هـ^{٢س}

س = هـ^{٢ص} (بدّل ما بين س ، ص)

الحل (تابع)

لـط س = لـط هـ^{٢ص}

لـط س = ٢ص

ص = $\frac{١}{٢}$ لـط س

ع$^{-١}$(س) = $\frac{١}{٢}$ لـط س

حل مثال ٧ (تابع)

الحل

ب) د(س) = لـط ٥س

ص = لـط ٥س

س = لـط ٥ص (بدّل ما بين س ، ص)

هـ^{س} = هـ$^{لـط ٥ص}$

هـ^{س} = ٥ص

ص = $\frac{١}{٥}$ هـ^{س}

د$^{-١}$(س) = $\frac{١}{٥}$ هـ^{س}

تمارين ١-٢

١) استخدم الحاسبة لإيجاد القيم الآتية مقربًا الناتج إلى أقرب ثلاث منازل عشرية:

أ) لـط ٣

ب) لـط ١,٤

ج) لـط ٠,٩

د) لـط ٠,١٥

هـ) لـط $\frac{٩}{٧}$

تمارين ١-٢ (تابع ١)

٢) دون استخدام الحاسبة، أوجد:

أ) هـلـط ٢

ب) ٥هـلـط ٦

ج) هـ٢ لـط ٣

د) $\frac{١}{هـ٢}$ لـط ٤٩

هـ) هـلـط ٣ + لـط ٧

تمارين ١-٢ (تابع ٢)

٣) دون استخدام الحاسبة، أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي:

أ) هـلـط ١١١

ب) هـلـط ٤ − هـلـط ٣

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

ج $٣هـ^{لـط ٥ + لـط هـ^{١١}}$

د $٣ لـط هـ^{٩} - ٤ لـط هـ^{٦}$

هـ $لـط \sqrt{هـ} - لـط \sqrt[٣]{هـ}$

التمرين ٤ (وفيه رسم بياني وعكس الدالة) والتمرينان ٥ و ٦ في كتاب الطالب صفحة ٣١ إلى ٣٣.

ورقة الإجابات النموذجية ١-٢

تمرين ١: أ) ١,٠٩٩ | ب) ٠,٣٣٦ | ج) -٠,١٠٥ | د) -١,٨٩٧ | هـ) ٠,٢٥١

تمرين ٢: أ) ٢ | ب) ٣٠ | ج) ٩ | د) ٧ | هـ) ٢١

تمرين ٣: أ) ١١١ | ب) ١ | ج) ٢٦ | د) ٣ | هـ) $\frac{١}{٦}$

ملاحظة: الإجابات من حسابي لأن كتاب الطالب لا يتضمن مفتاح إجابات.

١-٣ الصيغة الأسّية والصيغة اللوغاريتمية للأساس هـ

تعلّمت سابقًا أنه توجد صيغتان لكتابة العلاقات التي تتضمن الأسس، وهما الصيغة الأسّية والصيغة اللوغاريتمية. وتعلمت سابقًا أيضًا أن كلًّا من الصيغتين هي معكوس للأخرى:

– إذا كانت د(س) = $هـ^{س}$ ، فإن معكوسها هي $د^{-١}(س) = لـط س$

– إذا كانت د(س) = $لـط س$ ، فإن معكوسها هي $د^{-١}(س) = هـ^{س}$

نتيجة ٤: تبيّن العبارة ص = هـ^{س} ⟺ س = لـط ص كيفية التحويل من الصيغة الأسّية الطبيعية إلى الصيغة اللوغاريتمية الطبيعية، وبالعكس كذلك.

الصيغة الأسّية الطبيعية: ص = هـ^{س} ← → الصيغة اللوغاريتمية الطبيعية: س = لـط ص

الأساس: هـ ، الأس أو اللوغاريتم: س ، العدد: ص

مثال ٨

مثال ٨

أ) اكتب ص = هـ^{٠,٢} في الصيغة اللوغاريتمية.

ب) اكتب س بدلالة اللوغاريتم الطبيعي، حيث ٤هـ$^{\frac{س}{٢}}$ + ١ = ٢٥

حل مثال ٨

الحل

أ) لـط ص = ٠,٢

الأساس هو هـ ، الأس ٠,٢ ، والقيمة هي ص

حل مثال ٨ (ب)

الحل

ب) $٤هـ^{\frac{س}{٢}} + ١ = ٢٥$

$٤هـ^{\frac{س}{٢}} = ٢٥ - ١$

$هـ^{\frac{س}{٢}} = \frac{٢٤}{٤}$

$هـ^{\frac{س}{٢}} = ٦$

(حوّل إلى الصيغة اللوغاريتمية الطبيعية)

$\frac{س}{٢} = لـط ٦$

س = ٢ لـط ٦ = لـط $٦^{٢}$

س = لـط ٣٦

خالد كمال
khaled-math-site.sh

مثال ٩

مثال ٩

اكتب الآتي في أبسط صيغة أسّية:

ا) لـط ل = ٢ ق

مثال ٩ (تابع)

٢) لـط $ق^{٢} = ١٢$

حل مثال ٩

الحل

١) $ل = هـ^{٢ق}$

الأساس هو هـ ، الأس ٢ق ، والقيمة هي ل

٢) $ق^{٢} = هـ^{١٢}$

الأساس هو هـ ، الأس ١٢ ، والقيمة هي $ق^{٢}$

نأخذ الجذر التربيعي للطرفين:

$ق = هـ^{٦}$ أو $ق = -هـ^{٦}$

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

تمارين ١-٣

١) اكتب في الصيغة اللوغاريتمية الطبيعية:

أ $س = هـ^{١٠}$	ب $ص = \frac{١}{هـ}$	جـ $ع = \frac{١}{٢} هـ^{٤}$
.....	.....	.....

٢) اكتب في الصيغة الأسّية الطبيعية:

أ لـط ل = ٧	**ب** ٢ لـط ق = −٦	**ج** لـط ر^{٣} = ٢٧

تمارين ١-٣ (تابع)

٣) أ) اكتب س بدلالة هـ، حيث:

أ لـط س = ٧	**ب** لـط ٢س = ١٠

ب) اكتب س بدلالة اللوغاريتم الطبيعي، حيث:

أ هـ^{س} = ٣	**ب** $\frac{١}{٣}$ هـ^{٢س} = ٥

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

ورقة الإجابات النموذجية ١-٣

تمرين ١: أ) لـط س = ١٠ | ب) لـط ص = −١ | ج) لـط ٢ع = ٤

تمرين ٢: أ) ل = هـ^{٧} | ب) ق = هـ$^{-٣}$ | ج) ر = هـ^{٩}

تمرين ٣: أ) ١) س = هـ^{٧} | ٢) س = $\frac{١}{٢}$ هـ^{١٠}

ب) ١) س = لـط ٣ | ٢) س = $\frac{١}{٢}$ لـط ١٥

ملاحظة: الإجابات من حسابي لأن كتاب الطالب لا يتضمن مفتاح إجابات. في تمرين ١ ج يمكن كتابتها أيضًا لـط ع = ٤ − لـط ٢.

١-٤ حل المعادلات

انتبه إلى الفرق بين الصيغتين:
لـط (س + ٢) هو اللوغاريتم الطبيعي للمجموع (س + ٢)
أما لـط س + ٢ فمعناها: لـط س ثم نجمع إليها ٢

وكذلك لـط (س − ٢) تختلف عن لـط س − ٢

نستخدم الصيغة الأسّية والصيغة اللوغاريتمية للأساس هـ لحل المعادلات.

مثال ١٠

مثال ١٠

حلّ كلًّا من المعادلات الآتية، مقربًا الناتج إلى منزلة عشرية واحدة:

أ) لـط (س − ٥) = ٣

ب) −٥ + لـط س = ٣

ج) $\frac{هـ^{٢س}}{٣} = ١٠$

حل مثال ١٠ (أ)

الحل

أ) لـط (س − ٥) = ٣

س − ٥ = هـ^{٣}

س = هـ^{٣} + ٥ = ٢٥,١

حل مثال ١٠ (ب)

الحل

ب) −٥ + لـط س = ٣

لـط س = ٨

س = هـ^{٨} = ٢٩٨١

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

حل مثال ١٠ (ج)

الحل

ج) $\frac{\text{هـ}^{٢\text{س}}}{٣}$ = ١٠

هـ$^{٢\text{س}}$ = ٣٠

٢س = لـط ٣٠

الحل (تابع)

س = $\frac{١}{٢}$ لـط ٣٠ = ١,٧

مثال ١١

مثال ١١

أ) حلّ المعادلة −١ + لـط (٥٠ + $\frac{\text{س}}{٦}$) = ٢ بدلالة هـ.

ب) أوجد قيمة س مقربة إلى أقرب عدد صحيح.

حل مثال ١١

الحل

أ) لـط (٥٠ + $\frac{\text{س}}{٦}$) = ٣

٥٠ + $\frac{\text{س}}{٦}$ = هـ^{٣}

$\frac{\text{س}}{٦}$ = هـ^{٣} − ٥٠

س = ٦ (هـ^{٣} − ٥٠)

ب) س = ٦ (٢٠,٠٩ − ٥٠) = −١٧٩

مثال ١٢

مثال ١٢

حلّ المعادلة $هـ^{س + ١} = (٢هـ^{س})^{٢}$ ، مقربًا الناتج إلى منزلتين عشريتين.

حل مثال ١٢

الحل

$هـ^{س + ١} = ٤هـ^{٢س}$

$هـ^{١ - س} = ٤$

$١ - س = لـ ط ٤$

$س = ١ - لـ ط ٤ = -٠٫٣٩$

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

مثال ١٣

مثال ١٣

حلّ المعادلة $هـ^{٢س - ٣} = ٤هـ^{س + ٧}$ بدلالة اللوغاريتم الطبيعي.

حل مثال ١٣

الحل

$هـ^{٢س - ٣} = ٤هـ^{س + ٧}$

(نأخذ اللوغاريتم الطبيعي للطرفين)

الحل (تابع)

لـط هـ$^{٢س - ٣}$ = لـط ٤هـ$^{س + ٧}$

(نستخدم لـط س ص = لـط س + لـط ص)

لـط هـ$^{٢س - ٣}$ = لـط ٤ + لـط هـ$^{س + ٧}$

(نستخدم لـط هـ^{أ} = أ)

٢س − ٣ = لـط ٤ + س + ٧

س = ٣ + ٧ + لـط ٤

= ١٠ + لـط ٤

لا نكتبها على الشكل س = لـط ٤ + ١٠

فالد كمال
khaled-math.surge.sh

تمارين ١-٤

١) دون استخدام الحاسبة، حلّ كلًّا من المعادلات الآتية:

أ هـلـط ٤س = ٢٠

.....

ب هـلـط $\sqrt{س}$ = ٦

.....

ج ٤هـلـط ٩س − ١٨ = ٠

.....

تمارين ١-٤ (تابع ١)

٢) دون استخدام الحاسبة، حلّ كلًّا من المعادلات الآتية:

أ لـط هـ^{١,٦} = ٢س

.....

ب هـلـط س − ٤ = ١

.....

ج) لـط هـ^{٢س} − ٤ = ٥س + ٢

أ) لـط هـ^{س} − ١٣ − لـط هـ^{٢} = ٠

ب) هـ$^{لـط\ س}$ − ٢هـ$^{لـط\ ٦}$ = ١٠٠

تمارين ١-٤ (تابع ٢)

٣) حلّ المعادلات مقربًا الناتج إلى أقرب منزلتين عشريتين:

أ) هـ^{س} = ١٨

ب) هـ^{٢س} = ٢٥

ج) هـ$^{س\ +\ ١}$ = ٨

٤) حلّ المعادلات الأسّية الآتية بدلالة اللوغاريتم الطبيعي:

أ) هـ^{س} = ١٣

ب) هـ^{٣س} = ٧

ج) هـ$^{٢س\ +\ ١}$ = ٦

تمارين ١-٤ (تابع ٣)

٥) حلّ المعادلات الآتية مقربًا الناتج إلى أقرب ثلاثة أرقام معنوية:

أ) لـط س = ٥

ب) لـط س = −٤

ج) لـط (س − ٢) = −٣

خالد كمال
khaled-math.sunge.sh

٦) حلّ المعادلتين الآتيتين:

أ $٢ لـ ط (٥ - س) = لـ ط س^{٢}$

ب $لـ ط \sqrt{س} = \frac{٣}{٢}$

تمارين ١-٤ (تابع ٤)

٧) حلّ المعادلات الأسّية الآتية بدلالة اللوغاريتم الطبيعي:

أ $هـ^{٤} = \frac{هـ^{س}}{٢}$

.....

ب $هـ^{٢س} = \frac{هـ^{٣س} - ١}{٦}$

.....

أ $هـ^{٤ - س} = \frac{٧}{هـ^{١ + ٣س}}$

.....

ب $هـ^{٣س + ١} = ١٢ هـ^{س + ٢}$

.....

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

تمرين ١-٤ (٨)

٨) ينتشر مرض بحيث يمكن حساب عدد الأشخاص المصابين ل من خلال الصيغة ل = ٥٠ × $هـ^{٠,١ن}$ ، حيث ن عدد الأيام منذ ظهور أول حالة إصابة:

أ) أوجد، مقربًا إلى أقرب عدد صحيح، عدد الأشخاص المصابين بعد:

١) ١٠ أيام ٢) ٢٠ يومًا

ب) بعد كم يوم يصل عدد المصابين إلى ٥٠٠٠ شخص؟

ج) من إجابتك للجزئية أ قارن عدد الإصابات الجديدة خلال فترة الـ ١٠ أيام الأولى مع عدد الإصابات الجديدة خلال فترة الـ ١٠ أيام الثانية.

ورقة الإجابات النموذجية ١-٤

تمرين ١: أ) س = ٥ | ب) س = ٣٦ | ج) س = $\frac{١}{٢}$

تمرين ٢: أ) س = ٠٫٨ | ب) س = ٥ | ج) س = −٢ | د) س = ١٥ | هـ) س = ١١٢

تمرين ٣: أ) ٢٫٨٩ | ب) ١٫٦١ | ج) ١٫٠٨

تمرين ٤: أ) لـ ط ١٣ | ب) $\frac{\text{لـ ط ٧}}{٣}$ | ج) $\frac{\text{لـ ط ٦} - ١}{٢}$

تمرين ٥: أ) ١٤٨ (١٤٨٫٤) | ب) ٠٫٠١٨٣٢ | ج) ٢٫٠٥

تمرين ٦: أ) س = ٢٫٥ | ب) س = هـ^{٣}

تمرين ٧: أ) س = ٤ + لـ ط ٢ | ب) س = ١ + لـ ط ٦ | ج) س = $\frac{\text{لـ ط ٧} - ٥}{٢}$ | د) س = $\frac{١ + \text{لـ ط ١٢}}{٢}$

تمرين ٨: أ) ١) ١٣٦ ٢) ٣٦٩ | ب) ١٠ لـ ط ١٠٠ ≈ ٤٦٫١ يومًا، أي حوالي ٤٦ يومًا | ج) الأولى ≈ ٨٦ إصابة، والثانية ≈ ٢٣٣ إصابة، أي أن الإصابات الجديدة في الفترة الثانية أكثر.

ملاحظة: الإجابات من حسابي لأن كتاب الطالب لا يتضمن مفتاح إجابات.

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

١-٥ تحويل علاقة إلى صيغة خطية

عندما تقع البيانات الممثلة بنقاط في تمثيل بياني على خط مستقيم، تكون العلاقة خطية: ص = م س + جـ ، حيث م هو الميل، جـ هو المقطع الصادي.
أما إذا وقعت النقاط على منحنى فنستخدم اللوغاريتمات لتحويل المنحنى إلى مستقيم.

العلاقات مثل: ص = ك س^{ن} ، ص = ك × أ$^{ب س + جـ}$ ، حيث أ ، ب ، ك ، ن ، جـ ثوابت.
أمثلة: ص = ٧س^{٤} ، ص = ٣ × ١٠^{س} ، ص = هـ^{٢س}

مثال ١٤

مثال ١٤

حوّل العلاقة ص = س^{٢} إلى الصيغة الخطية ص$^{~}$ = م س$^{~}$ + جـ ، واكتب الميل والمقطع الرأسي للمستقيم الذي وجدته.

حل مثال ١٤

الحل

ص = س^{٢}

(خذ اللوغاريتم الطبيعي للطرفين)

لـط ص = لـط س^{٢}

(استخدم قانون القوة)

لـط ص = ٢لـط س

الحل (تابع)

لـط ص = ٢ لـط س + ٠

قارن لـط ص = ٢ لـط س مع ص˜ = م س˜ + جـ

ص˜ = لـط ص ، س˜ = لـط س

نحصل على خط مستقيم ميله م = ٢ والمقطع الصادي جـ = ٠

مثال ١٥

مثال ١٥

حوّل العلاقة ص = $\frac{٤}{س^{٥}}$ إلى الصيغة ص˜ = م س˜ + جـ ثم أوجد الميل والمقطع الصادي.

حل مثال ١٥

الحل

ص = $\frac{٤}{س^{٥}}$

(خذ اللوغاريتم الطبيعي للطرفين)

لـط ص = لـط $\frac{٤}{س^{٥}}$

(استخدم قانون القسمة)

لـط ص = لـط ٤ − لـط $س^{٥}$

الحل (تابع)

(استخدم قانون القوة)

لـط ص = لـط ٤ − ٥ لـط س

(أعد الترتيب)

لـط ص = −٥ لـط س + لـط ٤

ص˜ = لـط ص ، س˜ = لـط س

نحصل على خط مستقيم ميله م = −٥ والمقطع الصادي = لـط ٤

مثال ١٦

مثال ١٦

أوجد الميل (م) والمقطع الرأسي (جـ) لمنحنى المستقيم الذي ينتج من تحويل ص = ٣ هـ^{٢س} إلى الصيغة ص˜ = م س˜ + جـ .

حل مثال ١٦

الحل

ص = ٣ هـ^{٢س}

(خذ اللوغاريتم الطبيعي للطرفين)

لـط ص = لـط ٣ هـ^{٢س}

(استخدم قانون الضرب)

لـط ص = لـط ٣ + لـط هـ^{٢س}

(استخدم قانون القوة)

الحل (تابع)

لـط ص = لـط ٣ + ٢س لـط هـ

(استخدم لـط هـ = ١ وأعد الترتيب)

لـط ص = ٢س + لـط ٣

ص˜ = لـط ص ، س˜ = س

نحصل على خط مستقيم ميله م = ٢ والمقطع الصادي جـ = لـط ٣

نتيجة ٤

بالنسبة إلى الثوابت أ ، ب ، ك ، ن:

• يمكن تحويل العلاقة ص = ك أب^س إلى الصيغة الخطية ص˜ = م س˜ + جـ

باستخدام ص˜ = لـط ص ، س˜ = س

• يمكن تحويل العلاقة ص = ك س^ن إلى الصيغة الخطية ص˜ = م س˜ + جـ

باستخدام ص˜ = لـط ص ، س˜ = لـط س

نتيجة ٤ (تابع)

في جميع الأحوال، عند تحويل علاقة غير خطية إلى علاقة خطية في الصيغة ص˜ = م س˜ + جـ :

• يجب أن يتضمن المتغيّران س˜ ، ص˜ المتغيّرين الأصليَّين س ، ص فقط، ويجب أن لا يتضمنا أيًّا من الثوابت أ ، ب ، ك ، ن.

• يجب أن يتضمن الثابتان م ، جـ الثوابت الأصلية أ ، ب ، ك ، ن فقط، ويجب أن لا يتضمنا أيًّا من المتغيّرين الأصليَّين س ، ص.

تمارين ١-٥

١) بيّن أنه يمكن تحويل منحنى العلاقة ص = ٣س^{٤} إلى مستقيم ميله ٤ ومقطعه لـط ٣.

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

تمارين ١-٥ (تابع ١)

٢) استخدم اللوغاريتم الطبيعي لتغيير كل من الصيغ غير الخطية الآتية إلى الصيغة ص^{ن} = م س^{ن} + جـ . حدد في كل حالة ما يمثله كل من المتغيّرين ص ، س ، واكتب القيمة الدقيقة للثابتين م ، جـ .

أ ص = هـ$^{٥س + ٣}$

ب ص = ٢س^{٣}

ج ص = ٧ × ٢^{س}

تمارين ١-٥ (تابع ٢)

٣) أ ، ب ثابتان. استخدم اللوغاريتم الطبيعي لتحويل كل من المعادلات غير الخطية الآتية إلى الصيغة ص˜ = م س˜ + جـ . حدّد في كل حالة ما يمثله كل من المتغيّرين ص˜ ، س˜ ، وأيضًا ما يمثله الثابتان م ، جـ بدلالة أ و/أو ب:

أ ص = هـ^(أس + ب)	ب ص = أ س^ب	جـ ص = أ / س^ب
.....	.....	.....

ورقة الإجابات النموذجية ١-٥

تمرين ١: لط ص = لط ٣ + ٤ لط س ، فالميل ٤ والمقطع لط ٣.

تمرين ٢: أ) لط ص = ٥س + ٣ ؛ ص˜ تمثل لط ص و س˜ تمثل س ، م = ٥ ، جـ = ٣

ب) لط ص = ٣ لط س + لط ٢ ؛ ص˜ تمثل لط ص و س˜ تمثل لط س ، م = ٣ ، جـ = لط ٢

جـ) لط ص = (لط ٢) س + لط ٧ ؛ ص˜ تمثل لط ص و س˜ تمثل س ، م = لط ٢ ، جـ = لط ٧

تمرين ٣: أ) لط ص = أس + ب ؛ ص˜ تمثل لط ص و س˜ تمثل س ، م = أ ، جـ = ب

ب) لط ص = ب لط س + لط أ ؛ ص˜ تمثل لط ص و س˜ تمثل لط س ، م = ب ، جـ = لط أ

جـ) لط ص = −ب لط س + لط أ ؛ ص˜ تمثل لط ص و س˜ تمثل لط س ، م = −ب ، جـ = لط أ

ملاحظة: الإجابات من حسابي لأن كتاب الطالب لا يتضمن مفتاح إجابات.

قائمة التحقق من التعلّم والفهم

الصيغتان الأسّية واللوغاريتمية: إذا كان ص = هـ^{س} فإن س = لـط ص

قوانين القوى: هـ^{م} × هـ^{ن} = هـ$^{م + ن}$ | هـ^{م} ÷ هـ^{ن} = هـ$^{م - ن}$

قوانين اللوغاريتم الطبيعي:

الضرب: لـط س ص = لـط س + لـط ص

القسمة: لـط $\frac{\text{س}}{\text{ص}}$ = لـط س − لـط ص

القوة: لـط أ^{س} = س لـط أ

بالإضافة إلى: لـط ١ = ٠ | لـط هـ = ١ | لـط هـ^{س} = س | هـ$^{\text{لـط س}}$ = س | س = لـط $\frac{١}{\text{س}}$ − لـط

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

قائمة التحقق (تابع)

الدوال ومعكوسات الدوال: معكوس دالة أسّية هو دالة لوغاريتمية، ومعكوس دالة لوغاريتمية هو دالة أسّية.

إذا كان د(س) = هـ^{س} فإن د$^{-١}$(س) = لـط س

إذا كان ف(س) = لـط س فإن ف$^{-١}$(س) = هـ^{س}

منحنيا دالة ومعكوسها انعكاس أحدهما للآخر حول المستقيم ص = س

التحويل إلى الصيغة الخطية: يمكن تحويل ص = ك أ^ب^ س إلى ص~ = م س~ + جـ باستخدام ص~ = لـط ص ، س~ = س

ويمكن تحويل ص = ك س^ن^ باستخدام ص~ = لـط ص ، س~ = لـط س

تمارين مراجعة نهاية الوحدة الأولى

١) حلّ المعادلة لـط (٥س + ٤) = لـط س + لـط ٧

٢) حلّ المعادلات الآتية، مقربًا الناتج إلى أقرب منزلتين عشريتين:

أ) ٢هـ^س^ − ١٧ = ٠

ب) هـ^س + ١^ − ٦ = ٠

تمارين المراجعة (تابع ١)

أ) لـط س + لـط ٥ = ٣

ب) لـط (س − ٣) = لـط س − ٢

٣) لـط ل + لـط $\frac{١}{٢}$ = ٢ لـط ق − لـط (٣ + ق) ، ق < ٠ . اكتب ل بدلالة ق وخالية من اللوغاريتم.

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

تمارين المراجعة (تابع ٢)

٤) أ) بيّن أنه يمكن تبسيط المعادلة ٢ لـط (س + ٣) = لـط (س^{٢} + ١٥) إلى ٦س + ٩ = ١٥

ب) أوجد حلّ المعادلة ٢ لـط (س + ٣) = لـط (س^{٢} + ١٥)

٥) الدالة د(س) = ٢ هـ$^{س - ٥}$ ومعكوس هذه الدالة هو د$^{-١}$(س) = لـط س + جـ ، حيث جـ عدد ثابت. أوجد قيمة جـ مقرّبة إلى أقرب منزلة عشرية واحدة.

تمارين المراجعة (تابع ٣)

٦) استخدم اللوغاريتمات الطبيعية لتغيير كل من العلاقات غير الخطية الآتية إلى الصيغة ص~ = م س~ + جـ . حدد في كل حالة ما يمثله كل من المتغيّرين ص~ ، س~ ، واكتب القيمة الدقيقة للثابتين م ، جـ.

أ ص = هـ$^{٢س - ١}$	ب ٢ ص = ٣^{س}

تمارين المراجعة (تابع ٤)

٧) تحسب أعداد نوع من البكتيريا (ل) من خلال المعادلة ل = أ × هـ$^{ن + ٢}$ ، حيث ن هو عدد الأيام بعد تسجيل عدد البكتيريا لأول مرة.

أ) إذا كان العدد الابتدائي للبكتيريا ١٢٤٠ ، فبيّن أن أ = ١٦٨ ، مقرّبًا إلى أقرب عدد صحيح.

ب) مستعينًا بقيمة أ = ١٦٨ ، أوجد عدد الأيام الذي تستغرقه أعداد البكتيريا لتصل لأول مرة إلى ١٠ ملايين.

ج) استخدم اللوغاريتم الطبيعي لتحويل المعادلة ل = ١٦٨ × هـ^(ن + ٢) إلى صيغة خطية.

ورقة الإجابات النموذجية - المراجعة

١) س = ٢ | **٢)** أ) ٢,١٤ ب) ٠,٧٩ ج) ٤,٠٢ د) ٣,٤٧

٣) $ل = \frac{٢ق^{٢}}{ق + ٣}$

٤) أ) $(س + ٣)^{٢} = س^{٢} + ١٥$ ثم ٦س + ٩ = ١٥ | ب) س = ١

٥) جـ = ٥ − لـط ٢ ≈ ٤,٣

٦) أ) لـط ص = ٢س − ١ ؛ ص˜ تمثل لـط ص و س˜ تمثل س ، م = ٢ ، جـ = −١
ب) لـط ص = (لـط ٣) س − لـط ٢ ؛ ص˜ تمثل لـط ص و س˜ تمثل س ، م = لـط ٣ ، جـ = −لـط ٢

٧) أ) ١٢٤٠ = أ هـ^٢ فأ = $\frac{١٢٤٠}{هـ^{٢}}$ ≈ ١٦٨ | ب) ن ≈ ٨,٩٩ أي حوالي ٩ أيام | ج) لـط ل = ن + ٢ + لـط ١٦٨ ، م = ١ ، جـ = ٢ + لـط ١٦٨

ملاحظة: الإجابات من حسابي لأن كتاب الطالب لا يتضمن مفتاح إجابات.

خالد كمال
khaled-math.surge.sh