١-٣ نهاية الدالة عند نقطة

تعريف النهاية

نهاية الدالة عند نقطة: هي القيمة التي تقترب منها الدالة عندما يقترب المتغيّر من قيمة محددة.

limit of the function at a point

استكشف ١

للتأكد من أن نهاية الدالة الخطيّة د(س) = ٣س عندما تقترب (تؤول) قيمة س من ٤ هي ١٢، يمكننا إنشاء جدول لقيم الدالة عندما تقترب س من ٤ من جهة اليمين (أي عندما تتناقص لتقترب من ٤)، وعندما تقترب س من ٤ من جهة اليسار (أي عندما تزداد لتقترب من ٤).

أ) انسخ وأكمل الجدول أدناه، حيث قيم س تقترب من ٤ من جهة اليمين (أي أكبر من ٤):

من جهة اليمين	
س	د(س) = ٣س
٤,١	
٤,٠١	

من جهة اليمين	
٤,٠٠١	
٤,٠٠٠١	

استكشف ١ (تابع)

٢) انسخ وأكمل الجدول أدناه، حيث قيم س تقترب من ٤ من جهة اليسار (أي أصغر من ٤):

من جهة اليسار	
س	د(س) = ٣س
٣,٩	
٣,٩٩	
٣,٩٩٩	
٣,٩٩٩٩	

٣) انسخ وأكمل كل عبارة من العبارات الآتية:

أ) عندما تقترب س من ٤ من جهة اليمين، تقترب قيمة د(س) أكثر فأكثر من .....

ب) عندما تقترب س من ٤ من جهة اليسار، تقترب قيمة د(س) أكثر فأكثر من .....

حل استكشف ١

من جهة اليمين	
س	د(س) = ٣س
٤,١	١٢,٣
٤,٠١	١٢,٠٣
٤,٠٠١	١٢,٠٠٣
٤,٠٠٠١	١٢,٠٠٠٣

من جهة اليسار	
س	د(س) = ٣س
٣,٩	١١,٧
٣,٩٩	١١,٩٧
٣,٩٩٩	١١,٩٩٧
٣,٩٩٩٩	١١,٩٩٩٧

٣) أ) من ١٢ ب) من ١٢

استنتاج من الاستكشف ١

تبيّن نتائج استكشف ١ أنه بإمكاننا أن نجعل قيمة الدالة د(س) تقترب من ١٢ بدرجة كبيرة، وذلك بأن نجعل قيم س تقترب من ٤ من جهة اليمين، ومن جهة اليسار أكثر فأكثر.

نهاية د(س) عندما تقترب س أكثر فأكثر من ٤ تساوي ١٢

تكتب النهاية من جهة اليمين تساوي ١٢ على النحو: $\lim_{س \to ٤^+}$ د(س) = ١٢

وتقرأ: نهاية د(س) عندما تقترب س من (تؤول إلى) ٤ من جهة اليمين تساوي ١٢

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

تكتب النهاية من جهة اليسار تساوي ١٢ على النحو: $\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٤^-}$ د(س) = ١٢

وتقرأ: نهاية د(س) عندما تقترب س من (تؤول إلى) ٤ من جهة اليسار تساوي ١٢

النهاية عند نقطة

أي أن: $\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٤^+}$ د(س) = $\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٤^-}$ د(س) = ١٢

∴ النهايتان متساويتان من الجهتين،

∴ النهاية موجودة وتساوي ١٢

وتكتب $\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٤}$ د(س) = ١٢

نتيجة ١

إذا كان أ، ل عددين حقيقيين، فإن:

$\text{نهـــا}_{س \leftarrow أ}$ د(س) = ل ⇔ $\text{نهـــا}_{س \leftarrow أ^+}$ د(س) = $\text{نهـــا}_{س \leftarrow أ^-}$ د(س) = ل

وجود نهاية للدالة عندما س ← أ لا يعني بالضرورة أن تكون الدالة معرّفة عند س = أ.

٣-١أ نهاية الدالة كثيرة الحدود

Limit of polynomial function

الدالة كثيرة الحدود هي: دالة تحتوي على حد واحد أو أكثر لمتغيّر مرفوع إلى قوة صحيحة غير سالبة.

بعض الأمثلة على الدوال كثيرات الحدود:

د(س) = ٧س − ٢ ،

هـ(س) = ٩ + ٣س − ٥س^{٢} ،

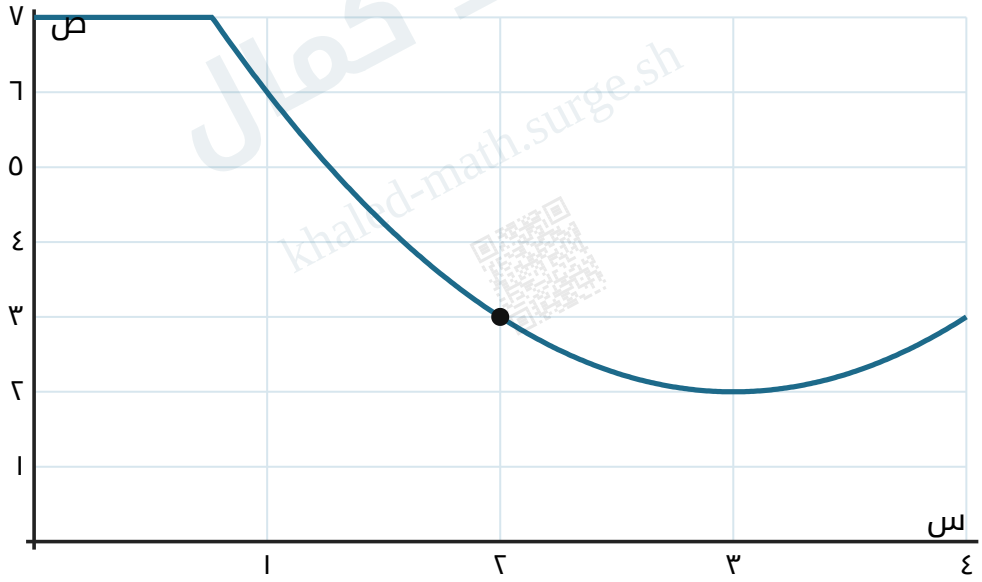
ع(س) = س^{٥} + س^{٣} + س + ١

مثال ١

مثال ١

لتكن د(س) = س^{٢} − ٦س + ١١ :

أنشئ جدولَي قيم لتبيّن أن $\lim_{س \to ٢}$ د(س) = ٣



خالد كمال
khalid-math.surge.sh

نسجل قيم س المتناقصة لتؤول إلى ٢ من جهة اليمين، وقيم س المتزايدة لتؤول إلى ٢ من جهة اليسار.

حل مثال ١

من جهة اليمين	
س	د(س)
٢,١	٢,٨١
٢,٠١	٢,٩٨٠١
٢,٠٠١	٢,٩٩٨٠٠١
٢,٠٠٠١	٢,٩٩٩٨

من جهة اليسار	
س	د(س)
١,٩	٣,٢١
١,٩٩	٣,٠٢٠١
١,٩٩٩	٣,٠٠٢٠٠١
١,٩٩٩٩	٣,٠٠٠٢

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

يبيّن الجدولان أن:

- $\lim_{س \to ٢^+}$ د(س) = ٣
- $\lim_{س \to ٢^-}$ د(س) = ٣
- $\lim_{س \to ٢^+}$ د(س) = $\lim_{س \to ٢^-}$ د(س) = ٣

∴ $\lim_{س \to ٢}$ د(س) = ٣

تمارين ٣-أ١

١) استخدم رمز النهاية لتكتب كل عبارة من العبارات الآتية:

أ) قيمة الدالة ع(س) تقترب من −٣ عندما تقترب قيمة س من ٢ من جهة اليسار.

ب) عندما تتناقص قيمة س لتقترب من ٥، فإن قيمة هـ(س) تقترب من ١١

ج) تقترب ك(س) من الصفر عندما تقترب قيمة س من −١

د) عندما تقترب س من ٤ من جهة اليسار، ومن جهة اليمين، فإن قيم الدالة د(س) تقترب من ٧، وعليه تكون د(س) تقترب من ٧ عندما تقترب س من ٤

تمارين ٣-١أ (تابع ١)

٢) اكتب فقرة تشرح فيها معنى كل من النهايتين الآتيتين:

أ) $\lim_{س \to ١٠^{+}}$ د(س) = ٢٠

ب) $\lim_{س \to -٣^{-}}$ هـ(س) = −٨

تمارين ٣-١أ (٣)

٣) انسخ الجدولَين الآتيَين، وأكملهما لتقدّر قيمة $\lim_{س \to ٦}$ د(س) للدالة د(س) = ١٠٨ − ١٧س:

من جهة اليمين	
س	د(س)
٦,١	
٦,٠١	
٦,٠٠١	
٦,٠٠٠١	

من جهة اليسار	
س	د(س)
٥,٩	
٥,٩٩	
٥,٩٩٩	
٥,٩٩٩٩	

تمارين ٣-١أ (٤)

٤) انسخ الجدولَين الآتيَين، وأكملهما لتقدّر قيمة $\lim_{س \to ٩}$ ك(س) للدالة ك(س) = ١٠٠ + ٥س − س^{٢} :

من جهة اليمين	
س	ك(س)
٩,٥	
٩,١	
٩,٠٥	
٩,٠١	

من جهة اليسار	
س	ك(س)
٨,٥	
٨,٩	
٨,٩٥	
٨,٩٩	

خالد كمال
khaled-math-forge.sh

تمارين ٣-١أ (٥، ٦)

٥) أنشئ جدولَين، وأكملهما لتقدّر $\text{نهـــا}_{س \to -٢}$ م(س) حيث م(س) = $س^{٣} - ١١س^{٢} - ٧س + ٣٦$

٦) أنشئ جدولَين، وأكملهما لتقدّر $\text{نهـــا}_{س \to ٤}$ ن(س) حيث ن(س) = $\frac{س^{٣}}{٨} - ٨س$

تمارين ٣-١أ (٧)

٧) أنشأ راشد جداول تبيّن أن $\text{نهـــا}_{س \to -١^{-}}$ ت(س) = $\text{نهـــا}_{س \to -١^{+}}$ ت(س) = $\frac{أ}{ب}$ للدالة ت(س) = $\frac{٧س^{٢}}{١٥} + \frac{س}{١٢}$ حيث أ، ب عددان صحيحان.

استخدم هذه المعلومات لتجد أصغر قيم ممكنة لـ أ، ب

٣-١ب نهاية الدالة النسبيّة

Limit of a rational function

الدالة النسبيّة: هي دالة يمكن كتابتها في صورة نسبة بين دالتين كثيرتي الحدود.

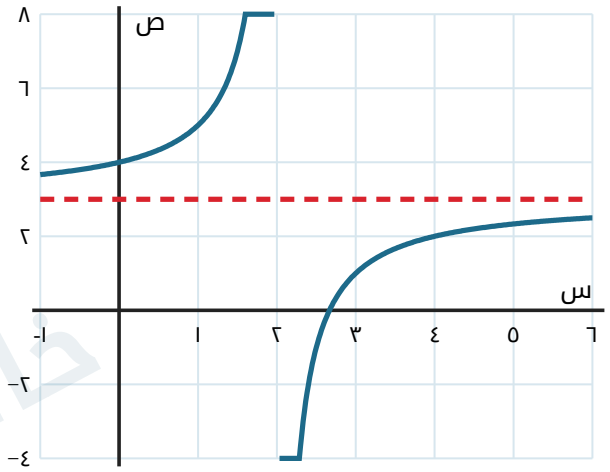
بعض الأمثلة على الدوال النسبية:

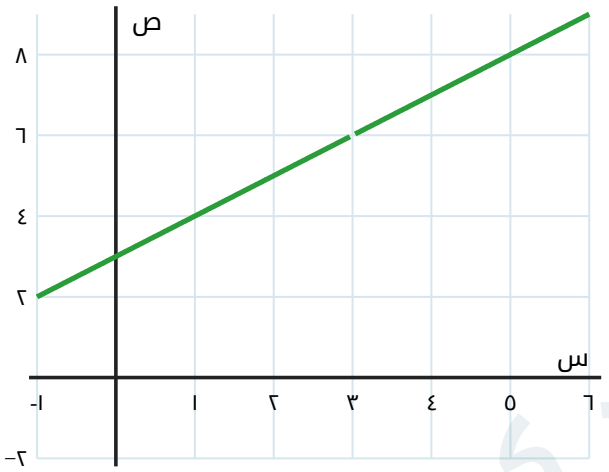
د(س) = $\frac{س^{٢} - ٩}{س - ٢}$ ، هـ(س) = $\frac{٣س - ٨}{س - ٢}$

ع(س) = $\frac{س^{٢} - ٤}{س^{٢} - ٩}$ ، ق(س) = $\frac{٣س^{٢}}{س^{٣} + ٨}$

استكشف ٢

فيما يأتي بيان الدالتين د(س) = $\frac{٣س - ٨}{س - ٢}$ ، هـ(س) = $\frac{س^{٢} - ٩}{س - ٣}$:





د(س): غير معرّفة عند س = ٢ ، د(س) = ٣ لا حلول لها

هـ(س): غير معرّفة عند س = ٣ ، هـ(س) = ٦ لا حلول لها

خالد كمال
khaled-math.sa.edu.sh

استكشف ٢ (تابع)

لتبيّن أن الدالة د(س) = $\frac{٣س - ٨}{س - ٢}$ لا يمكن أن تساوي ٣، علينا أن نبيّن أن المعادلة د(س) = ٣ لا حلول لها.

١) بيّن أن المعادلة د(س) = ٣ لا حلول لها.

لتبيّن أن الدالة هـ(س) = $\frac{س^{٢} - ٩}{س - ٣}$ لا يمكن أن تساوي ٦، علينا أن نبيّن أن المعادلة هـ(س) = ٦ لا حلول لها.

٢) أوجد حل المعادلة هـ(س) = ٦ ، ثم برّر أنه غير مقبول.

٣) عند أي قيمة (أو قيم) لـ س تكون كل دالة من الدالتين الآتيتين غير معرّفة؟ وهل يوجد قيم لا يمكن لكل دالة منهما أن تكون مساوية لها أبدًا؟

أ) $ع(س) = \frac{س^٢ - ٤}{س^٢ - ٩}$ ب) $ق(س) = \frac{٣س^٢}{س^٣ + ٨}$

ملاحظة وخط التقارب

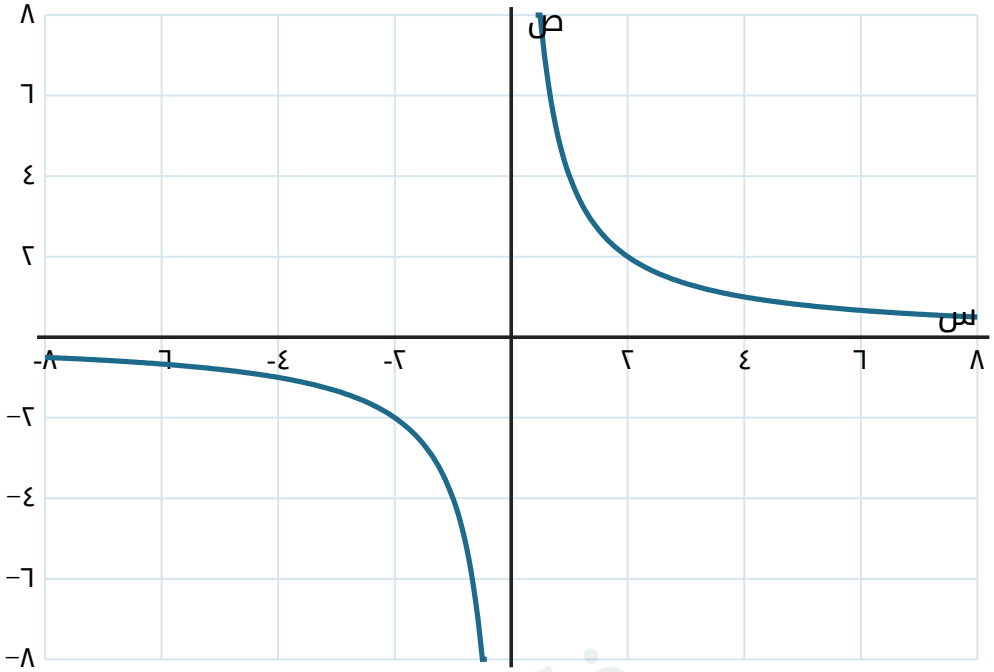
المنحنيان في بيان الدالتين د(س) يقتربان أكثر فأكثر من المستقيمين المنقطعين، ولكن لا يصلان إليهما أبدًا. يسمى كل من هذين المستقيمين **بخط التقارب asymptote**، ويشير خط التقارب الرأسي إلى قيم س التي تكون الدالة عندها غير معرّفة.

النقطة الناقصة في منحنى الدالة هـ(س) تعرف **بالفجوة hole**.

مثال ٢

مثال ٢

يبيّن الرسم الآتي منحنى الدالة د(س) = $\frac{٤}{س}$:



أ) استخدم الجدولَين أدناه لتبيّن أن $\lim_{س \to ٠}$ د(س) غير موجودة.

مثال ٢ (الجدولان)

من جهة اليمين	
س	د(س)
١	
٠٫٥	
٠٫٠٥	
٠٫٠٠٥	

من جهة اليسار	
س	د(س)
-١	
-٠٫٥	
-٠٫٠٥	
-٠٫٠٠٥	

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

ب) اشرح، باستخدام الرموز، سبب عدم وجود $\lim_{س \to ٠} د(س)$.

ج) اكتب معادلتَي خطّي التقارب الرأسي والأفقي.

حل مثال ٢ (أ)

من جهة اليمين	
س	د(س)
١	٤,٠
٠,٥	٨,٠
٠,٠٥	٨٠,٠
٠,٠٠٥	٨٠٠,٠

من جهة اليسار	
س	د(س)
-١	-٤,٠
-٠,٥	-٨,٠
-٠,٠٥	-٨٠,٠
-٠,٠٠٥	-٨٠٠,٠

كلما اقتربت س من الصفر من جهة اليمين، فإن قيمة د(س) تكبر. يبدو أنه لا يوجد حدّ أعلى للدالة د(س)، أي $\lim_{س \to ٠^+} د(س) = \infty$

كلما اقتربت س من الصفر من جهة اليسار، فإن قيمة د(س) تصغر (تأخذ قيمة سالبة أكبر)، أي $\lim_{س \to ٠^-} د(س) = -\infty$

حل مثال ٢ (ب، ج)

ب) لا توجد نهاية للدالة عند الصفر لأن قيم د(س) تتناقص أكثر فأكثر كلما اقتربت س من الصفر من جهة اليسار، وتزداد أكثر فأكثر كلما اقتربت س من الصفر من جهة اليمين. أي لا تقترب قيم د(س) من قيمة محددة عندما تقترب س من الصفر.

$$\text{نهـــا}_{س \leftarrow 0^+} د(س) \neq \text{نهـــا}_{س \leftarrow 0^-} د(س)$$

$$\therefore \text{نهـــا}_{س \leftarrow 0} د(س) \text{ غير موجودة}$$

ج) يوجد خط تقارب رأسي عند س = ٠ حيث تكون الدالة غير معرّفة.

يوجد خط تقارب أفقي عند القيم التي لا يمكن للدالة د(س) أن تتحقق: نعرف ذلك بأن المعادلة د(س) = ٠ لا حلول لها، أي ص = ٠.

الفجوة في منحنى الدالة النسبية

يمكن لمنحنيات بعض الدوال أن تتضمن «فجوات» كما رأيت سابقًا في منحنى الدالة هـ(س) = $\frac{س^٢ - ٩}{س - ٣}$ مثلًا، لكن الدالة د(س) = $\frac{س^٢ - ٢س}{س}$:

إذا حاولنا تبسيط الدالة باستخدام التحليل إلى العوامل والاختصار، فسنحصل على:

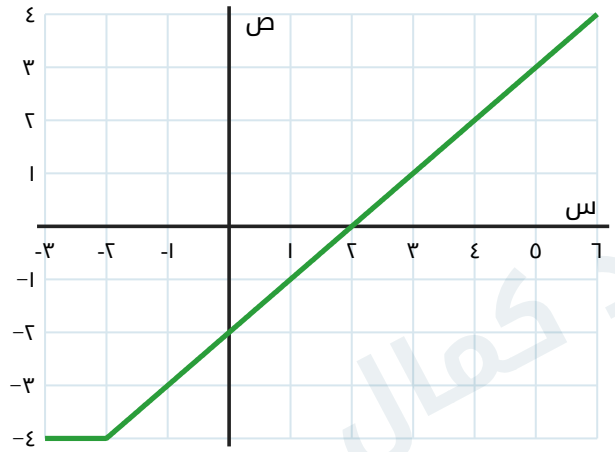
د(س) = $\frac{س(س - ٢)}{س}$ = س − ٢

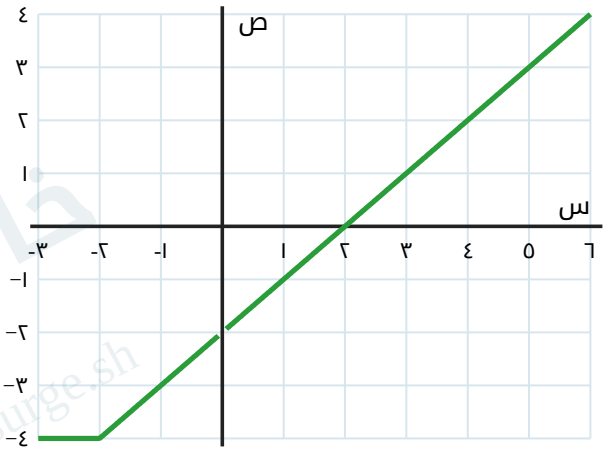
إذا قمنا بذلك نكون قد أهملنا أن الدالة د(س) غير معرّفة عندما س = ٠

منحنى الدالة ص = $\frac{س^٢ - ٢س}{س}$ ، والدالة ص = س − ٢ متشابهان: كل منهما مستقيم، ميل كل منهما ١، مقطع كل منهما من المحور الصادي −٢.

الفجوة (تابع)

ولكن يوجد فرق مهم بينهما، وهو أنه يوجد في منحنى الدالة د(س) = $\frac{\text{س}^{٢} - ٢\text{س}}{\text{س}}$ فجوة عند س = ٠. يمكن إيجاد الإحداثي الصادي للفجوة بتعويض س = ٠ في معادلة المستقيم ص = س − ٢ ، أي عند النقطة (٠ ، −٢).





الأيسر: ص = $\frac{\text{س}^{٢} - ٢\text{س}}{\text{س}}$ (فجوة عند (٠ ، −٢)) الأيمن: ص = س − ٢

مثال آخر على الفجوة

يمكن تطبيق الوضعية نفسها على الدالة د(س) = $\frac{٢\text{س}^{٢} - \text{س} - ٦}{\text{س} - ٢}$:

د(س) = $\frac{(٢\text{س} + ٣)(\text{س} - ٢)}{\text{س} - ٢}$ = ٢س + ٣ ، (س ≠ ٢)

إذا قمنا بذلك نكون قد أهملنا أن الدالة د(س) غير معرّفة عند س = ٢. منحنى الدالة ص = $\frac{٢س^{٢} - س - ٦}{س - ٢}$ ، ومنحنى الدالة ص = ٢س + ٣ متشابهان: كل منهما مستقيم، ميل كل منهما ٢، مقطع كل منهما من المحور الصادي ٣. ولكن توجد **فجوة** عند س = ٢ لأن الدالة غير معرّفة عندها. يمكن إيجاد الإحداثي الصادي للفجوة بتعويض س = ٢ في معادلة المستقيم ص = ٢س + ٣ ، أي عند النقطة (٢ ، ٧).

كن حذرًا عند استخدام البرمجيات الإلكترونية لرسم منحنيات الدوال النسبية: مثلًا، إذا حاولت رسم منحنى الدالة د(س) = $\frac{٢س^{٢} - س - ٦}{س - ٢}$ فمن المرجح أن يظهر المستقيم ص = ٢س + ٣ من دون فجوة عند س = ٢.

مثال ٣

مثال ٣

فيما يلي جدول القيم للدالة النسبية د(س) = $\frac{س^{٢} - ١}{س - ١}$:

س	-٤	-٣	-٢	-١	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦
د(س)	-٣	-٢	-١	٠	١	غير معرّفة	٣	٤	٥	٦	٧

أ) أوجد إحداثيات الفجوة الموجودة في منحنى الدالة د(س).

ب) بيّن أن $\lim_{س \to ١}$ د(س) موجودة، وأوجد قيمتها.

حل مثال ٣

أ) د(س) غير معرّفة عند س = ١ (تكون الدالة غير معرّفة عندما يكون المقام مساويًا للصفر).

$$د(س) = \frac{س^{٢} - ١}{س - ١} = \frac{(س + ١)(س - ١)}{س - ١} = س + ١$$

التمثيل البياني للدالة د(س) هو نفسه التمثيل البياني للمستقيم ص = س + ١ ، مع وجود فجوة عند س = ١. نعوّض الإحداثي السيني للفجوة في معادلة المستقيم: عندما س = ١ ، ص = ١ + ١ = ٢ ، إحداثيات الفجوة هي (١ ، ٢).

حل مثال ٣ (ب)

من جهة اليمين	
س	د(س)
١,١	٢,١
١,٠١	٢,٠١
١,٠٠١	٢,٠٠١
١,٠٠٠١	٢,٠٠٠١

من جهة اليسار	
س	د(س)
٠,٩	١,٩
٠,٩٩	١,٩٩
٠,٩٩٩	١,٩٩٩
٠,٩٩٩٩	١,٩٩٩٩

$$\text{نهـــا}_{س \to ١^{+}} د(س) = ٢ \quad ، \quad \text{نهـــا}_{س \to ١^{-}} د(س) = ٢$$

$\lim_{س \to ا} د(س)$ موجودة لأن $\lim_{س \to ا^+} د(س) = \lim_{س \to ا^-} د(س)$ ∴ $\lim_{س \to ا} د(س) = ٢$

يتعامل المثال مع الدالة عندما تكون معرّفة عند س = أ ، ولكن نهايتها لا تساوي قيمة الدالة عند س = أ. الفجوة أو القفزة تشير إلى أن النقطة غير متضمنة في التمثيل البياني.

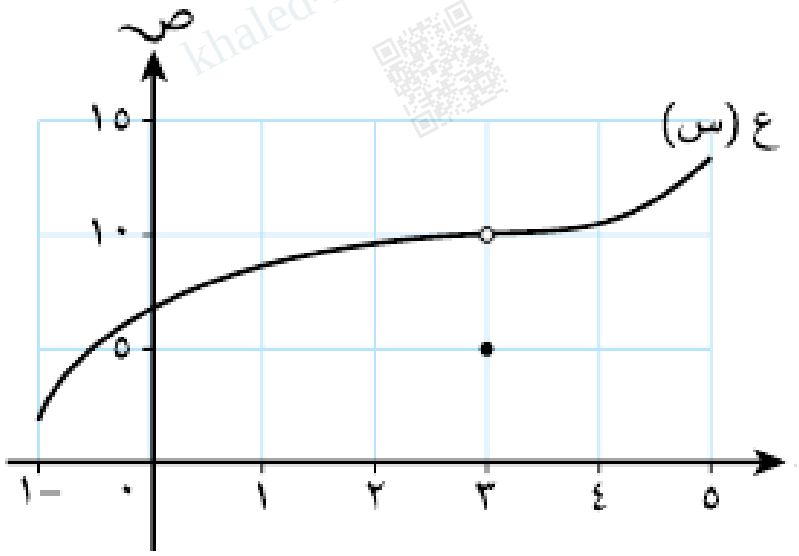
مثال ٤

مثال ٤

باستخدام التمثيل البياني المقابل (الدالة ع(س)):

أ) أوجد ع(٣).

ب) قدّر قيمة $\lim_{س \to ٣} ع(س)$.



أ) عندما س = ٣ ، ص = ع(٣) = ٥ ، أي ع(٣) = ٥

ب) عندما تقترب س من ٣ من جهة اليمين، فإن ع(س) تقترب من قيمة تساوي تقريبًا ١٠ ، ومن جهة اليسار أيضًا ١٠ تقريبًا.

النهايتان من جهة اليمين ومن جهة اليسار متساويتان، ∴ $\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٣}$ ع(س) = ١٠ تقريبًا.

تمارين ٣-١ب

١) منحنى كل دالة من الدوال النسبية الآتية مستقيم يتضمن فجوة.

أ) إذا علمت أن د(س) = $\frac{٢س - ١٠}{س - ٥}$ ، فأوجد: ١) قيمة س عندما تكون الدالة د(س) غير معرّفة. ٢) إحداثيات الفجوة.

ب) إذا علمت أن هـ(س) = $\frac{٢س^{٢} + ٨س}{س + ٤}$ ، فأوجد: ١) قيمة س عندما تكون الدالة هـ(س) غير معرّفة. ٢) إحداثيات الفجوة.

تمارين ٣-١ب (تابع ١)

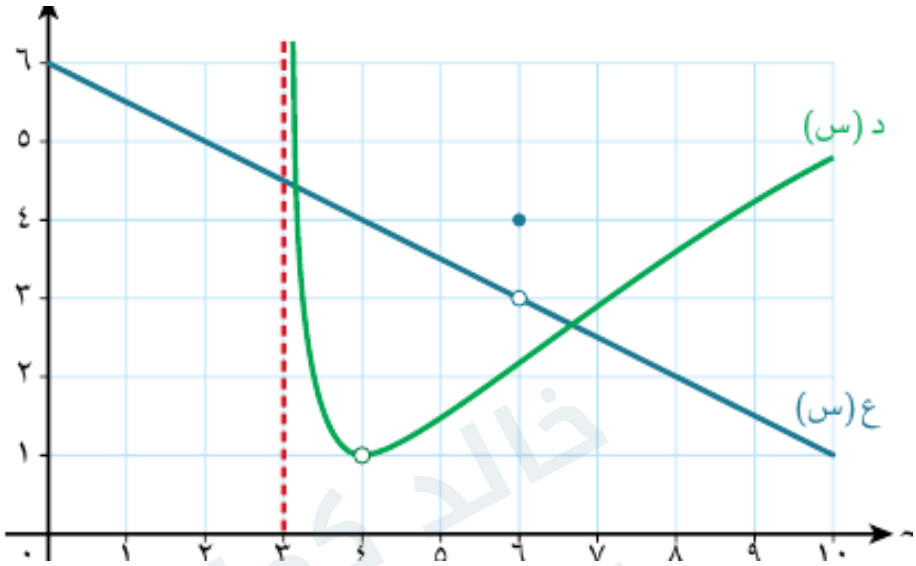
ج) إذا علمت أن ك(س) = $\frac{س^{٢} + ٣س - ١٨}{س - ٣}$ ، فأوجد: ١) قيمة س عندما تكون الدالة ك(س) غير معرّفة. ٢) إحداثيات الفجوة.

د) إذا علمت أن ل(س) = $\frac{٦س^{٢} - ٢س - ٢٨}{س + ٢}$ ، فأوجد: ١) قيمة س عندما تكون الدالة ل(س) غير معرّفة. ٢) إحداثيات الفجوة.

خالد كمال
khaled-math.sura.sa

تمارين ٣-اب (٢)

٢) يبيّن الرسم الآتي منحنى الدالتين د(س)، ع(س) على الفترة ٠ ≤ س ≤ ١٠ :



أ) استخدم التمثيلَين البيانيَين حيث أمكن لتقدّر قيمة: ١) ع(٦) ٢) $\lim_{س \to ٦}$ ع(س) ٣) د(٤) ٤) $\lim_{س \to ٤}$ د(س)

ب) علامَ يدلك المستقيم المنقط الذي معادلته س = ٣ حول تمثيل الدالة د(س)؟

تمارين ٣-اب (٣)

٣) لتكن الدالة هـ(س) = $\frac{س^{٣} - س^{٢} - ٢س + ٥}{س - ١}$

الجدولان الآتيان يبيّنان عمل أحد الطلاب الذي أراد أن يجد نهاية الدالة عندما تقترب س من ٢ من جهة اليمين، وعندما تقترب س من ٢ من جهة اليسار.

من جهة اليمين	
س	هـ(س)
٢,١	٥,١٣٧٣
٢,٠١	٥,٠١٠٤
٢,٠٠١	٥,٠٠١٠
٢,٠٠٠١	أ

من جهة اليسار	
س	هـ(س)
١,٩	٤,٩٤٣٣
١,٩٩	٤,٩٩٠٤
١,٩٩٩	٤,٩٩٩٠
١,٩٩٩٩	ب

أ) استخدم الجدولَين أعلاه لتجد قيمة أ، وقيمة ب مقرّبة إلى أقرب ٤ منازل عشرية.

ب) عبّر عن ما تلاحظه حول قيمة $\text{نهـا}_{س \to ٢^-}$ هـ(س) ، ونهـا $\text{نهـا}_{س \to ٢^+}$ هـ(س).

ج) قدّر قيمة $\text{نهـا}_{س \to ٢}$ هـ(س) .

تمارين ٣-١ب (٤)

٤) إذا كانت الدالة ع(س) = $\frac{س^٢ - ٧س + ١٢}{س - ٤}$:

أ) اشرح سبب أن الدالة ع(س) غير معرّفة عند س = ٤

ب) استخدم جدولًا لتجد نهاية ع(س) عندما تقترب س إلى ٤ من: ١) جهة اليسار. ٢) جهة اليمين.

ج) أعطِ سبب وجود نهاية الدالة ع(س) عند س = ٤

تمارين ٣-اب (٥)

٥) إذا كانت الدالة د(س) = $\frac{\text{س}^{٢} - ١}{\text{س}}$:

أ) انسخ وأكمل الجدولَين الآتيَين اللذَين يبيّنان قيمة د(س) عندما تقترب س من الصفر من جهة اليسار، ومن جهة اليمين:

من جهة اليمين	
س	د(س)
٠,١	
٠,٠٥	
٠,٠١	
٠,٠٠٥	
٠,٠٠١	
٠,٠٠٠٥	

من جهة اليسار	
س	د(س)
-٠,١	
-٠,٠٥	
-٠,٠١	
-٠,٠٠٥	
-٠,٠٠١	
-٠,٠٠٠٥	

ب) اذكر ما إذا كان ممكنًا إيجاد أي نهاية من النهايتَين الآتيتَين، وأعطِ سببًا لكل

إجابة: ١) $\text{نهـــا}_{\text{س} \leftarrow ٠^{+}}$ د(س) ٢) $\text{نهـــا}_{\text{س} \leftarrow ٠^{-}}$ د(س)

ج) ماذا تستنتج عن $\text{نهـــا}_{\text{س} \leftarrow ٠}$ د(س) ؟

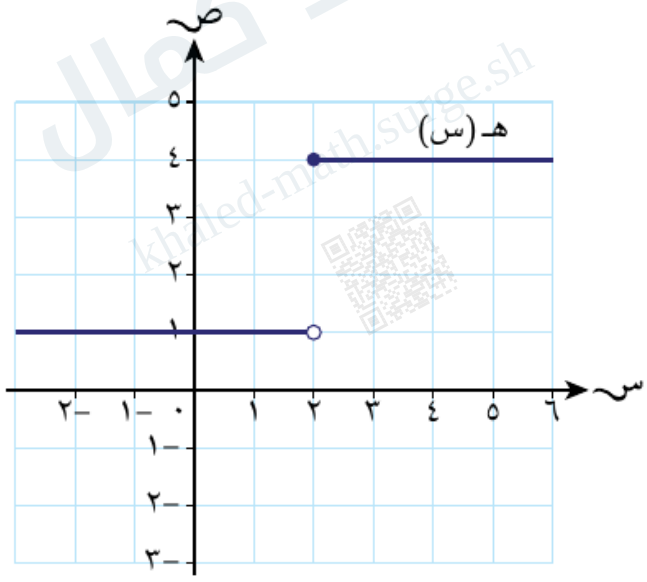
خالد كمال
khaled-math.surge.sh

٣-١ج نهاية الدالة المعرّفة بأكثر من قاعدة

تتكوّن الدالة **المعرّفة بأكثر من قاعدة** (piecewise function) من جزأين أو أكثر. يمكن أن يحوي منحنى الدالة المعرّفة بأكثر من قاعدة على مستقيمات أو منحنيات أو مزيج من الاثنين. قد يحوي أيضًا على فجوات و/أو **قفزات** (jumps)، وتحدث القفزات عندما تتغير قيمة الدالة بشكل كبير.

مثال ٥

يبيّن الرسم الآتي جزءًا من منحنى الدالة هـ(س)، حيث س < ٢ أو س ≤ ٢



مثال ٥ (تابع)

أ) استخدم الرسم لتقدّر قيمة كلّ من:

ا) $\lim_{س \to -١}$ هـ(س). ٢) $\lim_{س \to ٤,٧}$ هـ(س).

ب) بيّن أن $\text{نهـــا}_{س \to ٢}$ هـ(س) غير موجودة.

الحل

أ) ١) باستخدام منحنى الدالة يمكن أن نجد أن: $\text{نهـــا}_{س \to -١^+}$ هـ(س) = ١ ، $\text{نهـــا}_{س \to -١^-}$ هـ(س) = ١
إذن $\text{نهـــا}_{س \to -١}$ هـ(س) = ١

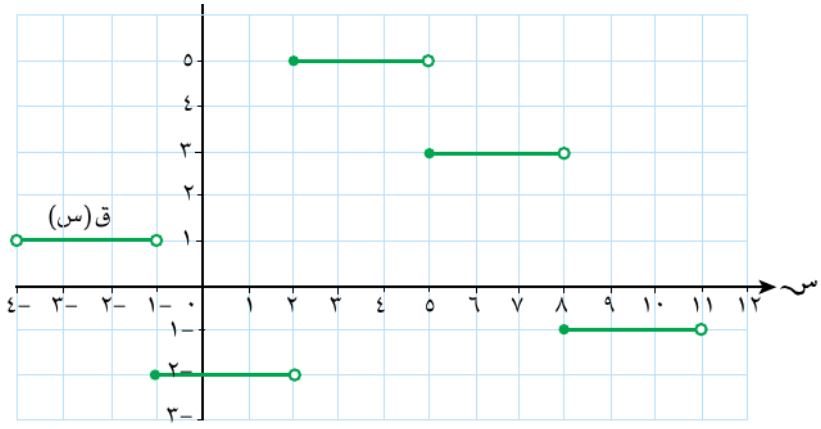
٢) باستخدام منحنى الدالة يمكن أن نجد أن: $\text{نهـــا}_{س \to ٤,٧^+}$ هـ(س) = ٤ ، $\text{نهـــا}_{س \to ٤,٧^-}$ هـ(س) = ٤
إذن $\text{نهـــا}_{س \to ٤,٧}$ هـ(س) = ٤

ب) $\text{نهـــا}_{س \to ٢^+}$ هـ(س) = ٤ ، $\text{نهـــا}_{س \to ٢^-}$ هـ(س) = ١
∴ $\text{نهـــا}_{س \to ٢^+}$ هـ(س) ≠ $\text{نهـــا}_{س \to ٢^-}$ هـ(س)
∴ $\text{نهـــا}_{س \to ٢}$ هـ(س) غير موجودة.

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

مثال ٦

يبيّن الرسم الآتي منحنى الدالة المعرّفة بأكثر من قاعدة ق(س) في المجال −٤ < س < ١١



أ) أوجد قيم س حيث ق(س) > ٢

ب) استخدم المنحنى لإيجاد قيمة ق(٦) − ق(−١)

ج) إذا علمت أن ب إحدى القيم في مجال الدالة ق(س)، وأن $\text{نهـــا}_{\text{س} \leftarrow \text{ب}}$ ق(س) غير موجودة، فأوجد قائمة بجميع قيم ب الممكنة.

حلّ مثال ٦

الحل

أ) ق(س) = ٥ عندما ٢ ≤ س < ٥ ، ق(س) = ٣ عندما ٥ ≤ س < ٨

نقوم بدمج مجموعتي قيم س. ∴ ٢ ≤ س < ٨

ب) ق(٦) = ٣ ، ق(−١) = −٢

ق(٦) − ق(−١) = ٣ − (−٢) = ٥

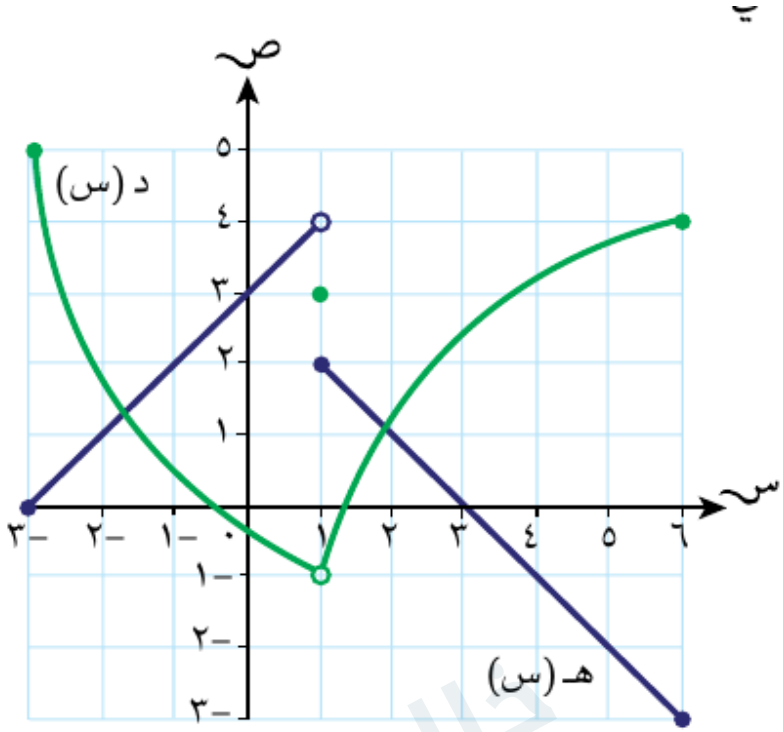
ج) تكون $\text{نهـــا}_{\text{س} \leftarrow \text{ب}}$ ق(س) غير موجودة عندما تكون النهاية من جهة اليمين والنهاية من جهة اليسار غير متساويتين، أي أن $\text{نهـــا}_{\text{س} \leftarrow \text{ب}^+}$ ق(س) ≠ $\text{نهـــا}_{\text{س} \leftarrow \text{ب}^-}$ ق(س)

النهايات من جهة اليمين، ومن جهة اليسار غير متساوية عند س = −١ ، ٢ ، ٥ ، ٨

∴ ب ∈ {−١ ، ٢ ، ٥ ، ٨}

مثال ٧

يبيّن الشكل أدناه منحنى الدالّتين المعرّفتين بأكثر من قاعدة د(س)، هـ(س) في المجال −٣ ≤ س ≤ ٦



أ) استخدم المجال المعطى في الرسم لتجد المدى لكل مما يأتي: ١) د(س) ٢) هـ(س)

ب) بيّن أن: ١) $\lim_{س \to ا}$ د(س) موجودة. ٢) $\lim_{س \to ا}$ هـ(س) غير موجودة.

ج) أوجد قيمة العدد الصحيح أ إذا علمت أن $\lim_{س \to أ^-}$ د(س) + $\lim_{س \to أ^-}$ هـ(س) = ١

حلّ مثال ٧

الحل

أ) ١) $-ا <$ د(س) ≥ ٥ (د(س) = $-ا$ غير معرّفة ، د(س) = ٥ متضمنة)

٢) $-٣ \geq$ هـ(س) > ٤ (هـ(س) = -٣ متضمنة ، هـ(س) = ٤ غير معرّفة)

ب) ١) $\lim_{س \to ا^+}$ د(س) = $-ا$ ، $\lim_{س \to ا^-}$ د(س) = $-ا$. النهايتان من جهة اليمين ومن جهة اليسار متساويتان.

الحل (تابع)

∴ $\text{نهـــا}_{س \leftarrow ا}$ د(س) = −ا موجودة.

٢) $\text{نهـــا}_{س \leftarrow ا^+}$ هـ(س) = ٢ ، $\text{نهـــا}_{س \leftarrow ا^-}$ هـ(س) = ٤ . النهايتان غير متساويتين.
∴ $\text{نهـــا}_{س \leftarrow ا}$ هـ(س) غير موجودة.

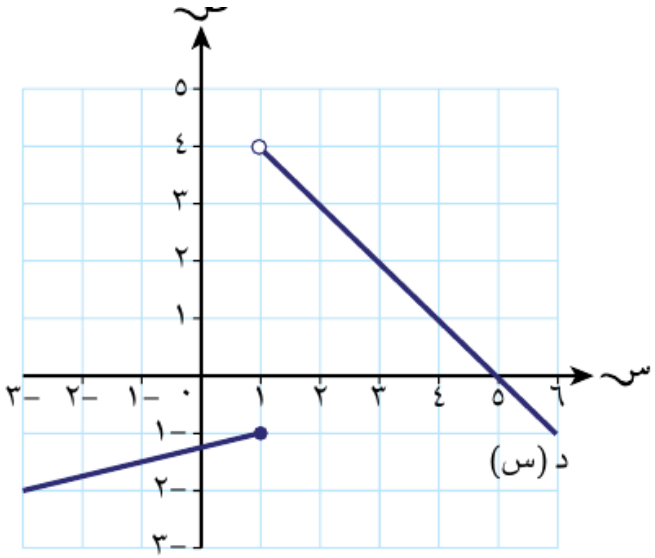
ج) باستخدام منحنى الدالتين: $\text{نهـــا}_{س \leftarrow -٦^-}$ د(س) = ٤ ، $\text{نهـــا}_{س \leftarrow -٦^-}$ هـ(س) = −٣ . إذن ٤ + (−٣) = ا ∴ أ = ٦ (حسب نص الكتاب).

تنبيه: قيم النهايات في (ب) و(ج) مقروءة من الرسم كما في حل الكتاب. راجع الرسم في الكتاب عند الشك.

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

تمارين ٣-١ج

ا) يبيّن الرسم المقابل منحنى الدالة المعرّفة بأكثر من قاعدة في المجال −٣ ≤ س ≤ ٦ :

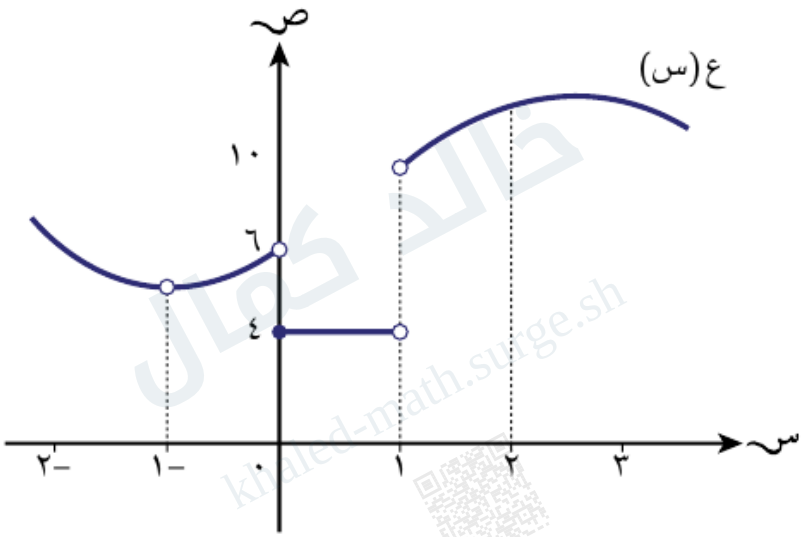


أ) حدد مدى الدالة د(س) في المجال المعطى.

ب) بيّن أن: ١) $\lim_{س \to ٥}$ د(س) موجودة. ٢) $\lim_{س \to ١}$ د(س) غير موجودة.

تمارين ٣-١ج (٢)

٢) يبيّن الشكل المقابل منحنى الدالة ع(س): تمّ رسم مستقيمات رأسية لمنحنى الدالة من المحور السيني عند س = −١ ، س = ٠ ، س = ١ ، س = ٢

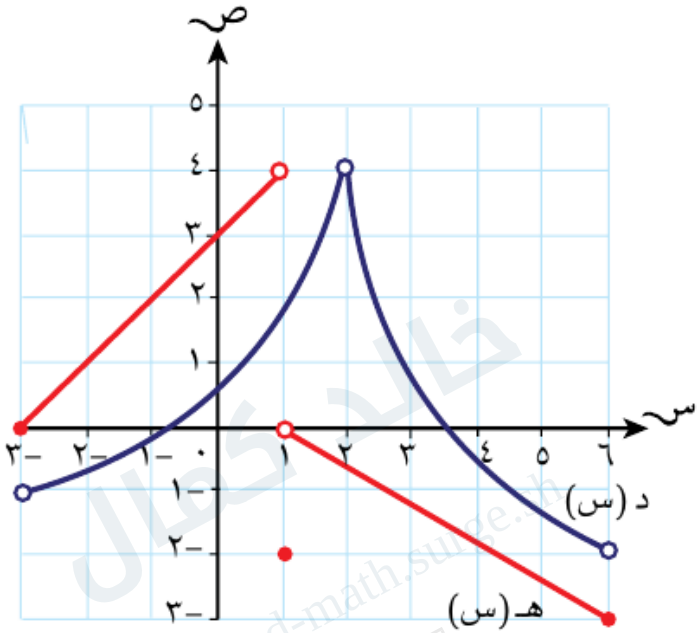


أ) عند أي من القيم الأربع لـ س تكون نهاية الدالة ع(س) موجودة؟

ب) لكل قيمة من قيم س غير الموجودة في إجابة الجزئية (أ)، أعطِ سبب عدم وجود نهاية الدالة ع(س) عندها.

تمارين ٣-١ج (٣)

٣) يبيّن الشكل الآتي منحنى الدالتَين د(س)، هـ(س): الدالة هـ(س) معرّفة في المجال $-٣ \leq س \leq ٦$



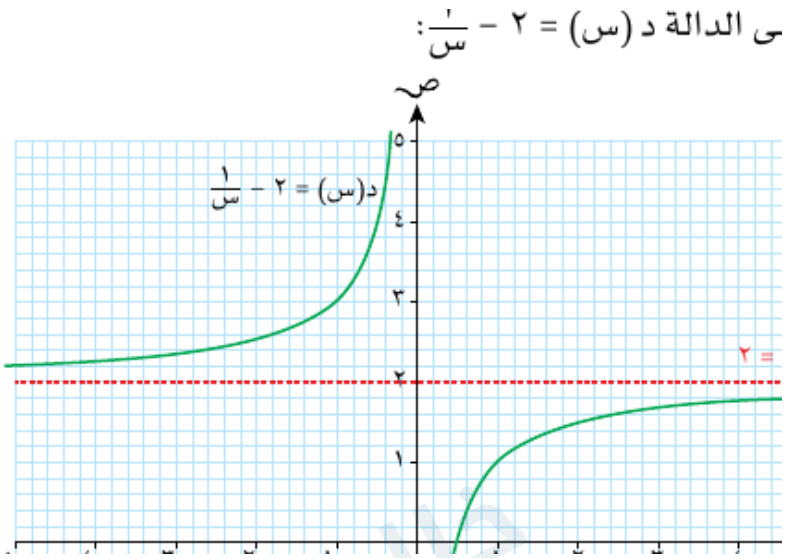
أ) أوجد مجال الدالة د(س).

ب) هل $\lim_{س \to ١}$ هـ(س) موجودة؟ وضّح إجابتك.

٣-٢ نهاية الدالة النسبية عند ±∞

في هذا الدرس سنتعلّم ما يحدث لقيم الدالة عندما تكبر قيمة س (تصبح س أقرب إلى **موجب اللانهاية** positive infinity)، ويعبّر عنها في صورة س ← +∞، وعندما تصغر قيمة س (تصبح س أقرب إلى **سالب اللانهاية** negative infinity)، ويعبّر عنها في صورة س ← −∞.

إليك مثالًا على منحنى الدالة د(س) = ٢ − $\frac{١}{س}$:



يوجد لمنحنى الدالة **خط تقارب رأسي** (vertical asymptote) عند س = ٠ ؛ لأن د(س) = ٢ − $\frac{١}{س}$ ليست معرّفة عند س = ٠ ، لذلك فإن منحنى الدالة يقترب أكثر فأكثر من خط التقارب الرأسي، ولكن لا يلمسه أبدًا.

ويوجد **خط تقارب أفقي** (horizontal asymptote) عند ص = ٢ ؛ لأن الدالة لا يمكن أن تساوي ٢ مهما كانت قيمة س كبيرة أو صغيرة.

∴ $\lim_{س \to +\infty}$ د(س) = ٢ ، $\lim_{س \to -\infty}$ د(س) = ٢

يمكن تأكيد ذلك في جدولَي القيم الآتيَين:

من جهة اليمين	
س	د(س) = ٢ − ١/س
١	١
١٠	١,٩
١٠٠	١,٩٩
١٠٠٠	١,٩٩٩
١٠٠٠٠	١,٩٩٩٩

من جهة اليسار	
س	د(س) = ٢ − ١/س
−١	٣
−١٠	٢,١
−١٠٠	٢,٠١
−١٠٠٠	٢,٠٠١
−١٠٠٠٠	٢,٠٠٠١

يظهر من الجدولَين أنه يمكن أن نجعل قيمة د(س) قريبة من ٢ بدرجة كبيرة، وذلك بأن نجعل س تأخذ قيمًا كبيرة جدًّا (تقترب من +∞)، أو قيمًا صغيرة جدًّا (تقترب من −∞).

النهاية تساوي ٢ ؛ لأن $\text{نهـــا}_{س \to +\infty} \frac{١}{س} = ٠$ ، $\text{نهـــا}_{س \to -\infty} \frac{١}{س} = ٠$. وعليه د(س) تقترب أكثر فأكثر من ٢ (من جهتَي اليمين واليسار). بما أن النهايتين متساويتان من جهتَي اليمين واليسار، يمكن القول إن النهاية عند اللانهاية موجودة: $\text{نهـــا}_{س \to \infty}$ د(س) = ٢

تعلمت طرقًا لإيجاد قيمة النهاية عند اللانهاية منها: التمثيل البياني للدالة، وإنشاء جداول القيم. لكن يمكنك كذلك استخدام الطريقة الجبرية كالآتي:

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

إذا أمكن كتابة دالة في صورة دالة نسبية، **فيمكن أن نقسم كلًّا من البسط والمقام على المتغير ذي القوة الأكبر في الدالة.** نقوم بذلك لأنه كلما كبرت قيمة س فإن قيمة أكبر قوة لـ س تصبح أكثر دلالة لقيمة الدالة من استخدام القوة الصغرى لـ س. مما سبق نجد أن $\frac{١}{س}$ ، $\frac{١}{س^{٢}}$ ، $\frac{١}{س^{٣}}$ تقترب من الصفر كلما كبرت أو صغرت قيمة س، أي س ← ±∞ .

نتيجة ٢: لكل قيم ن > ٠ ، أ عدد حقيقي: $\text{نهـا}_{س \to +\infty} \frac{أ}{س^{ن}} = ٠$ ، $\text{نهـا}_{س \to -\infty} \frac{أ}{س^{ن}} = ٠$

مثال ٨

أوجِد كلًّا مما يأتي: أ) $\text{نهـا}_{س \to \infty} \frac{١٢س^{٤}}{س^{٢} - ٧س^{٤}}$ ب) $\text{نهـا}_{س \to \infty} \frac{٢س^{٢} + ٩}{٥ - ٣س^{٢}}$ ج) $\text{نهـا}_{س \to \infty} \frac{٤س^{٢} + ٣}{٣س^{٢} + س}$

خالد كمال
khaled-math.blogspot.sh

حلّ مثال ٨

الحل

أ) أكبر قوة لـ س هي ٢ ، لذا اقسم البسط والمقام على $س^{٢}$

$$\text{نهـا}_{س \to \infty} \frac{٢س^{٢} + ٩}{٥ - ٣س^{٢}} = \text{نهـا}_{س \to \infty} \frac{٢ + ٩/س^{٢}}{٣ - ٥/س^{٢}} = \frac{٢ + ٠}{٣ - ٠} = \frac{٢}{٣}$$

ب) أكبر قوة لـ س هي ٢ ، لذا اقسم البسط والمقام على $س^{٢}$

الحل (تابع)

$$\text{نهـــا}_{\text{س} \to \infty} \frac{٤\text{س}^{٢} + ٣}{٣\text{س}^{٢} + \text{س}} = \text{نهـــا}_{\text{س} \to \infty} \frac{٤ + ٣/\text{س}^{٢}}{٣ + ١/\text{س}} = \frac{٤ + ٠}{٣ + ٠} = \frac{٤}{٣}$$

ج) أكبر قوة لـ س هي ٤ ، لذا اقسم البسط والمقام على $\text{س}^{٤}$

$$\text{نهـــا}_{\text{س} \to \infty} \frac{١٢\text{س}^{٤}}{\text{س}^{٢} - ٧\text{س}^{٤}} = \text{نهـــا}_{\text{س} \to \infty} \frac{١٢}{١/\text{س}^{٢} - ٧} = \frac{١٢}{٠ - ٧} = -\frac{١٢}{٧}$$

مما سبق نلاحظ أنه عندما تتساوى أكبر قوة في البسط مع أكبر قوة في المقام، فإن ناتج النهاية يساوي النسبة بين معامل أكبر قوة في البسط، ومعامل أكبر قوة في المقام.

مثال ٩

أ) أوجد نهاية كل دالة من الدالتين الآتيتين عندما س $\to \infty$:

ا) د(س) $= \frac{٢\text{س} - ١}{٣\text{س}^{٢} + ٧}$ ٢) هـ(س) $= \frac{٥\text{س}^{٣} + \text{س}}{\text{س}^{٢} + ٧}$

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

ب) أوجد نهاية كل دالة من الدالتين الآتيتين عندما س ← −∞ :

١) ق(س) = $\frac{٥س - ٩س^{٢}}{٦س^{٢} + ٤}$ ٢) ع(س) = $\frac{٦س^{٥} + ٣س - ٥}{٨س^{٦} - ٣س^{٢} + س}$ ٣) م(س) = $\frac{٧س^{٣} - ٧}{س^{٢} - ١}$

الحل

أ) ١) أكبر قوة لـ س هي ٢ ، معامل $س^{٢}$ في البسط ٠ ، وفي المقام ٣ : نهـــا$_{س \leftarrow \infty}$ $\frac{٢س - ١}{٣س^{٢} + ٧}$ = $\frac{٠}{٣}$ = ٠

٢) أكبر قوة لـ س هي ٣ ، معامل $س^{٣}$ في البسط ٥ ، وفي المقام ٠ : نهـــا$_{س \leftarrow \infty}$ $\frac{٥س^{٣} + س}{س^{٢} + ٧}$ = $\frac{٥}{٠}$. النهاية غير موجودة.

ب) ١) أكبر قوة لـ س هي ٢ ، معامل $س^{٢}$ في البسط −٩ ، وفي المقام ٦ :

نهـــا$_{س \leftarrow -\infty}$ $\frac{٥س - ٩س^{٢}}{٦س^{٢} + ٤}$ = $\frac{-٩}{٦}$ = $-\frac{٣}{٢}$

٢) أكبر قوة لـ س هي ٦ ، معامل $س^{٦}$ في البسط ٠ ، وفي المقام ٨ : النهاية = $\frac{٠}{٨}$ = ٠

٣) أكبر قوة لـ س هي ٣ ، معامل $س^{٣}$ في البسط ٧ ، وفي المقام ٠ : $\frac{٧}{٠}$.

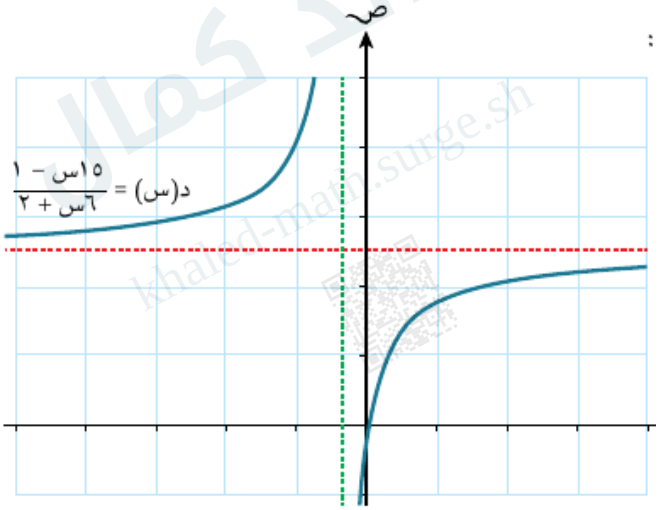
النهاية غير موجودة.

لاحظ النتائج الآتية:

• إذا كانت أعلى قوة في البسط أكبر من أعلى قوة في المقام، فإن النهاية عندما س ← ±∞ تكون غير موجودة.
• إذا كانت أعلى قوة في البسط أقل من أعلى قوة في المقام، فإن النهاية عندما س ← ±∞ تساوي ٠ (صفرًا).

مثال ١٠

يبيّن الرسم المقابل منحنى الدالة د(س) = $\frac{١٥س - ١}{٦س + ٢}$:



أ) أوجِد معادلة كلٍّ مما يأتي: ١) خط التقارب الرأسي. ٢) خط التقارب الأفقي.

ب) تحقق من معادلة خط التقارب الأفقي باستخدام جدول القيم.

حلّ مثال ١٠

الحل

أ) ١) تكون الدالة غير معرّفة عندما يكون مقام هذه الدالة النسبية مساويًا للصفر:

$$٦س + ٢ = ٠ \Leftarrow س = -\frac{١}{٣}$$

∴ معادلة خط التقارب الرأسي هي $س = -\frac{١}{٣}$

٢) $$\text{نهـــا}_{س \to +\infty} \frac{١٥س - ١}{٦س + ٢} = \frac{١٥}{٦} = \frac{٥}{٢}$$ ، $$\text{نهـــا}_{س \to -\infty} \frac{١٥س - ١}{٦س + ٢} = \frac{١٥}{٦} = \frac{٥}{٢}$$

∴ معادلة خط التقارب الأفقي هي $ص = \frac{٥}{٢}$

حلّ مثال ١٠ (ب)

للتأكد من معادلة خط التقارب الأفقي نستخدم جداول القيم لنبيّن أن النهاية عند اللانهاية موجودة، وذلك بسبب $\text{نهـــا}_{س \to +\infty} د(س) = \text{نهـــا}_{س \to -\infty} د(س)$

حلّ مثال ١٠ (ب) (تابع)

س ← +∞	
س	د(س)
٠	-٠,٥
١	١,٧٥
١٠	٢,٤٠٣
١٠٠	٢,٤٩
١٠٠٠	٢,٤٩٩

س ← −∞	
س	د(س)
٠	-٠,٥
−١	٤,٠
−١٠	٢,٦٠٣
−١٠٠	٢,٥١
−١٠٠٠	٢,٥٠١

نهـــا د(س) = ٢,٥ ، نهـــا د(س) = ٢,٥ ∴ معادلة خط التقارب الأفقي هي
س ← +∞ س ← −∞

$$ص = \frac{٥}{٢}$$

تمارين ٣-٢

١) أوجِد نهاية كل دالة من الدوال الآتية عند س ← ±∞ :

أ) $د(س) = \frac{٧س^{٢} - ٣س}{س^{٢}}$

ب) $د(س) = \frac{١ + ٥س - ٤س^{٣}}{٢س^{٣}}$

ج) د(س) = $\frac{٩س + ٧}{٤ + ٣س}$

د) د(س) = $\frac{١٠ - ٢س}{٣ + ٤س}$

هـ) د(س) = $\frac{٥٢س^{٢} + ٧س}{١٣س^{٢} - ١١}$

و) د(س) = $\frac{٩ + ١٢س^{٤}}{٧س^{٣} - ٥س^{٤}}$

ز) د(س) = $\frac{٥}{٢ + س}$

ح) د(س) = $\frac{٥ + ٣س - ٥س^{٢} - ٢٤س^{٣}}{٢س^{٢} - ٣س^{٣}}$

ط) د(س) = $\frac{٤ + ٣س}{٢س^{٣}}$

ي) د(س) = $\frac{٧س^{٩}}{٣س^{٥} - ١١س^{٣} + س}$

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

تمارين ٣-٢ (٢، ٣، ٤)

٢) لتكن الدالة د(س) = $\frac{٤}{س}$ − س :

أ) اكتب العبارة $\frac{٤}{س}$ − س في صورة نسبية.

ب) بيّن أن $\text{نهـــا}_{س \to \infty}$ $\frac{٤}{س}$ − س غير موجودة.

٣) إذا علمت أن $\lim_{س \to \infty} \frac{١٠٠س^{٢} - ٧س}{(أس - ٣)^{٢} + ٥} = ٢٥$ ، فأوجِد قيم أ .

٤) إذا علمت أن $\lim_{س \to \infty} \frac{ت\ س^{٥} - ٧س^{٣}}{\frac{س^{٥}}{٣} - ١٣} = \frac{٣}{٤}$ ، فأوجِد قيمة ت .

٣-٣ خواص النهايات properties of limits

يوجد عدد من الخواص التي تساعدنا على حساب نهايات الدوال دون أن نحسبها خطوة خطوة كل مرة.

نتيجة ٣: إذا كان ك عددًا حقيقيًّا، أ ينتمي إلى مجال كل من د(س)، ع(س).
وكانت $\lim_{س \to أ}$ د(س) ، $\lim_{س \to أ}$ ع(س) موجودتَين، فإن:

١) $\lim_{س \to أ}$ (ك د(س)) = ك $\lim_{س \to أ}$ د(س)

٢) $\lim_{س \to أ}$ (د(س) + ع(س)) = $\lim_{س \to أ}$ د(س) + $\lim_{س \to أ}$ ع(س)

٣) $\lim_{س \to أ}$ (د(س) − ع(س)) = $\lim_{س \to أ}$ د(س) − $\lim_{س \to أ}$ ع(س)

٤) $\lim_{س \to أ}$ (د(س) × ع(س)) = $\lim_{س \to أ}$ د(س) × $\lim_{س \to أ}$ ع(س)

٥) $\lim_{س \to أ} \frac{د(س)}{ع(س)} = \frac{\lim_{س \to أ} د(س)}{\lim_{س \to أ} ع(س)}$ ، $\lim_{س \to أ}$ ع(س) ≠ ٠

٦) $\lim_{س \to أ}$ (د(س))^{ن} = ($\lim_{س \to أ}$ د(س))^{ن} ، حيث ن عدد صحيح موجب.

٧) إذا كانت $\lim_{س \to أ}$ د(س) > ٠ فإن $\lim_{س \to أ}$ $\sqrt[ن]{\text{د(س)}}$ = $\sqrt[ن]{\lim_{س \to أ}}$ د(س) ، حيث ن عدد صحيح موجب.

نتائج أخرى لنهايات خاصة:

أ) $\lim_{س \to أ}$ جـ = جـ ، حيث جـ عدد ثابت.

ب) $\lim_{س \to أ}$ س = أ

ج) $\lim_{س \to أ}$ $س^{ن}$ = $أ^{ن}$ ، حيث ن عدد صحيح موجب.

د) $\lim_{س \to أ}$ $\sqrt[ن]{\text{س}}$ = $\sqrt[ن]{\text{أ}}$ ، حيث ن عدد صحيح موجب ، أ > ٠

مثال ١١

إذا علمت أن $\lim_{س \to ٥}$ د(س) = ٢ ، $\lim_{س \to ٥}$ ع(س) = ٨ ، فاستخدم خواص النهايات لإيجاد كلٍّ من:

أ) $\lim_{س \to ٥}$ (د(س) − ع(س)) **ب)** $\lim_{س \to ٥}$ $\frac{\text{ع(س)}}{\text{د(س)}}$ **ج)** $\lim_{س \to ٥}$ $(\text{ع(س)})^{٢}$ **د)** $\lim_{س \to ٥}$ $\sqrt[٤]{\text{د(س)} \times \text{ع(س)}}$

الحل

أ) $\lim_{س \to ٥}$ (د(س) − ع(س)) = $\lim_{س \to ٥}$ د(س) − $\lim_{س \to ٥}$ ع(س) = ٢ − ٨ = −٦

ب) $\lim_{س \to ٥}$ $\frac{\text{ع(س)}}{\text{د(س)}}$ = $\lim_{س \to ٥}$ ع(س) ÷ $\lim_{س \to ٥}$ د(س) = $\frac{٨}{٢}$ = ٤

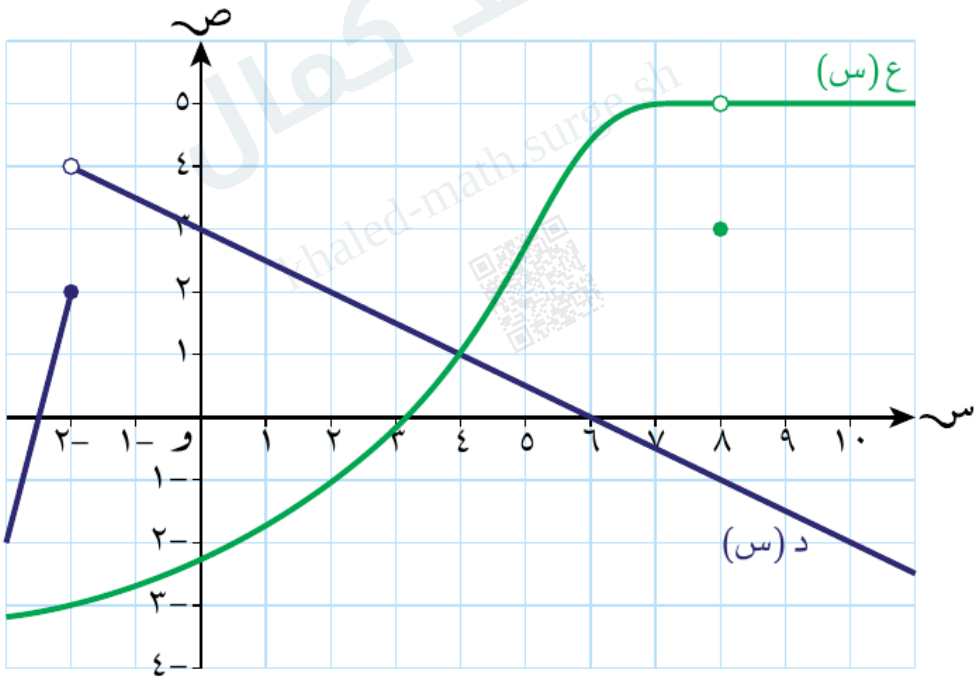
الحل (تابع)

جـ) $\text{نهـا}_{س \leftarrow ٥} (ع(س))^{٢} = (\text{نهـا}_{س \leftarrow ٥} ع(س))^{٢} = ٨^{٢} = ٦٤$

د) $\text{نهـا}_{س \leftarrow ٥} \sqrt[٤]{د(س) \times ع(س)} = \sqrt[٤]{\text{نهـا}_{س \leftarrow ٥} د(س) \times \text{نهـا}_{س \leftarrow ٥} ع(س)} = \sqrt[٤]{٨ \times ٢} = \sqrt[٤]{١٦} = ٢$

مثال ١٢

يبيّن الشكل الآتي جزءًا من منحنى الدالتين د(س)، ع(س):



استخدم الشكل وخواص النهايات لتجد النهايات الآتية:

أ) $\text{نهـا}_{س \leftarrow ١٠} (د(س) + ع(س))$ ب) $\text{نهـا}_{س \leftarrow ٧} (٤ع(س))$ جـ) $\text{نهـا}_{س \leftarrow ٢} \frac{ع(س)}{د(س)}$ د) $\text{نهـا}_{س \leftarrow ٨}$

$(د(س) \times ع(س))$ هـ) $\text{نهـا}_{س \leftarrow -٢} \sqrt{د(س)}$

حلّ مثال ١٢

أ) $\lim_{س \to ١٠} (د(س) + ع(س)) = \lim_{س \to ١٠} د(س) + \lim_{س \to ١٠} ع(س) = -٢ + ٥ = ٣$

ب) $\lim_{س \to ٧} (٤ع(س)) = ٤ \times \lim_{س \to ٧} ع(س) = ٤ \times ٥ = ٢٠$

ج) $\lim_{س \to ٢} \frac{ع(س)}{د(س)} = \lim_{س \to ٢} ع(س) \div \lim_{س \to ٢} د(س) = -١ \div ٢ = -\frac{١}{٢}$

د) $\lim_{س \to ٨} (د(س) \times ع(س)) = \lim_{س \to ٨} د(س) \times \lim_{س \to ٨} ع(س) = -١ \times ٥ = -٥$

لاحظ أن نهاية ع(س) عندما س تؤول إلى ٨ هي ٥ على الرغم من أن ع(٨) = ٣

هـ) $\lim_{س \to -٢} \sqrt{د(س)} = \sqrt{\lim_{س \to -٢} د(س)}$

$\lim_{س \to -٢^+} د(س) = ٤$ ، $\lim_{س \to -٢^-} د(س) = ٢$

$\because \lim_{س \to -٢^+} د(س) \neq \lim_{س \to -٢^-} د(س)$

$\therefore$ نهاية د(س) أو $\sqrt{د(س)}$ غير موجودة عند س = −٢

خالد كمال
khaled-math.sura.sh

تمارين ٣-٣

١) إذا علمت أن $\lim_{س \to ٠} هـ(س) = ١٠$ ، $\lim_{س \to ٠} ك(س) = ٨$ ، فاستخدم خواص النهايات لتجد كلًّا ممّا يأتي:

أ) $\lim_{س \to ٠} (هـ(س) + ك(س))$

ب) $\lim_{س \to ٠} (هـ(س) \times ك(س))$

ج) $\lim_{س \to ٠}$ (هـ(س))^{٢}

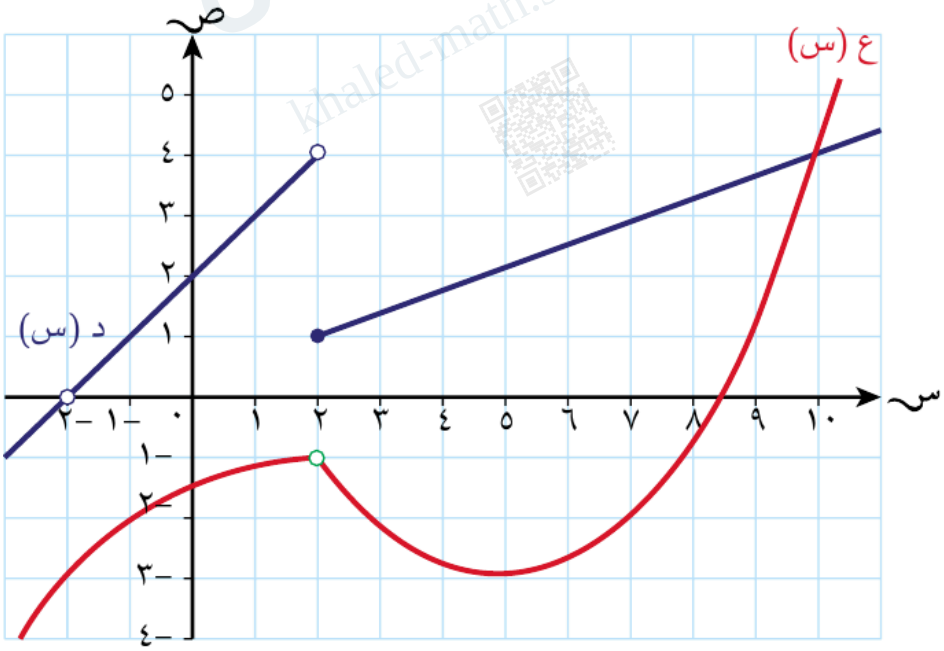
د) $\lim_{س \to ٠}$ $\frac{١}{٤}$ $\sqrt{٥ك(س) \times هـ(س)}$

٢) أ) إذا علمت أن $\lim_{س \to ١}$ د(س) = ٣٦ ، $\lim_{س \to ١}$ $\frac{د(س)}{ك(س)}$ = −٤ ، فأوجِد $\lim_{س \to ١}$ ك(س) .

ب) إذا علمت أن $\lim_{س \to -١}$ م(س) = −٢ ، $\lim_{س \to -١}$ (ن(س))^{٣} = −٨ ، فأوجِد $\lim_{س \to -١}$ (٣م(س) − ٥ن(س))

تمارين ٣-٣ (٣)

٣) يبيّن الشكل الآتي أجزاء من منحنى الدالتين د(س)، ع(س):



خالد كمال
khaled-math.surge.sh

أ) استخدم الشكل لتقدّر قيمة كل ممّا يأتي:

١) $\lim_{س \to ١٠} (٢د(س) - ٣ع(س))$

٢) $\lim_{س \to ٥} \frac{(ع(س))^{٢}}{د(س)}$

٣) $\lim_{س \to -٢} (د(س) + ع(س))^{٣}$

ب) أوجِد قيمتَي أ الممكنة إذا علمت أن $\lim_{س \to أ} (د(س) - ع(س)) = ٣$

ج) أعطِ سببًا يوضح أن $\lim_{س \to ٢} \sqrt{د(س)}$ غير موجودة.

تمارين ٣-٣ (٤، ٥)

٤) إذا علمت أن $\lim_{س \to ١} د(س) = ٧,٢$ ، $\lim_{س \to ١} \frac{٣د(س)}{٥ع(س)} = ١,٠٨$ ، $\lim_{س \to ١} ع(س)$ موجودة، فأوجد $\lim_{س \to ١} \frac{ع(س)}{د(س)}$.

٥) لتكن د(س) دالة تربيعية حيث $\lim_{س \to ٣} د(س) = ٧$ ، $\lim_{س \to ٦} د(س) = ١٢$ ، ع(س) دالة خطيّة:

أ) إذا علمت أن $\lim_{س \to ٣} (د(س) \times ع(س)) = ٣٥$ ، $\lim_{س \to ٦} \frac{ع(س)}{د(س)} = ٠,٥$ ، فأوجِد العبارة الجبرية للدالة ع(س)، وأوجِد قيمة $\lim_{س \to ١٥} ع(س)$.

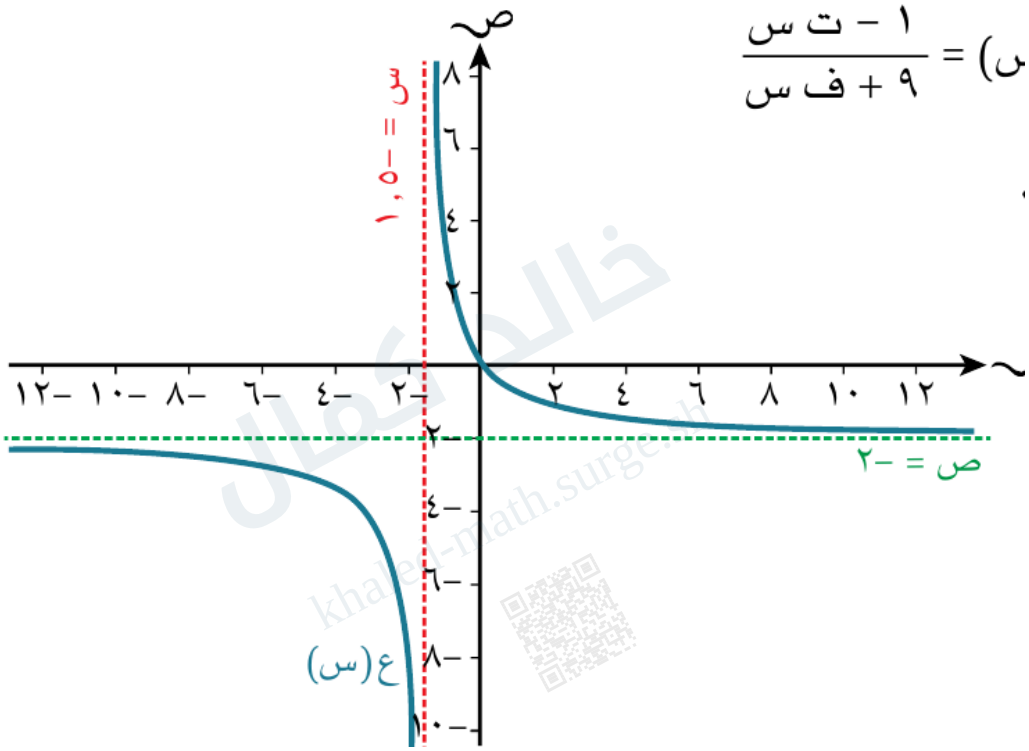
ب) ما الفرضيات التي يجب أن تقدمها لتجيب عن الجزئية (أ)؟

خالد كمال
khaled-math.sarg.sh

تمارين ٣-٣ (٦)

٦) يبيّن الشكل الآتي أجزاء من منحنى الدالة ع(س) = $\frac{\text{ا} - \text{ت س}}{٩ + \text{ف س}}$

يوجد للمنحنى خط تقارب رأسي عند س = −١,٥ ، وخط تقارب أفقي عند ص = −٢



أ) أوجِد قيمتَي ت، ف.

ب) احسب $\text{نهـــا}_{\text{س} \leftarrow ٥}$ (ع(س))^{٣} مقرّبة إلى أقرب منزلتَين عشريتَين.

٤-٣ الاتصال Continuity

يُستخدم مصطلح اتصال في الحياة اليومية ليصِف شيئًا ينساب بسلاسة، وغير منقطع مثل: الحديث دون مقاطعة، أو وجود برنامج تلفزيوني دون إعلانات.

في الرياضيات، نستخدم كلمة 'الاتصال' لوصف متغير عشوائي يمكن أن يأخذ أي قيمة ضمن مدى محدد، وبمعنى آخر أنه لا توجد قفزات أو وثبات أو خطوط تقاربية رأسية في القيم الممكنة للمتغير ضمن مدى أو فترة زمنية محددة.

ينطبق الوصف نفسه على الدوال التي يمكن أن تكون **متصلة** continuous أو **غير متصلة** discontinuous.

يمكن بحث اتصال الدالة عند نقطة ما إذا كانت معرّفة عند قيمة محددة لـ س، أو يمكن بحث اتصالها على فترة محددة إذا كانت معرّفة لكل قيم س في تلك الفترة.

في هذا الدرس سندرس الاتصال عند نقطة، أو على فترة مغلقة (الفترة التي تتضمن نقطتَي الطرفين) مثل: −٣ ≤ س ≤ ١٠ .

مساعدة: الفترة هي مجموعة أو مدى من الأعداد. في الفترة المفتوحة، لا يتم تضمين نقاط النهاية، مثل ١ < س < ٥ والتي تمثل جميع الأعداد الأكبر من ١ ولكن أصغر من ٥. أما في الفترة المغلقة، فيتم تضمين نقاط النهاية. مثل ١ ≤ س ≤ ٥ ، والتي تمثل جميع الأعداد الأكبر من أو تساوي ١ وأصغر من أو تساوي ٥

الاتصال عند نقطة

لتكون الدالة متصلة عند نقطة، يجب تحقق ثلاثة شروط كما هو موضح في النتيجة الآتية:

نتيجة ٤: تكون الدالة د(س) متصلة عند النقطة س = أ إذا -وفقط إذا- كان:

١) د(أ) موجودة

٢) $\lim_{س \to أ}$ د(س) موجودة

٣) $\lim_{س \to أ}$ د(س) = د(أ)

لتقرر ما إذا كانت الدالة د(س) متصلة أم لا عند نقطة ما، اتبع الخطوات الآتية:

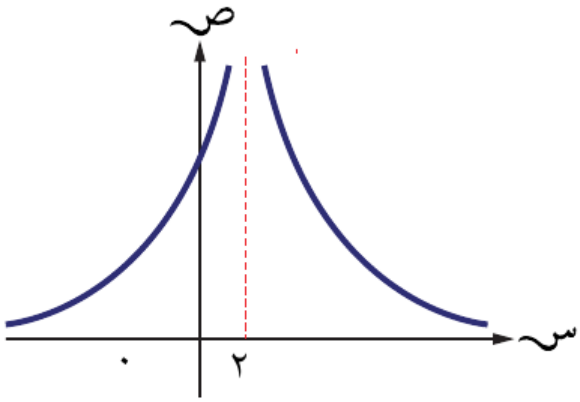
١) تحقق ممّا إذا كانت د(أ) موجودة.
إن لم تكن موجودة، فإن الدالة تكون غير متصلة عند س = أ. أما إذا كانت موجودة، فانتقل إلى الخطوة ٢

٢) تحقق ممّا إذا كانت $\lim_{س \to أ}$ د(س) موجودة (قد تحتاج إلى التحقق من أن النهاية من جهة اليمين تساوي النهاية من جهة اليسار).
إذا لم تكن النهاية موجودة، فإن الدالة تكون غير متصلة عند س = أ
إذا كانت النهاية موجودة، فانتقل إلى الخطوة ٣

٣) قارن بين كل من: $\lim_{س \to أ}$ د(س) ، د(أ).
إذا كانت القيمتان غير متساويتَين، فإن الدالة تكون غير متصلة عند س = أ
إذا كانت القيمتان متساويتَين، فإن الدالة تكون متصلة عند س = أ

مساعدة: في الشرط (١) يُقصد بـ د(أ) موجودة أي أنّ الدالة د(س) تكون معرفة عند النقطة س = أ.
يعتبر الشرط (٣) شرطًا كافيًا لإثبات الاتصال، لأنه يتضمن الشرطين (١)، (٢).

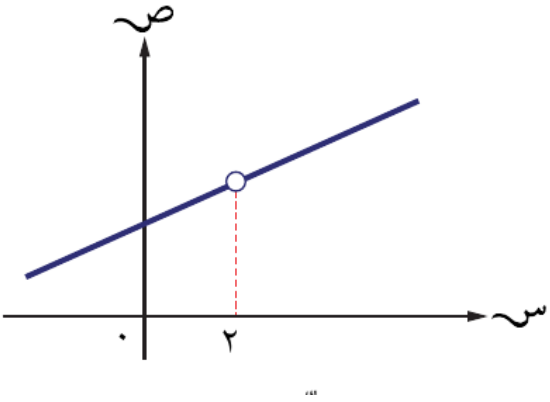
فيما يلي تمثيلات بيانية لأربع دوال غير متصلة عند س = ٢ ويرد سبب ذلك أسفل كل تمثيل بياني: يُبيّن التمثيل البياني خط التقارب وثقوبًا وقفزات:



د(س) غير معرّفة عند س = ٢

النهاية $\lim_{س \to ٢}$ د(س) غير موجودة

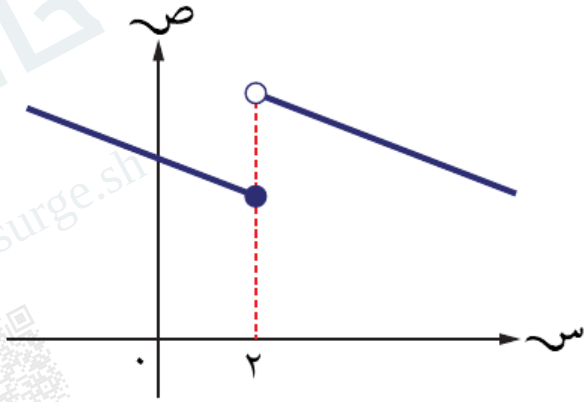
∴ $\lim_{س \to ٢}$ د(س) ≠ د(٢)



د(س) غير معرّفة عند س = ٢

النهاية $\lim_{س \to ٢}$ د(س) موجودة

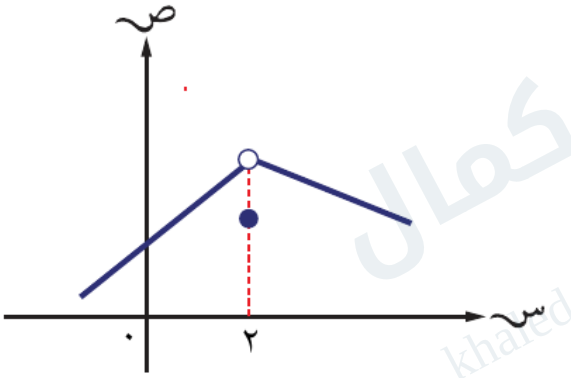
∴ $\lim_{س \to ٢}$ د(س) ≠ د(٢)



د(س) معرّفة عند س = ٢

النهاية $\lim_{س \to ٢}$ د(س) غير موجودة

∴ $\lim_{س \to ٢}$ د(س) ≠ د(٢)



د(س) معرّفة عند س = ٢

النهاية $\lim_{س \to ٢}$ د(س) موجودة

∴ $\lim_{س \to ٢}$ د(س) ≠ د(٢)

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

الاتصال على فترة مغلقة

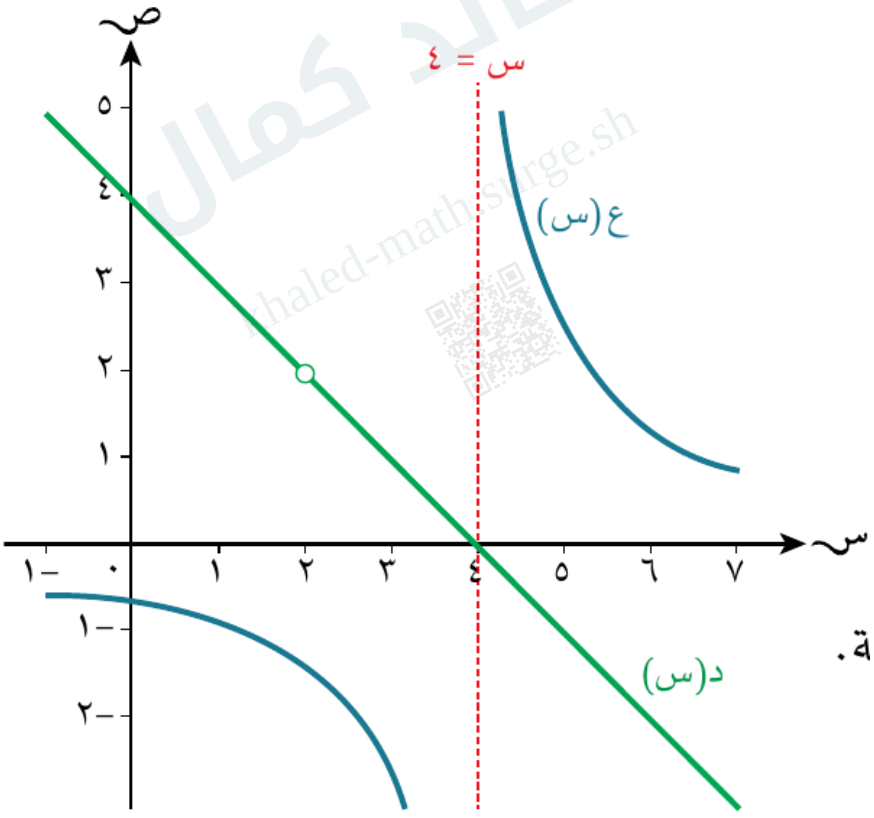
تكون الدالة متصلة على **الفترة المغلقة** **closed interval** أ ≤ س ≤ ب، إذا كانت متصلة عند كل نقطة في هذه الفترة. بحيث لا يحتوي منحنى الدالة على نقاط عدم اتصال، أي فجوات أو قفزات أو خطوط تقاربية رأسية.

أسهل طريقة لتقرر ما إذا كانت الدالة متصلة على فترة أم لا هي رسم منحنى الدالة. إذا حققت ذلك دون أن ترفع القلم عن الورقة، فإن الدالة تكون متصلة، وأمّا إذا اضطررت أن ترفعه، فإن الدالة تكون غير متصلة على الفترة.

نتيجة ٥: تكون الدالة متصلة على الفترة أ ≤ س ≤ ب إذا -وفقط إذا- كانت متصلة عند كل النقاط في تلك الفترة.

مثال ١٣

يبيّن الشكل الآتي منحنى الدالتَين د(س)، ع(س) على الفترة −١ ≤ س ≤ ٧



أ) حدّد أيًّا من الدالتَين متصلة عند النقطة: ١) س = ١ ٢) س = ٢

ب) حدّد أيًّا من الدالتَين متصلة (إن وجدت) على الفترة: ١) ٠ ≤ س ≤ ٦ ٢) ٣ ≤ س ≤ ٥

جـ) ١) إذا علمت أن د(س) = $\frac{\text{س}^{٢} - ٦\text{س} + ٨}{\text{أ} - \text{س}}$ ، فأوجِد قيمة أ التي تكون عندها الدالة غير متصلة.

٢) إذا علمت أن ع(س) = $\frac{٣}{\text{س} + \text{ب}}$ ، فأوجِد قيمة ب التي تكون عندها الدالة غير متصلة.

حلّ مثال ١٣

الحل

أ) ١) كلا الدالتَين د(س)، ع(س) متصلة عند س = ١

د(١)، ع(١) موجودتان، والنهاية موجودة عند كل منهما. في الحالتَين قيمة الدالة تساوي النهاية عند س = ١

٢) الدالة ع(س) متصلة عند س = ٢

ع(٢) موجودة، والنهاية موجودة وقيمتها تساوي ع(٢). د(٢) غير موجودة، وذلك لوجود فجوة في منحنى الدالة.

ب) ١) الدالتان د(س)، ع(س) غير متصلتَين على الفترة ٠ ≤ س ≤ ٦

د(٢)، ع(٤) غير موجودتين وذلك لوجود فجوة وخط تقارب رأسي على الترتيب. تقع النقطتان س = ٢، س = ٤ في الفترة ٠ ≤ س ≤ ٦، لذا الدالتان غير متصلتَين على الفترة.

تابع الحل

٢) الدالة د(س) متصلة على جميع نقاط الفترة ٣ ≥ س ≥ ٥ . الدالة ع(س) غير متصلة على الفترة ٣ ≥ س ≥ ٥ ، لأنها غير معرّفة عند س = ٤

تابع الحل (ج)

ج) ا) ∵ د(س) غير متصلة عند س = ٢

∴ أ − ٢ = ٠ ، فيكون أ = ٢

الدالة د(س) غير معرّفة عند س = ٢ لأن المقام يساوي صفرًا عندها.

٢) ∵ ع(س) غير متصلة عند س = ٤

∴ ٤ + ب = ٠ ، فيكون ب = −٤

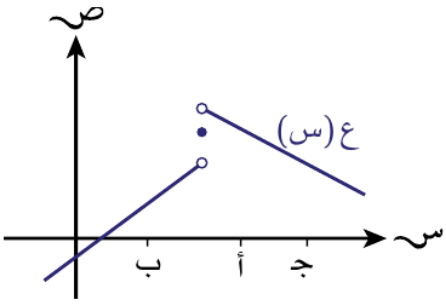
الدالة ع(س) غير معرّفة عند س = ٤ لأن المقام يساوي صفرًا عندها.

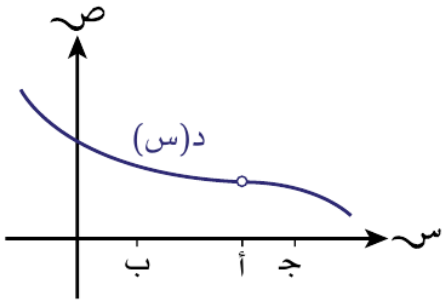
خالد كمال
khaledmath.surge.sa

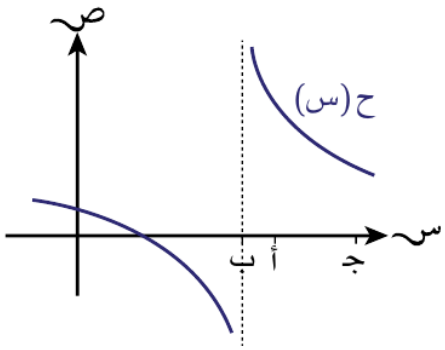
تمارين ٣-٤

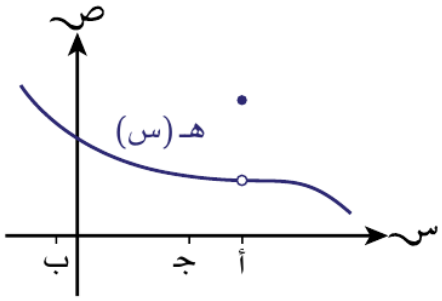
ا) في كل دالة مما يأتي، حدّد فيما إذا كانت الدالة متصلة أو غير متصلة مع ذكر السبب:

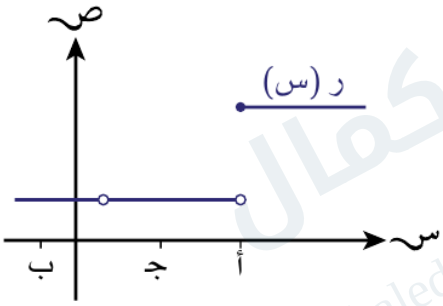
أ) عند س = أ . **ب)** على الفترة ب ≥ س ≥ جـ .

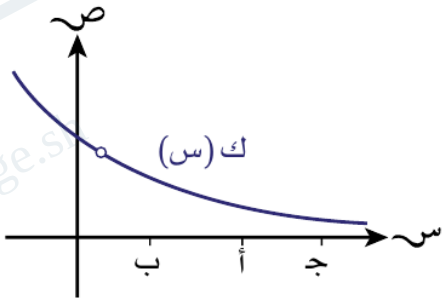








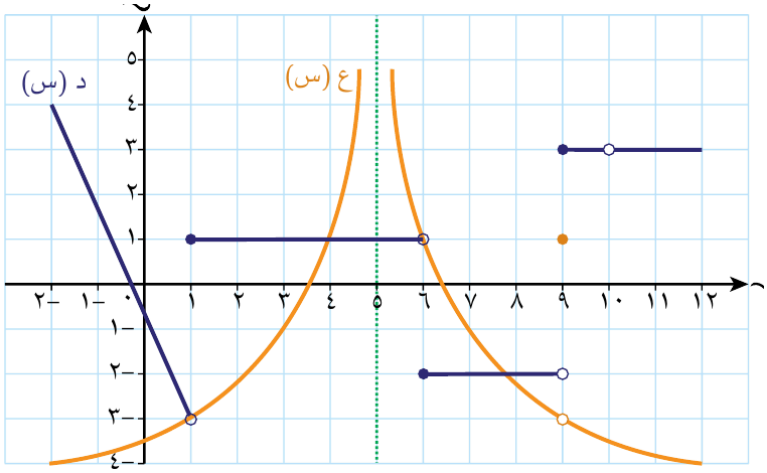




خالد كمال
khaled-math.surge.sh

تمارين ٣-٤ (٢)

٢) يبيّن الشكل الآتي منحنى الدالتَين د(س)، ع(س) في الفترة $-٢ \leq س \leq ١٢$:



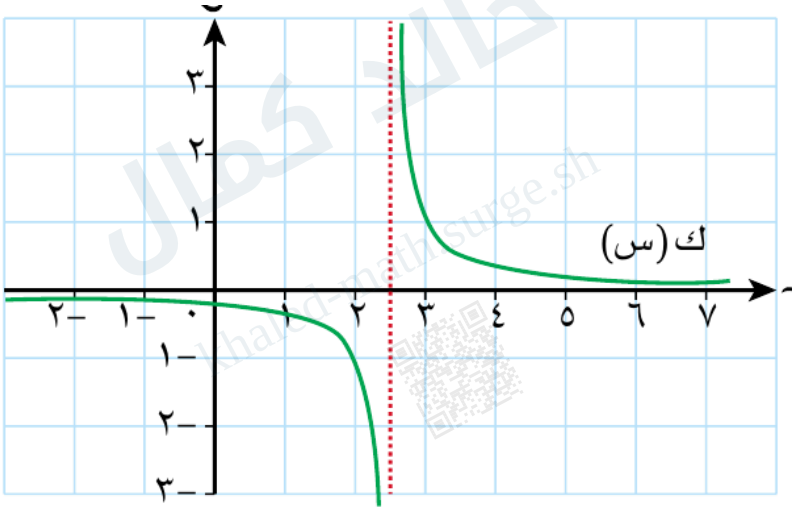
أ) عند أي نقطة (أو نقاط) في الفترة −٢ ≤ س ≤ ١٢ تكون الدالة ع(س) غير متصلة؟ أعطِ سببًا لكل منها.

ب) عند أي نقطة (أو نقاط) في الفترة −٢ ≤ س ≤ ١٢ تكون الدالة د(س) غير متصلة؟ أعطِ سببًا لكل منها.

ج) أي الدالتَين د(س)، ع(س) متصلة على الفترة −٢ ≤ س ≤ ١؟ برّر إجابتك.

تمارين ٣-٤ (٣ - ٧)

٣) يبيّن الشكل المقابل جزءًا من منحنى الدالة ك(س).



أ) اكتب معادلة خط التقارب الرأسي.

ب) إذا علمت أن ك(س) = $\frac{\text{ا}}{\text{ت س + ف}}$ وتمر بالنقطة (٢، −١)، فأوجِد قيمة كل من ت، ف التي تكون عندها الدالة غير متصلة.

ج) استخدم المنحنى لتوضح أن الدالة ك(س) متصلة على الفترة ٣ ≤ س ≤ ٧

د) بيّن أن الدالة ك(س) غير متصلة على الفترة ١ ≤ س ≤ ٤

هـ) إذا علمت أن الدالة ك(س) متصلة على الفترة −٢ ≤ س ≤ أ، فأوجِد قيمة أكبر عدد صحيح ممكن لـ أ .

تمارين ٣-٤ (٤ - ٧)

٤) بيّن أن الدالة د(س) = $\frac{٤}{٢ - س}$ متصلة عند س = ١

٥) لتكن الدالة د(س) = $\frac{١}{س}$:

أ) بيّن أن الدالة د(س) متصلة على الفترة ١ ≤ س ≤ ١٠

ب) اكتب أي فترة مغلقة بحيث تكون الدالة د(س) = $\frac{١}{س}$ غير متصلة عندها.

٦) بيّن أن الدالة د(س) = $\frac{س + ٥}{س - ٨}$ متصلة على الفترة ٠ ≤ س ≤ ٥ ، وغير متصلة على الفترة ٥ ≤ س ≤ ١٠

٧) لتكن الدالة د(س) = $\frac{١}{س^{٢} - ٨س - ٢٠}$

أ) بيّن أن الدالة د(س) غير متصلة على الفترة ٩ ≤ س ≤ ١١

ب) أوجِد قيمة س السالبة بحيث تكون د(س) غير متصلة.

قائمة التحقق من التعلّم والفهم (١)

نهاية الدالة عند نقطة

- إذا كانت أ ، ل أعدادًا حقيقية، فإن: $\text{نهـا}_{س \to أ}$ د(س) = ل ⇔ $\text{نهـا}_{س \to أ^{+}}$ د(س) = $\text{نهـا}_{س \to أ^{-}}$ د(س) = ل.

• لكل قيم ن > ٠ ، أ عدد حقيقي: $\text{نهـــا}_{س \to +\infty} \frac{أ}{س^{ن}} = ٠$ ، $\text{نهـــا}_{س \to -\infty} \frac{أ}{س^{ن}} = ٠$

خواص النهايات

إذا كان ك عددًا حقيقيًا، أ ∈ مجال كلٍّ من د(س)، ع(س)، وكانت $\text{نهـــا}_{س \to أ}$ د(س) ، $\text{نهـــا}_{س \to أ}$ ع(س) موجودتين، فإن:

١) $\text{نهـــا}_{س \to أ}$ (ك د(س)) = ك $\text{نهـــا}_{س \to أ}$ د(س)

٢) $\text{نهـــا}_{س \to أ}$ (د(س) + ع(س)) = $\text{نهـــا}_{س \to أ}$ د(س) + $\text{نهـــا}_{س \to أ}$ ع(س)

٣) $\text{نهـــا}_{س \to أ}$ (د(س) − ع(س)) = $\text{نهـــا}_{س \to أ}$ د(س) − $\text{نهـــا}_{س \to أ}$ ع(س)

٤) $\text{نهـــا}_{س \to أ}$ (د(س) × ع(س)) = $\text{نهـــا}_{س \to أ}$ د(س) × $\text{نهـــا}_{س \to أ}$ ع(س)

٥) $\text{نهـــا}_{س \to أ} \frac{د(س)}{ع(س)} = \frac{\text{نهـــا}_{س \to أ} د(س)}{\text{نهـــا}_{س \to أ} ع(س)}$ ، $\text{نهـــا}_{س \to أ}$ ع(س) ≠ ٠

٦) $\text{نهـــا}_{س \to أ}$ (د(س))^{ن} = ($\text{نهـــا}_{س \to أ}$ د(س))^{ن} ، حيث ن عدد صحيح موجب.

٧) إذا كان $\text{نهـــا}_{س \to أ}$ د(س) > ٠ فإن $\text{نهـــا}_{س \to أ} \sqrt[ن]{د(س)} = \sqrt[ن]{\text{نهـــا}_{س \to أ} د(س)}$ ، حيث ن عدد صحيح موجب.

نتائج أخرى لنهايات خاصة:

أ) $\text{نهـــا}_{س \to أ}$ جـ = جـ ، حيث جـ عدد ثابت

ب) $\text{نهـــا}_{س \to أ}$ س = أ

ج) $\text{نهـــا}_{س \to أ}$ س^{ن} = أ^{ن} ، حيث ن عدد صحيح موجب.

د) $\lim_{س \to أ} \sqrt[ن]{س} = \sqrt[ن]{أ}$ ، حيث ن عدد صحيح موجب ، أ > ٠

قائمة التحقق من التعلّم والفهم (٢)

الاتصال

• تكون الدالة د(س) متصلة عند النقطة س = أ **إذا -وفقط إذا-** تحققت الشروط الثلاثة الآتية:

١) د(أ) موجودة

٢) $\lim_{س \to أ}$ د(س) موجودة

٣) $\lim_{س \to أ}$ د(س) = د(أ)

• تكون الدالة متصلة على الفترة أ ≤ س ≤ ب، **إذا -وفقط إذا-** كانت متصلة عند كل النقاط في تلك الفترة.

خالد كمال
khaled-math.edu.sh

تمارين مراجعة نهاية الوحدة الثالثة

١) إذا كان منحنى الدالة ع(س) = $\frac{س^{٢} - ٢س - ١٥}{س + ٣}$ مستقيمًا يتضمن فجوة:

أ عند أي قيمة لـ س تكون الدالة ع(س) غير معرّفة؟

ب أوجد إحداثيات الفجوة.

٢) يبيّن الجدول الآتي بعض قيم الدالة د(س) = $\frac{س^{٥} - ٢س^{٤} - ٢٩س + ٣٠}{س^{٢} + ٢س - ٤٨}$ مقرّبة إلى أقرب ٤ منازل عشرية:

س	د(س)
٥,٩	٣,٨٤٢٤
٥,٩٩	٣,٩١٩٩
٥,٩٩٩	أ

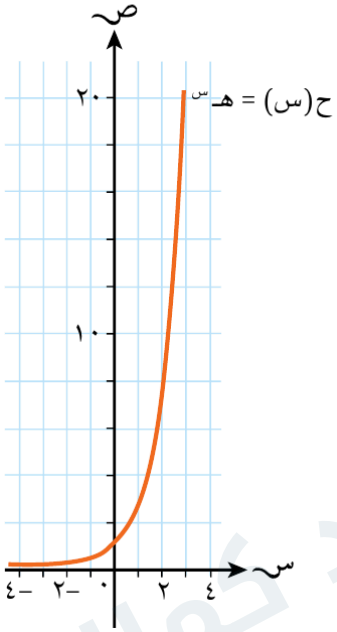
س	د(س)
٦,١	٤,٠١٤٩
٦,٠١	٣,٩٣٧٢
٦,٠٠١	ب

أ أوجِد قيمة كلٍّ من أ، ب مقرّبة إلى أقرب ٤ منازل عشرية.

ب بيّن أن $\lim_{س \to ٦}$ د(س) ≠ د(٦)

تمارين المراجعة (٣)

٣) رسم سيف منحنى الدالة ح (س) = هـ^{س} في الفترة $-٤ \leqslant س \leqslant ٣$



مُساعَدة

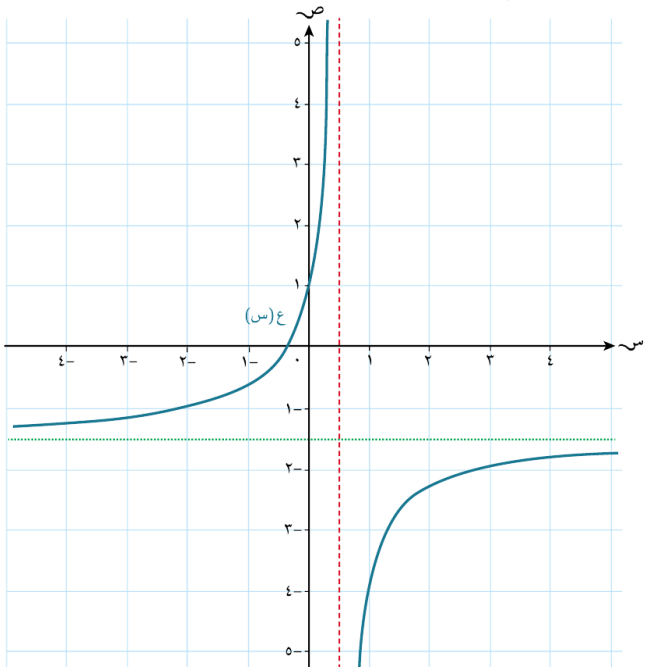
تذكّر أن العدد
هـ = ٢,٧١٨٢ لأقرب ٤ منازل عشرية

أ يدعي سيف أن الدالة متصلة على الفترة $-٤ \leqslant س \leqslant ٣$، وغير متصلة على الفترة $-٤ \leqslant س \leqslant ٤$؛ بسبب وجود خط تقارب رأسي بين س = ٣، س = ٤
هل تتفق مع سيف؟ برر إجابتك.

ب أوجِد $\lim_{س \to -\infty}$ ح (س).

تمارين المراجعة (٤)

٤) يبيّن الشكل المقابل منحنى الدالة ع (س) حيث $ع(س) = \frac{٣س + ١}{١ - ٢س}$:



أ ١) بيّن أن $\lim_{س \to ٠,٥}$ ع(س) غير موجودة.

٢) اكتب معادلة خط التقارب الرأسي المشار إليه بالمستقيم المنقط.

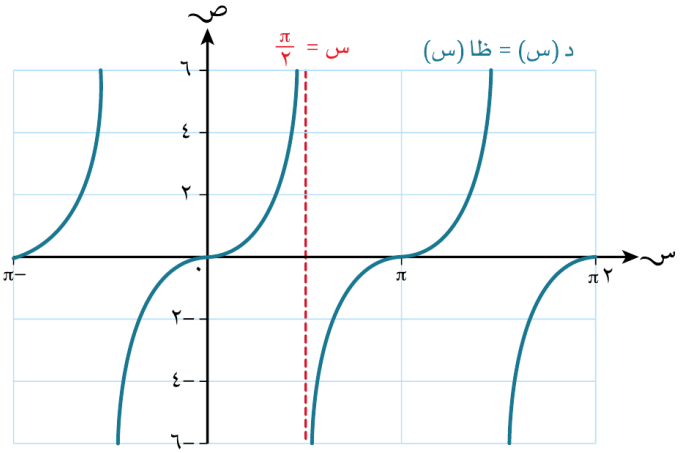
ب ١) أوجِد $\lim_{س \to \infty}$ ع(س).

٢) اكتب معادلة خط التقارب الأفقي المشار إليه بالمستقيم المنقط.

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

تمارين المراجعة (٥)

٥) يبيّن الشكل المقابل جزءًا من منحنى الدالة د (س) = ظا س.



أ علامَ يدل خط التقارب الرأسي عند س = $\frac{\pi}{٢}$؟

ب ضمن الفترة المبيّنة على الشكل يوجد خطان تقاربيان رأسيّان آخران لم يتم رسمهما على الشكل. اكتب معادلة كلّ منهما.

ج بيّن مدى صحة كل عبارة من العبارات الآتية:

١) الدالة د (س) متصلة على الفترة $٠ \geq س \geq \pi$

٢) الدالة د (س) غير متصلة على الفترة $-\frac{١}{٤} \geq س \geq \frac{١}{٤}$

٣) منحنى الدالة ع(س) = ظا $\frac{س}{٢}$، له نقاط عدم اتصال أقل من الدالة د (س) = ظا س في الفترة $-٤\pi \geq س \geq ٤\pi$

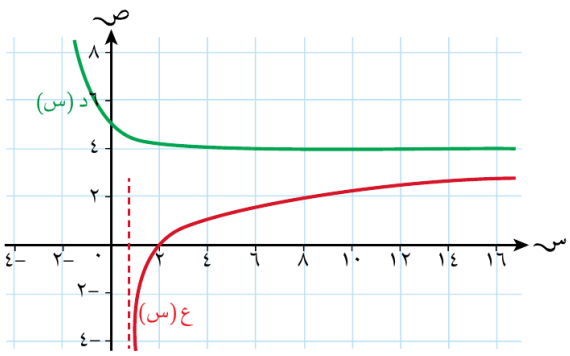
مُساعَدة

تذكّر أنه يتم الوصول إلى ص = ظا (أس) من خلال تمدد ص = ظا س معامله $\frac{١}{أ}$ باتجاه موازٍ للمحور السيني.

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

تمارين المراجعة (٦)

٦) يبيّن الشكل المقابل أجزاء من منحنى الدالتَين د (س) = ٤ + هـ$^{-س}$، ع (س) = لط(س − ١)



أ لمنحنى الدالة د(س) خط تقارب أفقي:

١) أنشئ جدولًا، واستخدمه لتجد معادلة خط التقارب الأفقي.

٢) أوجِد قيمة ك إذا علمت أن نهـــــا ك د (س) = ١
س ← ∞

ب إذا علمت أنه لا يوجد للدالة ع (س) خط تقارب أفقي. فعلامَ يدلك نهـــــا ع(س)؟
س ← ∞

ورقة الإجابات النموذجية ٣-أ١

٣) النهاية = ٦ (د(٦) = ١٠٨ − ١٠٢ = ٦)

٤) النهاية = ٦٤ (ك(٩) = ١٠٠ + ٤٥ − ٨١ = ٦٤)

٥) النهاية = −٢ (م(−٢) = −٨ − ٤٤ + ١٤ + ٣٦ = −٢)

٦) النهاية = ٢٤ (ن(٤) = ٣٢ − ٨ = ٢٤)

الأسئلة ١، ٢، ٧ لم أضع لها إجابة هنا.

ملاحظة: الإجابات من حسابي لأن كتاب الطالب لا يتضمن مفتاح إجابات.

ورقة الإجابات النموذجية ٣-اب

١) أ) ١) س = ٥ ٢) الفجوة (٥، ٢) ب) ١) س = −٤ ٢) الفجوة (−٤، −٨)

ج) ١) س = ٣ ٢) الفجوة (٣، ٩) د) ١) س = −٢ ٢) الفجوة (−٢، −٢٦)

٣) أ = ٥,٠٠٠١ ، ب = ٤,٩٩٩٩ ب) النهايتان من اليمين ومن اليسار متساويتان ج) النهاية = ٥

٤) أ) المقام = صفر عند س = ٤ ب) ١) ١ ٢) ١ ج) النهاية من اليمين تساوي النهاية من اليسار = ١

٥) من اليمين: د(٠٫١) = ٩٫٩-، د(٠٫٠١) = ٩٩٫٩٩-، د(٠٫٠٠١) = ٩٩٩٫٩٩٩- (تتناقص بلا حد).
من اليسار: د(−٠٫١) = ٩٫٩، د(−٠٫٠١) = ٩٩٫٩٩ (تتزايد بلا حد).
ب) لا يمكن إيجاد أي من النهايتين لأن القيم لا تقترب من عدد محدد. ج) $\lim_{س \to ٠}$ د(س) غير موجودة.

السؤالان ٢ (من الرسم) غير مضمّنين.

ملاحظة: الإجابات من حسابي لأن كتاب الطالب لا يتضمن مفتاح إجابات.

ورقة الإجابات النموذجية ٢-٣

١) أ) ٧ ب) −٢ ج) ٣ د) −١/٢ هـ) ٤ و) −٢٫٤ ز) ٠ ح) ٨ ط) ٠ ي) غير موجودة

٢) أ) $\frac{٤ - س^{٢}}{س}$ ب) النهاية غير موجودة

٣) أ = ±٢

٤) ت = $\frac{١}{٤}$

ملاحظة: الإجابات من حسابي لأن كتاب الطالب لا يتضمن مفتاح إجابات.

ورقة الإجابات النموذجية ٣-٣

١) أ) ١٨ ب) ٨٠ ج) ١٠٠ د) ٥

٢) أ) −٩ ب) ٤

٤) $\frac{ع(س)}{د(س)}$: النهاية = $\frac{٥}{٩}$

٥) ع(س) = س + ٢ ، النهاية عند ١٥ = ١٧

٦) ف = ٦ ، ت = ١٢

السؤال ٣ (من الرسم) غير مضمّن.

ملاحظة: الإجابات من حسابي لأن كتاب الطالب لا يتضمن مفتاح إجابات.

ورقة الإجابات النموذجية ٣-٤

٤) د(١) = ٤ ، والنهاية عند س = ١ تساوي ٤ ، فالدالة متصلة عند س = ١

٥) أ) المقام لا يساوي صفرًا في الفترة ١ ≥ س ≥ ١٠ ، فالدالة متصلة. ب) أي فترة تحوي الصفر، مثل −١ ≥ س ≥ ١

٦) س = ٨ لا تقع في ٠ ≥ س ≥ ٥ فالدالة متصلة، وتقع في ٥ ≥ س ≥ ١٠ فالدالة غير متصلة.

٧) س^{٢} − ٨س − ٢٠ = (س − ١٠)(س + ٢) ؛ أ) س = ١٠ تقع في الفترة ٩ ≥ س ≥ ١١ فالدالة غير متصلة. ب) س = −٢

الأسئلة ١، ٢، ٣ (من الرسم) غير مضمّنة.

ملاحظة: الإجابات من حسابي لأن كتاب الطالب لا يتضمن مفتاح إجابات.

ورقة الإجابات النموذجية: مراجعة الوحدة

١) أ) س = −٣ ب) الفجوة (−٣، −٨) لأن ع(س) = س − ٥ عند س ≠ −٣

٢) أ) أ = ٣٫٩٢٧٧ ، ب = ٣٫٩٢٩٤ ب) البسط = (س − ٦)(س − ١)(س + ٥) والمقام = (س − ٦)(س + ٨) ، فالنهاية = $\frac{٥ \times ١١}{١٤} = \frac{٥٥}{١٤}$ ≈ ٣٫٩٢٩ ، ود(٦) غير معرّفة، فالنهاية ≠ د(٦)

٣) أ) لا يتفق: الدالة هـ^س متصلة على الفترتين لأنه لا يوجد لها خط تقارب رأسي.
ب) النهاية = ٠

٤) أ) ١) المقام = صفر عند س = ٠٫٥ ، والنهاية من اليسار تقترب من +∞ ومن اليمين من −∞ فلا توجد نهاية. ٢) س = ٠٫٥ ب) ١) −١٫٥ ٢) ص = −١٫٥

٥) أ) الدالة ظا س غير معرّفة عند س = $\frac{\pi}{٢}$ ، والنهاية لا نهائية. ب) س = $-\frac{\pi}{٢}$ ، س = $\frac{\pi ٣}{٢}$ ج) ١) خطأ لأنها غير متصلة عند س = $\frac{\pi}{٢}$ ٢) خطأ (بقراءتي الفترة −١ ≤ س ≤ ١ ، والدالة متصلة عليها) ٣) صحيح: لظا س ٨ نقاط عدم اتصال، ولظا(س/٢) أربع نقاط (±π، ±٣π).

٦) أ) ١) الدالة تقترب من ٤ ٢) ك = $\frac{١}{٤}$ ب) ع(س) تزداد بلا حد عندما س ← ∞ ج) لأن ع(س) تنزل بلا حد عندما تقترب س من ١ من اليمين د) ١) ≈ ٢٫٨ ٢) ≈ ٠٫١ هـ) د(٢) ≠ ٠ و ع(٢) = ٠ فالنسبة تتزايد بلا حد، فالنهاية غير موجودة.

ملاحظة: الإجابات من حسابي لأن كتاب الطالب لا يتضمن مفتاح إجابات.