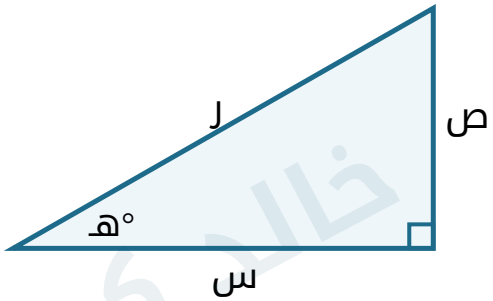
١-٢ الزوايا بين ٠° و ٩٠°

لقد درست سابقًا النسب المثلثية الآتية:

$$\text{جا هـ} = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} \quad ، \quad \text{جتا هـ} = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} \quad ، \quad \text{ظا هـ} = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$$



ومن خلال الشكل نجد أن:

$$\text{جا هـ} = \frac{\text{ص}}{\text{ل}} \quad ، \quad \text{جتا هـ} = \frac{\text{س}}{\text{ل}} \quad ، \quad \text{ظا هـ} = \frac{\text{ص}}{\text{س}}$$

مثال ١

مثال ١

إذا علمت أن: جتا هـ $= \frac{\sqrt{٥}}{٣}$ ، حيث ٠° ≤ هـ ≤ ٩٠°

أ) فأوجد قيمة كل مما يأتي:

١) جتا^{٢} هـ ٢) جا هـ ٣) ظا هـ

مثال ١ (تابع)

ب) أثبت أن $\frac{\text{ا} - \text{ظا}^٢ \text{هـ}}{\text{جتا هـ} + \text{جا هـ}} = \frac{٦ - ٥\sqrt{٣}}{٥}$

حل مثال ١ (أ)

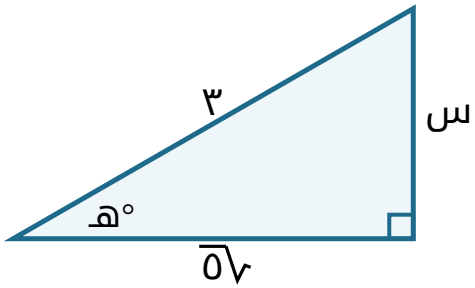
الحل

أ) ١) $\text{جتا}^٢ \text{هـ} = \text{جتا هـ} \times \text{جتا هـ}$

$= \frac{٥\sqrt{}}{٣} \times \frac{٥\sqrt{}}{٣} = \frac{٥}{٩}$

مساعدة: $\text{جتا}^٢ \text{هـ} = \text{جتا هـ} \times \text{جتا هـ}$

٢) لأن جتا هـ $= \frac{٥\sqrt{}}{٣}$ فالزاوية هـ موجودة في مثلث قائم الزاوية كما هو موضح في الشكل:



س = $\sqrt{٣^٢ - (\sqrt{٥})^٢}$ = $\sqrt{٤}$ = ٢ (نظرية فيثاغورث)

∴ جا هـ = $\frac{٢}{٣}$

٣) باستخدام المثلث نجد أن: ظا هـ = $\frac{٢}{\sqrt{٥}}$

حل مثال ١ (ب)

الحل

ب) $\frac{\text{١ − ظا}^٢ \text{هـ}}{\text{جتا هـ + جا هـ}} = \frac{١ - (\frac{٢}{\sqrt{٥}})^٢}{\frac{٢}{٣} + \frac{\sqrt{٥}}{٣}}$ (عوّض ثم بسّط)

$= \frac{\frac{١}{٥}}{\frac{٢ + \sqrt{٥}}{٣}}$

$= \frac{٣}{٥(٢ + \sqrt{٥})}$ (اضرب كلًّا من البسط والمقام في ١٥)

$= \frac{٣(٢ - \sqrt{٥})}{٥(٢ - \sqrt{٥})(٢ + \sqrt{٥})}$ (مرافق المقام لإنطاق المقام)

$(٢ - \sqrt{٥})(٢ + \sqrt{٥}) = ٤ - ٥ = -١$

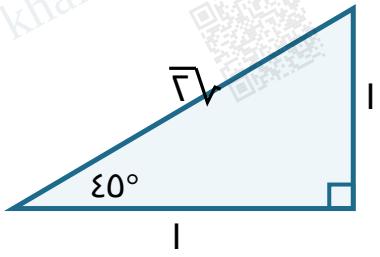
الحل (تابع)

$$= \frac{٣\sqrt{٥} - ٦}{٥}$$

النسب المثلثية للزوايا الخاصة

يمكننا الحصول على قيم الجيب، وجيب التمام، والظل للزوايا الخاصة ٣٠°، ٤٥°، ٦٠° أو $\frac{\pi}{٦}$ ، $\frac{\pi}{٤}$ ، $\frac{\pi}{٣}$ من المثلثين أدناه:

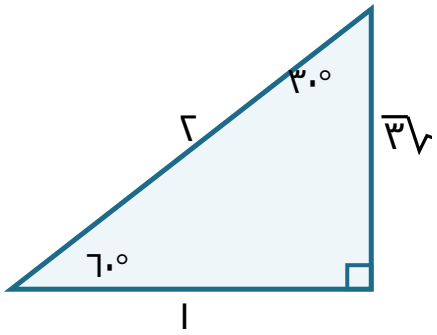
المثلث الأول: مثلث قائم الزاوية متطابق الضلعين طول كل من ضلعيه وحدة واحدة. نجد طول الضلع الثالث بنظرية فيثاغورث: $\sqrt{١^٢ + ١^٢} = \sqrt{٢}$



المثلث الثاني

مثلث متطابق الأضلاع طول ضلعه وحدتان. العمود المنصّف للقاعدة يقسم المثلث متطابق الأضلاع إلى مثلثين قائمي الزاوية متطابقين. نجد طول ارتفاع المثلث بنظرية فيثاغورث:

$$\sqrt{٢^٢ - ١^٢} = \sqrt{٣}$$



إنطاق المقام: هو جعل المقام خاليًا من الجذور، وذلك بضرب الجذر في نفسه بسطًا ومقامًا: $\frac{١}{\sqrt{٢}} = \frac{\sqrt{٢}}{٢}$ ، $\frac{١}{\sqrt{٣}} = \frac{\sqrt{٣}}{٣}$

النتائج المهمة

	جا هـ	جتا هـ	ظا هـ
$هـ = \frac{\pi}{٦} = ٣٠°$	$\frac{١}{٢}$	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	$\frac{١}{\sqrt{٣}}$
$هـ = \frac{\pi}{٤} = ٤٥°$	$\frac{١}{\sqrt{٢}}$	$\frac{١}{\sqrt{٢}}$	١
$هـ = \frac{\pi}{٣} = ٦٠°$	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	$\frac{١}{٢}$	$\sqrt{٣}$

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

احفظ هذا الجدول: يُستخدم في كل أمثلة وتمارين هذا الدرس.

مثال ٢

مثال ٢

أوجد قيمة كل مما يأتي:

أ) $\text{جا } ٣٠^\circ \times \text{جتا } ٤٥^\circ$

ب) $\text{جا}^٢ \frac{\pi}{٣}$

ج) $\frac{٢ \text{ جتا } \frac{\pi}{٤} \text{ جا } \frac{\pi}{٦}}{\text{جتا}^٢ \frac{\pi}{٣} + \text{جا}^٢ \frac{\pi}{٣}}$

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

حل مثال ٢ (أ، ب)

الحل

أ) $\text{جا } ٣٠^\circ \times \text{جتا } ٤٥^\circ = \frac{١}{٢} \times \frac{١}{\sqrt{٢}} = \frac{١}{٢\sqrt{٢}}$

(إنطاق المقام) $= \frac{١ \times \sqrt{٢}}{\sqrt{٢} \times ٢\sqrt{٢}} = \frac{\sqrt{٢}}{٤}$

الحل (تابع)

ب) $\text{جا}^{٢}\frac{\pi}{٣} = \text{جا}\frac{\pi}{٣} \times \text{جا}\frac{\pi}{٣} = \frac{\sqrt{٣}}{٢} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} = \frac{٣}{٤}$

عند ضرب نسبتين مثلثيتين ليس ضروريًا وضع إشارة الضرب بينهما.

حل مثال ٢ (ج)

الحل

ج) $\frac{٢\ \text{جتا}\frac{\pi}{٤}\ \text{جا}\frac{\pi}{٦}}{\text{جتا}^{٢}\frac{\pi}{٣} + \text{جا}^{٢}\frac{\pi}{٣}}$

$= \frac{٢ \times \frac{١}{\sqrt{٢}} \times \frac{١}{٢}}{(\frac{١}{٢})^{٢} + (\frac{\sqrt{٣}}{٢})^{٢}}$

$= \frac{\frac{١}{\sqrt{٢}}}{١}$ (يُبسّط المقام إلى ١ = $\frac{٣}{٤} + \frac{١}{٤}$)

الحل (تابع)

$= \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (إنطاق المقام)

تمارين ٢-١

١) إذا علمت أن جتا هـ $= \frac{٤}{٥}$ ، حيث هـ زاوية حادة، فأوجد قيمة كل مما يأتي:

أ جا هـ

ب ظا هـ

ج ٢ جا هـ جتا هـ

د $\frac{٥}{\text{ظا هـ}}$

هـ $\frac{١ - \text{جا}^{٢}\text{هـ}}{\text{جتا هـ}}$

و $\frac{٣ - \text{جا هـ}}{٣ + \text{جتا هـ}}$

خالد كمال
khaled-mathsurge.sh

تمارين ٢-١ (تابع ١)

٢) إذا علمت أن ظا هـ = $\frac{٢}{\sqrt{٥}}$ ، وأن هـ زاوية حادة، فأوجد قيمة كل مما يأتي:

أ جا هـ

.....

ب جتا هـ

.....

ج جا^{٢} هـ + جتا^{٢} هـ

.....

د $\frac{\text{جتا هـ}}{\text{جا هـ}}$

.....

هـ $\frac{٢}{١ + \text{جا هـ}}$

.....

و $\frac{٥}{١ + \text{جتا هـ}}$

.....

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

تمارين ٢-١ (تابع ٢)

٣) إذا علمت أن جا هـ = $\frac{١}{٤}$ ، وأن الزاوية هـ حادة، فأوجد قيمة كل مما يأتي:

أ جتا هـ

.....

ب ظا هـ

.....

ج ١ − جا^{٢} هـ

.....

د $\frac{\text{جا هـ} \times \text{جتا هـ}}{\text{ظا هـ}}$

.....

هـ $\frac{١}{\text{جا هـ}} + \frac{١}{\text{ظا هـ}}$

.....

و $٥ - \frac{\text{ظا هـ}}{\text{جا هـ}}$

.....

تمارين ٢-١ (تابع ٣)

٤) أوجد قيمة كل مما يأتي:

أ $\text{جا } ٣٠^\circ \times \text{جتا } ٦٠^\circ$

ب $\text{جا}^٢ ٤٥^\circ$

ج $\text{جا } ٤٥^\circ + \text{جتا } ٣٠^\circ$

د $\dfrac{\text{جا } ٦٠^\circ}{\text{جا } ٣٠^\circ}$

هـ $\dfrac{\text{جا}^٢ ٤٥^\circ}{٢ + \text{ظا } ٦٠^\circ}$

و $\dfrac{\text{جا}^٢ ٣٠^\circ + \text{جتا}^٢ ٣٠^\circ}{٢ \text{ جا } ٤٥^\circ \times \text{جتا } ٤٥^\circ}$

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

تمارين ٢-١ (تابع ٤)

٥) أوجد قيمة كل مما يأتي:

أ $\text{جا}\frac{\pi}{٤} \times \text{جتا}\frac{\pi}{٤}$

ب $\text{جتا}^{٢}\frac{\pi}{٣}$

ج $١ - ٢\,\text{جا}^{٢}\frac{\pi}{٦}$

د $\dfrac{\text{جا}\frac{\pi}{٦} - \text{ظا}\frac{\pi}{٣}}{\text{جا}\frac{\pi}{٤}}$

هـ $\dfrac{١}{\text{ظا}\frac{\pi}{٤}} - \dfrac{١}{\text{جتا}\frac{\pi}{٣}}$

و $\dfrac{\text{جتا}\frac{\pi}{٣} + \text{ظا}\frac{\pi}{٦}}{\text{جا}\frac{\pi}{٣}}$

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

تمارين ٢-١ (تابع ٥)

٦) انسخ الجدول أدناه، ثم أكمله، حيث $0 \le هـ \le \frac{\pi}{2}$:

النسب المثلثية \ الزوايا	هـ = ...	هـ = ...	هـ = ...
.....	١	$\sqrt{٣}$	$\frac{١}{\sqrt{٣}}$
جتا هـ	$\frac{١}{\sqrt{٢}}$	$\frac{١}{٢}$	.....
$\frac{١}{\text{جا هـ}}$	.....	.....	٢

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

ورقة الإجابات النموذجية ٢-١

تمرين ١: أ) $\frac{٣}{٥}$ | ب) $\frac{٣}{٤}$ | ج) $\frac{٢٤}{٢٥}$ | د) $\frac{٢٠}{٣}$ | هـ) $\frac{٤}{٥}$ | و) $\frac{١٢}{١٩}$

تمرين ٢: أ) $\frac{٢}{٣}$ | ب) $\frac{\sqrt{٥}}{٣}$ | ج) ١ | د) $\frac{\sqrt{٥}}{٢}$ | هـ) $\frac{٦}{٥}$ | و) $\frac{٤٥ - ١٥\sqrt{٥}}{٤}$

تمرين ٢ و: $٥ \div (١ + \frac{\sqrt{٥}}{٣})$ بعد إنطاق المقام.

تمرين ٣: أ) $\frac{\sqrt{١٥}}{٤}$ | ب) $\frac{١}{\sqrt{١٥}}$ | ج) $\frac{١٥}{١٦}$ | د) $\frac{١٥}{١٦}$ | هـ) $٤ + \sqrt{١٥}$ | و) $٥ - \frac{٤\sqrt{١٥}}{١٥}$

تمرين ٤: أ) $\frac{١}{٤}$ | ب) $\frac{١}{٢}$ | ج) $\frac{\sqrt{٢} + \sqrt{٣}}{٢}$ | د) $\sqrt{٣}$ | هـ) $\frac{٢ - \sqrt{٣}}{٢}$ | و) ١

تمرين ٥: أ) $\frac{١}{٢}$ | ب) $\frac{١}{٤}$ | ج) $\frac{١}{٢}$ | د) $\frac{\sqrt{٢} - ٢\sqrt{٦}}{٢}$ | هـ) -١ | و) $\frac{٢ + \sqrt{٣}}{٣}$

تمرين ٦: الصف الأول ظاهـ ، والزوايا بالترتيب: هـ = $\frac{\pi}{٤}$ ، $\frac{\pi}{٣}$ ، $\frac{\pi}{٦}$ ؛ جتاهـ للزاوية الثالثة = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ؛ والصف الثالث: $\sqrt{٢}$ ، $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$ ، ٢

ملاحظة: الإجابات من حسابي لأن كتاب الطالب لا يتضمن مفتاح إجابات.

٢-٢ زاوية الأساس (الزاوية المرجعية)

نحتاج إلى استخدام النسب المثلثية الثلاث لإيجاد قياس أي زاوية، وليس لإيجاد قياس الزوايا بين ٠°، ٩٠° فقط.

تُعرَّف الزاوية بشكل عام على أنها شكل هندسي ناتج من اتحاد شعاعين لهما نقطة البداية نفسها، وتسمى هذه النقطة رأس الزاوية، ويسمى الشعاعان ضلعَي الزاوية.

تُقاس الزاوية في الوضع القياسي من الجزء الموجب من المحور السيني، وبعكس اتجاه عقارب الساعة تعطي زاوية موجبة، وباتجاه عقارب الساعة تعطي زاوية سالبة.

أرباع المستوى الإحداثي

يُقسَّم المستوى الإحداثي إلى أربعة أرباع **quadrants**، ونقول إن الزاوية هـ تقع في الربع الذي تقع فيه و ل.



في الشكل الذي في الكتاب، تقع الزاوية هـ في الربع الأول.

مثال ٣

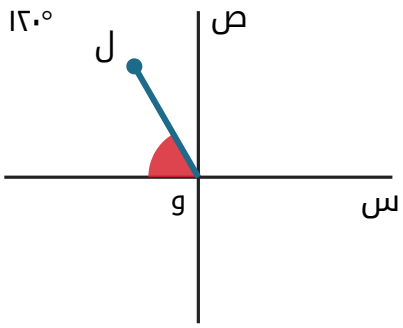
مثال ٣

ارسم شكلًا يبيّن الزاوية التي تصنعها $\overline{\text{و ل}}$ مع الجزء الموجب من المحور السيني، حيث و نقطة الأصل، ثم حدد **الزاوية الحادة** التي تشكلها $\overline{\text{و ل}}$ مع المحور السيني في كل مما يأتي:

أ) ١٢٠° ب) ٤٣٠° ج) $\frac{\pi ٣}{٤}$ د) $-\frac{\pi ٢}{٣}$

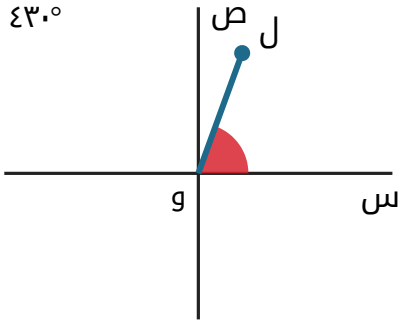
هـ) $-١٫٢\ \pi$ و) ٣٣٣°

حل مثال ٣ (أ، ب)



أ) تمثل الزاوية ١٢٠° دورانًا بعكس اتجاه عقارب الساعة، وتدور $\overline{\text{و ل}}$ أقل من نصف دورة، بمقدار ١٨٠° − ١٢٠° = ٦٠°

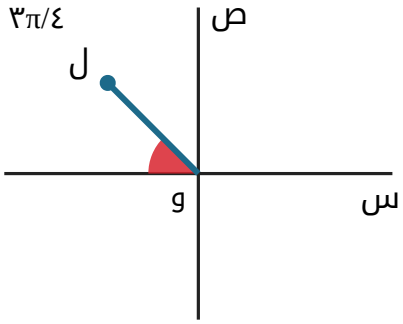
∴ قياس الزاوية الحادة مع المحور السيني = ٦٠°



ب) تمثل الزاوية ٤٣٠° دورانًا بعكس اتجاه عقارب الساعة، وتدور $\overline{\text{و ل}}$ دورة واحدة إضافة إلى ٤٣٠° − ٣٦٠° = ٧٠°

∴ قياس الزاوية الحادة مع المحور السيني = ٧٠°

حل مثال ٣ (ج، د)



ج) تمثل الزاوية $\frac{\pi ٣}{٤}$ دورانًا بعكس اتجاه عقارب الساعة، وأقل من نصف دورة بمقدار $\pi - \frac{\pi ٣}{٤} = \frac{\pi}{٤}$

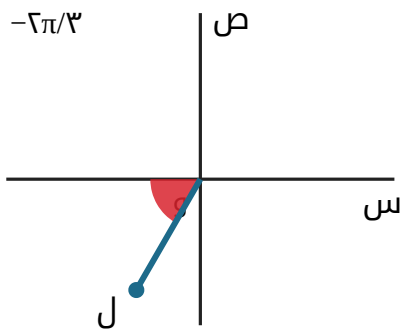
∴ قياس الزاوية الحادة مع المحور السيني = $\frac{\pi}{٤}$

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

د) تمثل الزاوية $-\frac{\pi ٢}{٣}$ دورانًا باتجاه عقارب الساعة، وتدور $\overline{\text{و ل}}$ أقل من نصف دورة باتجاه عقارب الساعة بمقدار π –

$$\frac{\pi}{٣} = \frac{\pi ٢}{٣}$$

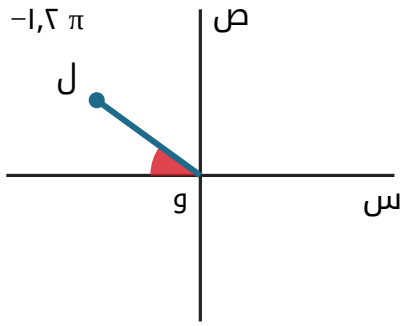
∴ قياس الزاوية الحادة مع المحور السيني = $\frac{\pi}{٣}$



حل مثال ٣ (هـ، و)

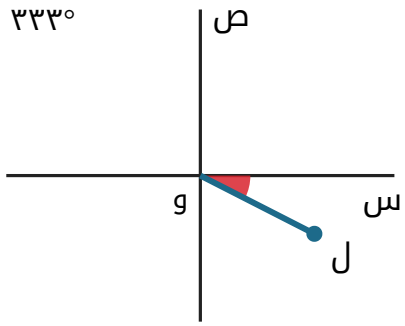
هـ) تمثل الزاوية $-١,٢\ \pi$ دورانًا باتجاه عقارب الساعة، وأكثر من نصف دورة بمقدار $\pi ١,٢ - \pi = \pi ٠,٢$

∴ قياس الزاوية الحادة مع المحور السيني = $\pi ٠,٢$



و) تمثل الزاوية ٣٣٣° دورانًا بعكس اتجاه عقارب الساعة، وأقل من دورة كاملة بمقدار ٣٦٠° – ٣٣٣° = ٢٧°

∴ قياس الزاوية الحادة مع المحور السيني = ٢٧°



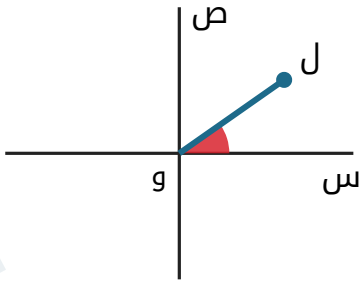
زاوية الأساس

تُسمى الزاوية الحادة الناتجة والمحصورة مع محور السينات **بزاوية الأساس** **principal angle** أو **الزاوية المرجعية** **reference angle**.

الرسوم الآتية تبيّن موقع وقياس الزاوية المرجعية ب° للزوايا الموجبة (دورانها بعكس عقارب الساعة) في كل من الأرباع الأربعة:

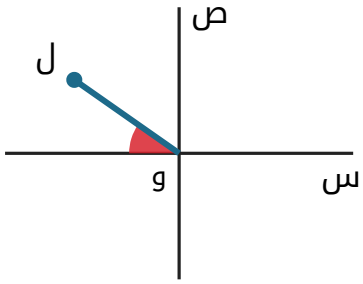
الزاوية المرجعية في الأرباع

الربع الأول



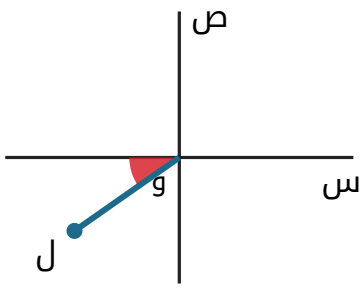
الزاوية المرجعية = ب°

الربع الثاني



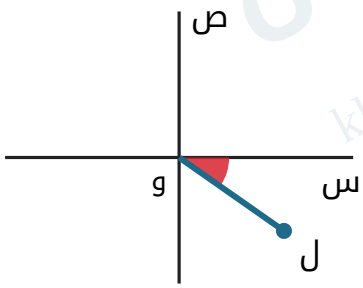
ب° = ١٨٠° − هـ°

الربع الثالث



ب° = هـ° − ١٨٠°

الربع الرابع



ب° = ٣٦٠° − هـ°

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

مثال ٤

مثال ٤

في كل مما يأتي، حُدِّد قياس زاوية الأساس ب، والربع، والمجال الذي تقع فيه الزاوية هـ. أوجِد قياس الزاوية هـ:

مثال ٤ (تابع)

أ) ب = ٤٢°، تقع في الربع الثاني، ٠° ≤ هـ ≤ ٣٦٠°

ب) ب = ٥٣°، تقع في الربع الثالث، ٣٦٠° ≤ هـ ≤ ٧٢٠°

ج) ب = $\frac{\pi ٢}{٩}$ ، تقع في الربع الرابع، $-\pi ٤ \leq$ هـ $\leq -\pi ٢$

حل مثال ٤

الحل

أ) باستخدام الفترة المعطاة للزاوية هـ، يُفترض بالقطعة المستقيمة $\overline{\text{و ل}}$ أن تدور أكثر من ربع دورة وأقل من نصف دورة حول النقطة و.

∴ هـ = ١٨٠° − ٤٢° = ١٣٨°

ب) يُفترض بالقطعة $\overline{\text{و ل}}$ أن تدور أكثر من دورة واحدة وأقل من دورتين بعكس اتجاه عقارب الساعة. يبيّن الشكل أن القطعة دارت ١ $\frac{١}{٢}$ دورة إضافة إلى ٥٣°

هـ = ١ $\frac{١}{٢}$ × ٣٦٠° + ٥٣° = ٥٩٣°

ج) يُفترض بالقطعة أن تدور أكثر من دورة واحدة ولكن أقل من دورتين باتجاه عقارب الساعة حول النقطة و.

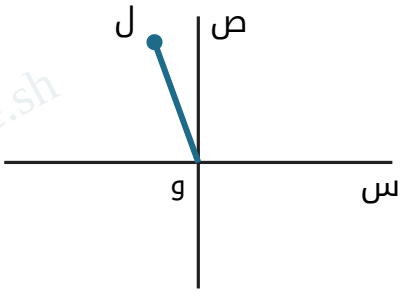
الحل (تابع)

$$\text{هـ} = -\pi٢ - \frac{\pi٢}{٩} = -\frac{\pi٢٠}{٩}$$

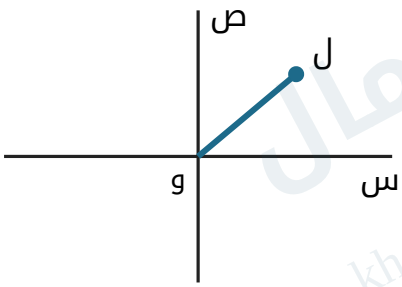
تمارين ٢-٢

ا) أوجِد قياس زاوية الأساس للزاوية هـ في كل مما يأتي (الأشكال مرسومة بالقياس المعطى):

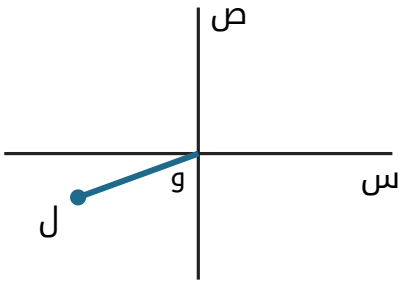
أ) هـ = ١١٠°



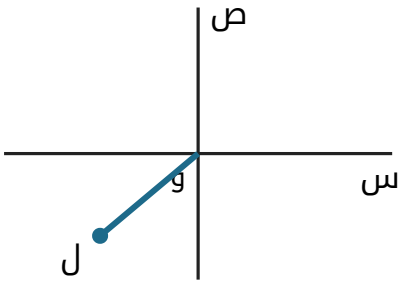
ب) هـ = −٣٢٠°



ج) هـ = ٢٠٠°



د) هـ = −٥٠٠°



خالد كمال
khaled-math.surge.sh

تمارين ٢-٢ (تابع ١)

٢) ارسم شكلًا يبيّن الربع الذي تقع فيه $\overline{\text{و ل}}$ عند دورانها لتشكّل كل زاوية من الزوايا أدناه. أشر بوضوح إلى اتجاه الدوران على كل شكل، وحدد الزاوية الحادة التي تشكلها $\overline{\text{و ل}}$ مع المحور السيني:

أ ١٠٠°	**ب** -١٠٠°	**ج** ٣١٠°
د -١٥٠°	**هـ** ٤٠٠°	**و** $\frac{٢\pi}{٣}$

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

تمارين ٢-٢ (تابع ٢)

٢) (تابع) الزوايا:

ز $\frac{٧\pi}{٦}$	**ح** $-\frac{٥\pi}{٣}$

ط $\frac{\pi ١٣}{٩}$ .....

ي $\frac{\pi ١٧}{٨} -$ .....

تمارين ٢-٢ (تابع ٣)

٣) في كل مما يأتي، حُدِّد قياس زاوية الأساس ب، والربع، والمجال الذي تقع فيه الزاوية هـ. أوجِد قياس الزاوية هـ:

أ) ب = ٥٥°، تقع في الربع الثاني، ٠° < هـ < ٣٦٠°

ب) ب = ٢٠°، تقع في الربع الثالث، −١٨٠° < هـ < ٠°

ج) ب = ٣٢°، تقع في الربع الرابع، ٣٦٠° < هـ < ٧٢٠°

د) ب = $\frac{\pi}{٤}$، تقع في الربع الثالث، ٠ < هـ < π٢

هـ) ب = $\frac{\pi}{٣}$، تقع في الربع الثاني، π٢ < هـ < π٤

و) ب = $\frac{\pi}{٦}$، تقع في الربع الرابع، −π٤ < هـ < −π٢

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

ورقة الإجابات النموذجية ٢-٢

تمرين ١: أ) ٧٠° | ب) ٤٠° | ج) ٢٠° | د) ٤٠°

تمرين ٢ (الربع، الزاوية الحادة):

أ) الثاني، ٨٠° | ب) الثالث، ٨٠° | ج) الرابع، ٥٠° | د) الثالث، ٣٠° | هـ) الأول، ٤٠°

و) الثاني، $\frac{\pi}{٣}$ | ز) الثالث، $\frac{\pi}{٦}$ | ح) الأول، $\frac{\pi}{٣}$ | ط) الثالث، $\frac{\pi ٤}{٩}$ | ي) الرابع، $\frac{\pi}{٨}$

تمرين ٣: أ) ١٢٥° | ب) −١٦٠° | ج) ٦٨٨° | د) $\frac{\pi ٥}{٤}$ | هـ) $\frac{\pi ٨}{٣}$ | و) $-\frac{\pi ١٣}{٦}$

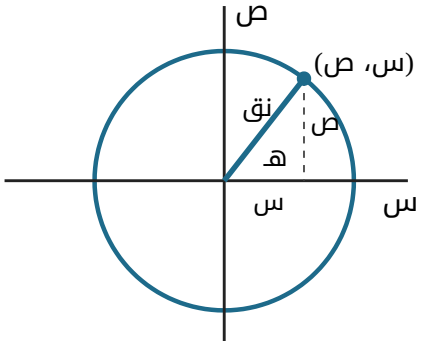
ملاحظة: الإجابات من حسابي لأن كتاب الطالب لا يتضمن مفتاح إجابات.

٢-٣ النسب المثلثية للزوايا العامة

تعرف النسب المثلثية لأي زاوية هـ، وفي أي ربع تقع فيه الزاوية، كما يأتي:

نتيجة ١

جا هـ = $\frac{\text{ص}}{\text{نق}}$ ، جتا هـ = $\frac{\text{س}}{\text{نق}}$ ، ظا هـ = $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$ ، حيث س ≠ ٠



في الشكل، (س ، ص) إحداثيات النقطة ل، وطول $\overline{\text{و ل}}$ = نق، حيث نق = $\sqrt{\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢}}$.

استكشاف ١

استكشاف ١

جا هـ = $\frac{\text{ص}}{\text{ر}}$ جتا هـ = $\frac{\text{س}}{\text{ر}}$ ظا هـ = $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$

بالاستعانة بالشكل أعلاه، وبمعلومية إشارة كل من س، ص في كل ربع من الأرباع، وأن نصف القطر يساوي ر (حيث ر موجب دائمًا) انسخ الجدول الآتي وأكمله:

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

جدول استكشاف ١

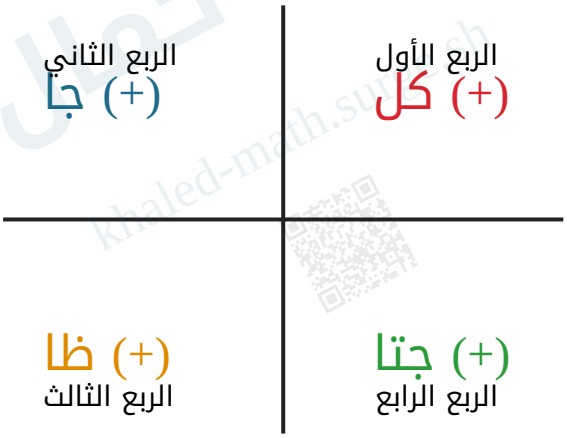
	جا هـ	جتا هـ	ظا هـ
الربع الأول	$\frac{\text{ص}}{\text{ر}} = \frac{+}{+} = +$	$\frac{\text{س}}{\text{ر}} = \frac{+}{+} = +$	$\frac{\text{ص}}{\text{س}} = \frac{+}{+} = +$
الربع الثاني	$\frac{\text{ص}}{\text{ر}} =$	$\frac{\text{س}}{\text{ر}} = \frac{-}{+} = -$	$\frac{\text{ص}}{\text{س}} =$
الربع الثالث	$\frac{\text{ص}}{\text{ر}} =$	$\frac{\text{س}}{\text{ر}} =$	$\frac{\text{ص}}{\text{س}} = \frac{-}{-} = +$

	جا هـ	جتا هـ	ظا هـ
الربع الرابع	$\frac{ص}{ر} = \frac{-}{+} = -$	$\frac{س}{ر} =$	$\frac{ص}{س} =$

انسخ المحورين المجاورين، وحدد أيّ النسب المثلثية موجبة في كل ربع من الأرباع الأربعة. إشارات النسب المثلثية في الربع الأول مبيّنة وجميعها موجبة.

إشارات النسب المثلثية

يبيّن الشكل المجاور النسب المثلثية الموجبة في كل ربع من الأرباع.



(الزوايا: ٠° ، ٩٠° ، ١٨٠° ، ٢٧٠° ، ٣٦٠°)

مثال ٥

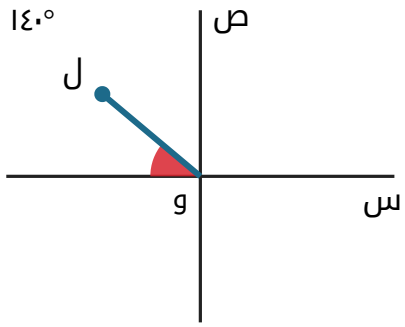
مثال ٥

اكتب كلًّا مما يأتي بدلالة نسب مثلثية لزاوية الأساس:

مثال ٥ (تابع)

أ) جا ١٤٠°　　ب) جتا (−١٣٠°)

حل مثال ٥ (أ)

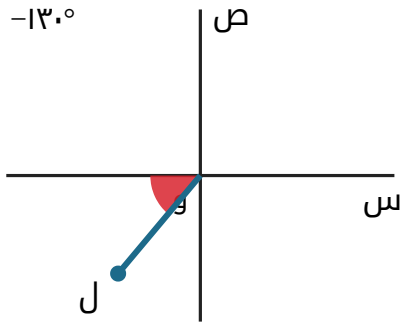


أ) قياس زاوية الأساس هو ٤٠°

إشارة جيب الزاوية الواقعة في الربع الثاني موجبة.

∴ جا ١٤٠° = جا ٤٠°

حل مثال ٥ (ب)



ب) قياس زاوية الأساس هو ٥٠°

إشارة جيب تمام الزاوية الواقعة في الربع الثالث سالبة.

∴ جتا (−١٣٠°) = −جتا ٥٠°

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

مثال ٦

مثال ٦

إذا علمت أن جتا هـ = $-\frac{٣}{٥}$ في الفترة ١٨٠° ≤ هـ ≤ ٢٧٠°، فأوجِد قيمة كل من:

جا هـ، ظا هـ.

حل مثال ٦

الحل

تقع الزاوية هـ في الربع الثالث، فتكون إشارة جيب الزاوية سالبة وإشارة ظل الزاوية موجبة.

$$ص^{٢} + (-٣)^{٢} = ٥^{٢}$$

$$ص^{٢} = ٢٥ - ٩ = ١٦$$

$$ص = \pm ٤$$

∵ جا هـ < ٠

$$\therefore \text{جا هـ} = \frac{-٤}{٥} = -\frac{٤}{٥}$$

خالد كمال
khaled-math.sharp.sh

الحل (تابع)

$$\text{ظا هـ} = \frac{\text{جا هـ}}{\text{جتا هـ}} = \frac{\frac{-٤}{٥}}{\frac{-٣}{٥}} = \frac{-٤}{-٣} = \frac{٤}{٣}$$

مثال ٧

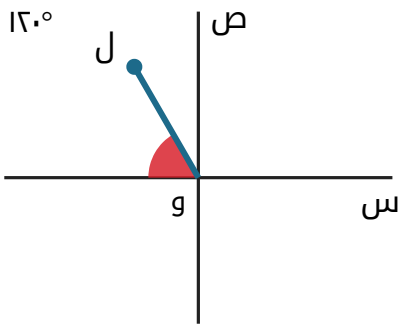
مثال ٧

أوجِد قيمة كل مما يأتي:

أ) جا ١٢٠° ب) جتا $\frac{\pi ٧}{٦}$

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

حل مثال ٧ (أ)

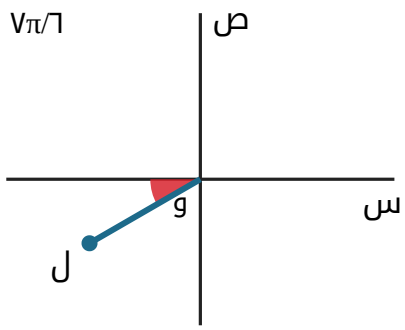


أ) قياس زاوية الأساس = ١٨٠° − ١٢٠° = ٦٠°

تقع الزاوية ١٢٠° في الربع الثاني، ∴ جا ١٢٠° موجب.

$$\therefore \text{جا } ١٢٠° = \text{جا } ٦٠° = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$$

حل مثال ٧ (ب)



ب) قياس زاوية الأساس = $\pi - \frac{٧\pi}{٦} = \frac{\pi}{٦}$

تقع الزاوية $\frac{٧\pi}{٦}$ في الربع الثالث، ∴ جتا $\frac{٧\pi}{٦}$ سالب.

∴ جتا $\frac{٧\pi}{٦}$ = −جتا $\frac{\pi}{٦}$ = $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

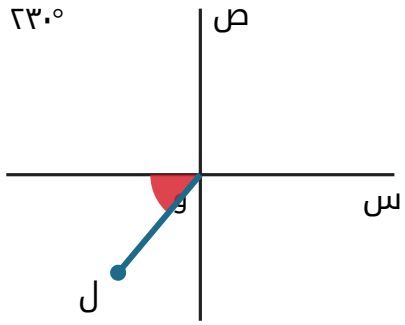
مثال ٨

مثال ٨

إذا علمت أن جا ٥٠° = ب، فاكتب قيمة كل مما يأتي بدلالة ب:

أ) جا ٢٣٠° ب) جتا ٥٠° ج) ظا ٤٠° د) ظا ١٤٠°

حل مثال ٨ (أ)



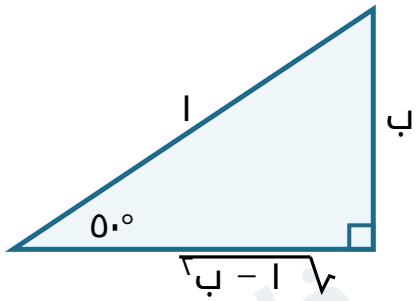
أ) قياس زاوية الأساس = ٢٣٠° − ١٨٠° = ٥٠°

تقع الزاوية ٢٣٠° في الربع الثالث، ∴ جا ٢٣٠° سالب.

∴ جا ٢٣٠° = −جا ٥٠° = −ب

حل مثال ٨ (ب)

ب) ارسم مثلثًا قائم الزاوية يكون فيه طول الضلع المقابل للزاوية ٥٠° يساوي ب، ووتره يساوي ا حيث جا ٥٠° = ب.



نظرية فيثاغورث: (الضلع المقابل)² + (الضلع المجاور)² = ا²

ب² + (الضلع المجاور)² = ا²

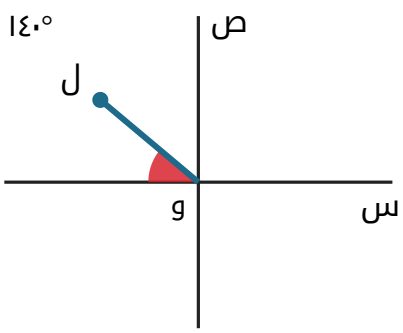
الضلع المجاور = $\sqrt{ا^2 - ب^2}$

جتا ٥٠° = $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{\sqrt{ا^2 - ب^2}}{ا} = \sqrt{ا^2 - ب^2}$

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

حل مثال ٨ (ج، د)

ج) الزاوية ٤٠° على المثلث القائم نفسه: ظا ٤٠° = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{\sqrt{ا^2 - ب^2}}{ب}$



د) قياس زاوية الأساس = ١٨٠° − ١٤٠° = ٤٠°

تقع الزاوية ١٤٠° في الربع الثاني، ∴ ظا ١٤٠° سالب.

∴ ظا ١٤٠° = −ظا ٤٠° = $-\frac{\sqrt{\text{ا}^{٢} - \text{ب}^{٢}}}{\text{ب}}$

تمارين ٢-٣

ا) اكتب كلًّا مما يأتي في صورة نسبة مثلثية لزاوية حادة:

أ جا ١٩٠°	**ب** جتا ٣٠٥°
جـ ظا ١٢٥°	**د** جتا (−٢٤٥°)

تمارين ٢-٣ (تابع ١)

ا) (تابع) اكتب كلًّا مما يأتي في صورة نسبة مثلثية لزاوية حادة:

هـ جتا $\frac{\pi ٤}{٥}$	**و** جا $\frac{\pi ٩}{٨}$

ز جتا $(-\frac{7\pi}{10})$

ح ظا $\frac{11\pi}{9}$

تمارين ٢-٣ (٢)

٢) أوجِد قيمة كل مما يأتي:

أ جتا ١٢٠°

ب ظا ٣٣٠°

ج جا ٢٢٥°

د ظا (−٣٠٠°)

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

تمارين ٢-٣ (تابع ٢)

٢) (تابع) أوجِد قيمة كل مما يأتي:

هـ جا $\frac{4\pi}{3}$

و جتا $\frac{7\pi}{3}$

ز ظا $(-\frac{\pi}{٦})$

ح جتا $\frac{\pi ١٠}{٣}$

تمارين ٢-٣ (٣، ٤)

٣) إذا علمت أن جا هـ < ٠ ، ظا هـ < ٠ ، ففي أي ربع تقع الزاوية هـ ؟

٤) إذا علمت أن جا هـ = $\frac{٢}{٥}$ ، حيث هـ زاوية منفرجة، فأوجِد قيمة كل مما يأتي:

أ جتا هـ

ب ظا هـ

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

تمارين ٢-٣ (٥)

٥) إذا علمت أن جتا هـ = $-\frac{١}{\sqrt{٣}}$ ، حيث ١٨٠° ≤ هـ ≤ ٢٧٠°، فأوجِد قيمة كل مما يأتي:

أ جا هـ

ب ظا هـ

تمارين ٢-٣ (٦)

٦) إذا علمت أن ظا هـ = $-\frac{٥}{١٢}$ ، حيث ١٨٠° ≤ هـ ≤ ٣٦٠°، فأوجِد قيمة كل مما يأتي:

أ جا هـ

.....

ب جتا هـ

.....

تمارين ٢-٣ (٧)

٧) إذا علمت أن ظا ٢٥° = أ ، فأوجِد قيمة كل مما يأتي بدلالة أ :

أ ظا ٢٠٥°

.....

ب جا ٢٥°

.....

ج جتا ٦٥°

.....

د جتا ٢٤٥°

.....

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

تمارين ٢-٣ (٨)

٨) إذا علمت أن جتا ٧٧° = ب ، فعبّر عن قيمة كل مما يأتي بدلالة ب:

أ جا ٧٧°

ب ظا ١٣°

جـ جا ٢٥٧°

د جتا ٣٤٧°

تمارين ٢-٣ (٩)

٩) إذا علمت أن جا أ = $\frac{٥}{١٣}$ ، جتا ب = $-\frac{٤}{٥}$ ، حيث تقع الزاويتان أ ، ب في الربع نفسه، فأوجِد قيمة كل مما يأتي:

أ جتا أ

ب ظا أ

جـ جا ب

د ظا ب

تمارين ٢-٣ (١٠)

١٠) إذا علمت أن ظا أ = $-\frac{٢}{٣}$ ، جتا ب = $\frac{٣}{٤}$ ، حيث تقع الزاويتان أ ، ب في الربع نفسه، فأوجِد قيمة كل مما يأتي:

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

أ جا أ	ب جتا أ .....
ج جا ب	د ظا ب .....

تمارين ٢-٣ (II)

II) انسخ الجدول أدناه، ثم أكمله، حيث ٠° ≤ هـ ≤ ٣٦٠°:

النسب المثلثية \ الزوايا	هـ = ١٢٠°	هـ = ...	هـ = ٢١٠°
.....	.....	−١	$\frac{١}{\sqrt{٣}}$
جا هـ	.....	$\frac{١}{\sqrt{٢}}$	$-\frac{١}{٢}$
$\frac{١}{\text{جتا هـ}}$	−٢	$-\sqrt{٢}$	.....

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

ورقة الإجابات النموذجية ٢-٣

تمرين ١: أ) $-\text{جا}\ ١٠°$ | ب) $\text{جتا}\ ٥٥°$ | ج) $-\text{ظا}\ ٥٥°$ | د) $-\text{جتا}\ ٦٥°$ | هـ) $-\text{جتا}\ \frac{\pi}{٥}$ |
و) $-\text{جا}\ \frac{\pi}{٨}$ | ز) $-\text{جتا}\ \frac{\pi ٣}{١٠}$ | ح) $\text{ظا}\ \frac{\pi ٢}{٩}$

تمرين ٢: أ) $-\frac{١}{٢}$ | ب) $-\frac{١}{\sqrt{٣}}$ | ج) $-\frac{١}{\sqrt{٢}}$ | د) $\sqrt{٣}$ | هـ) $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ | و) $\frac{١}{٢}$ |
ز) $-\frac{١}{\sqrt{٣}}$ | ح) $-\frac{١}{٢}$

تمرين ٣: الربع الرابع

تمرين ٤: جتا هـ $= -\frac{\sqrt{٢١}}{٥}$ | ظا هـ $= -\frac{٢}{\sqrt{٢١}}$

تمرين ٥: جا هـ $= -\frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٣}}$ | ظا هـ $= \sqrt{٢}$

تمرين ٦: جا هـ $= -\frac{٥}{١٣}$ | جتا هـ $= \frac{١٢}{١٣}$

ورقة الإجابات النموذجية ٢-٣ (تابع)

تمرين ٧: أ) أ | ب) $\frac{أ}{\sqrt{١ + أ^٢}}$ | ج) $\frac{أ}{\sqrt{١ + أ^٢}}$ | د) $-\frac{أ}{\sqrt{١ + أ^٢}}$

خالد كمال
khaledmath.surge.sh

تمرين ٨: أ) $\sqrt{\text{ا}^٢ - \text{ب}^٢}$ | ب) $\frac{\text{ب}}{\sqrt{\text{ا}^٢ - \text{ب}^٢}}$ | ج) $-\sqrt{\text{ا}^٢ - \text{ب}^٢}$ | د) $\sqrt{\text{ا}^٢ - \text{ب}^٢}$

تمرين ٩: (الربع الثاني) أ) $-\frac{١٢}{١٣}$ | ب) $-\frac{٥}{١٢}$ | ج) $\frac{٣}{٥}$ | د) $-\frac{٣}{٤}$

تمرين ١٠: (الربع الرابع) أ) $-\frac{٢}{\sqrt{١٣}}$ | ب) $\frac{٣}{\sqrt{١٣}}$ | ج) $-\frac{\sqrt{٧}}{٤}$ | د) $-\frac{\sqrt{٧}}{٣}$

تمرين ١١: الصف الأول: ظاهـ ، ظا ١٢٠° = $-\sqrt{٣}$ ، هـ = ١٣٥° ؛ جا ١٢٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ؛

$$\frac{\text{ا}}{\text{جتا } ٢١٠°} = -\frac{٢}{\sqrt{٣}}$$

ملاحظة: الإجابات من حسابي لأن كتاب الطالب لا يتضمن مفتاح إجابات.

٤-٢ التمثيلات البيانية للدوال المثلثية

Graphs of trigonometric functions

استكشاف ٢

افترض أنك تركب عجلة دوّارة نصف قطرها ٥٠ م، وتدور بسرعة ثابتة.

إذا ركبت العجلة من المنصة الموجودة على مستوى مركز العجلة نفسه، ودارت العجلة دورة كاملة واحدة بعكس اتجاه عقارب الساعة:

استكشاف ٢ (الأسئلة)

استكشاف ٢

١) باستخدام المحور الأفقي الذي تدور حوله الزاوية، ارسم التمثيلَين البيانيَين الآتيين بشكل منفصل وناقش خصائصهما.

أ) التمثيل البياني لزاوية دوران العربة مع الإزاحة الرأسية لحركتها.

ب) التمثيل البياني لزاوية دوران العربة مع الإزاحة الأفقية لحركتها.

٢) ناقش مع زملائك في الصف كيف يظهر كلا التمثيلَين، إذا دارت العجلة دورتَين كاملتَين.

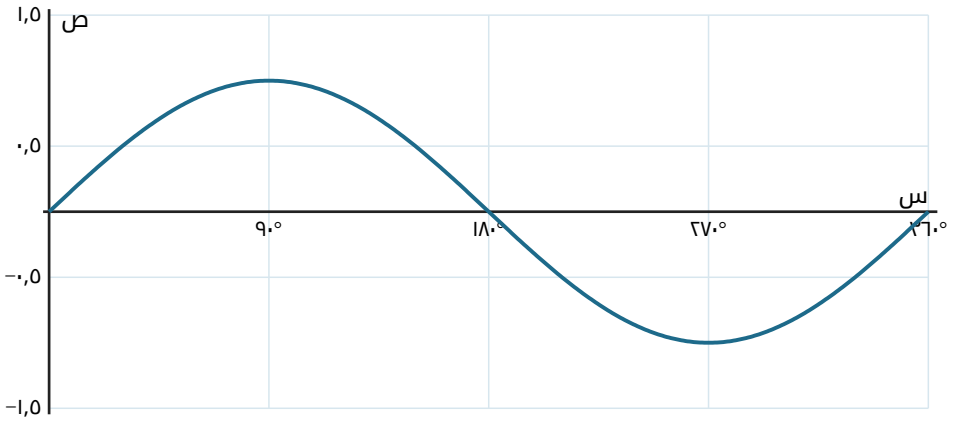
خالد كمال
khaled-math.surge.sh

التمثيلان البيانيان ص = جا س ، ص = جتا س

افترض أن **و ل** تشكل زاوية قياسها س مع الجزء الموجب للمحور الأفقي (س)، وأن النقطة ل تتحرك على دائرة الوحدة لتكمل دورة كاملة. إحداثيات النقطة ل هي (جتا س ، جا س).

ارتفاع النقطة ل عن المحور الأفقي (س)، والذي يساوي جا س، يتغيّر من: ٠ يزداد ١ يتناقص ٠ يتناقص −١ يزداد ٠

يبيّن الرسم الآتي التمثيل البياني لـ ص = جا س، حيث ٠° ≤ س ≤ ٣٦٠°:

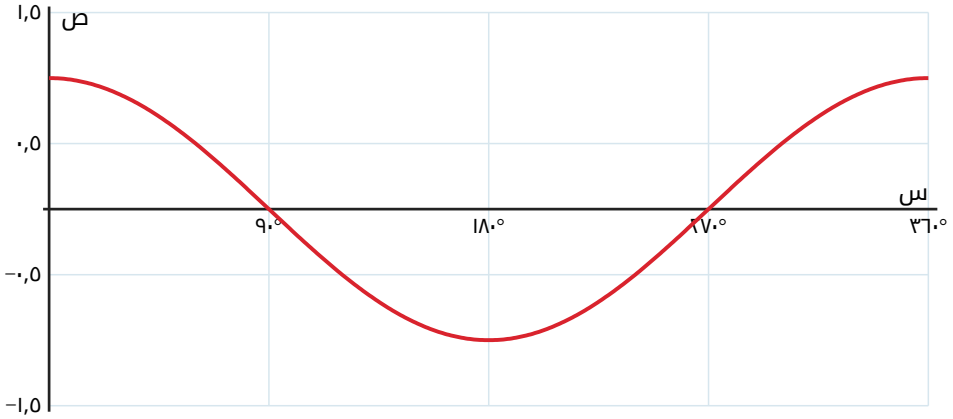


ص = جا س

التمثيل البياني ص = جتا س

إزاحة ل عن المحور الرأسي (ص) تساوي جتا س وتتغيّر من: ١ تتناقص ٠ تتناقص −١ تزداد ٠ تزداد ١

يبيّن الرسم الآتي التمثيل البياني لـ ص = جتا س حيث ٠° ≤ س ≤ ٣٦٠°:

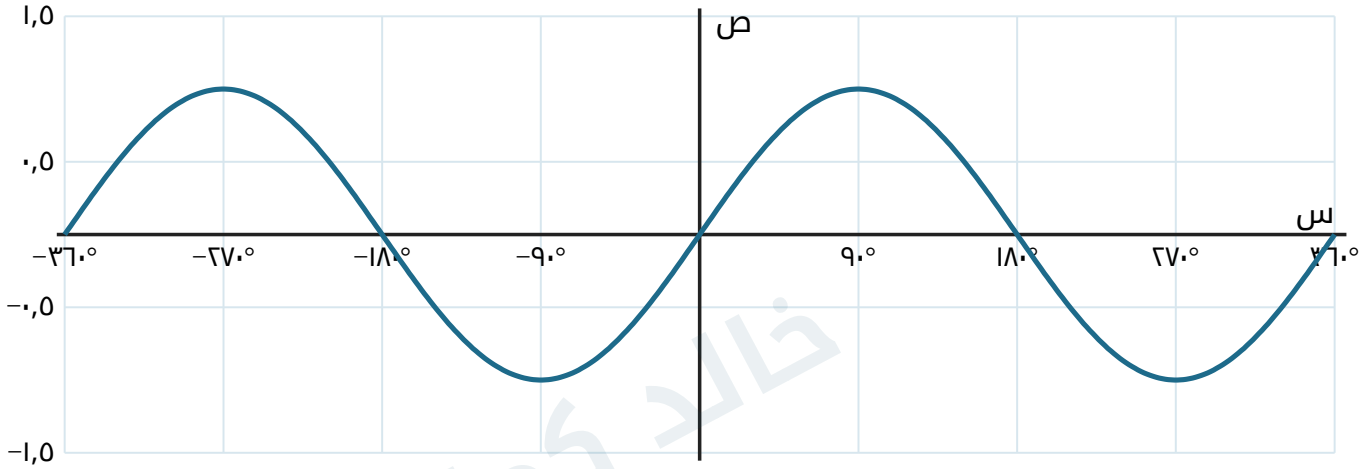


ص = جتا س

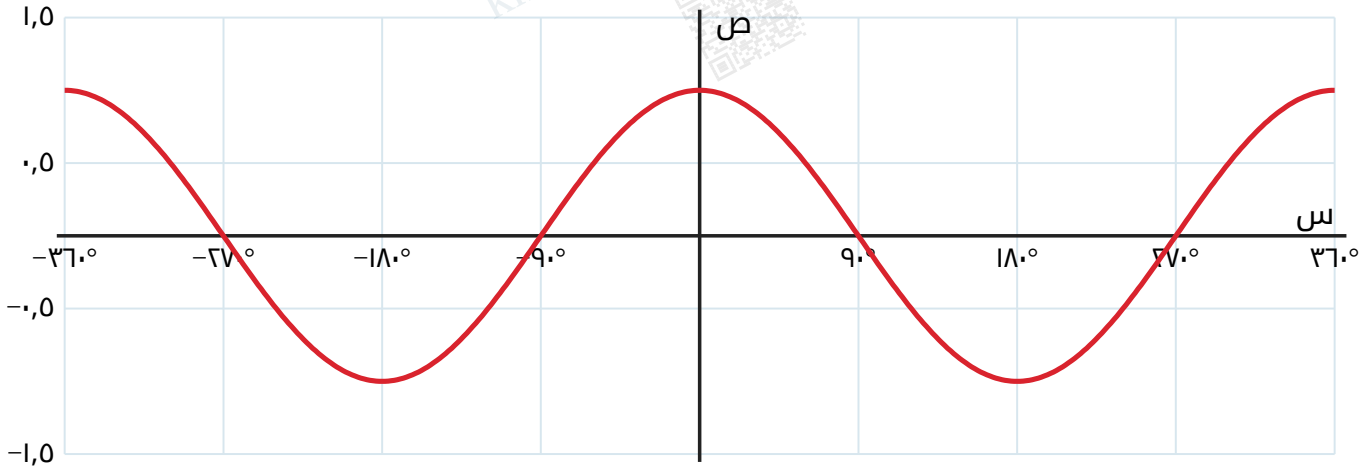
خالد كمال
khaled-mala.surge.sh

امتداد التمثيلين

يمكن للتمثيلَين البيانيَّين لـ ص = جا س، ص = جتا س أن يستمرا لأكثر من دورة واحدة:



ص = جا س



ص = جتا س

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

المجال والمدى والدورة

مجال دالتَي الجيب وجيب التمام هو مجموعة الأعداد الحقيقية ع.

مدى دالتَي الجيب وجيب التمام هو −١ ≤ ص ≤ ١

تسمى دالتا الجيب وجيب التمام **دالتَين دوريتَين (periodic functions)** لأن كل منهما تتكرر أكثر من مرة.

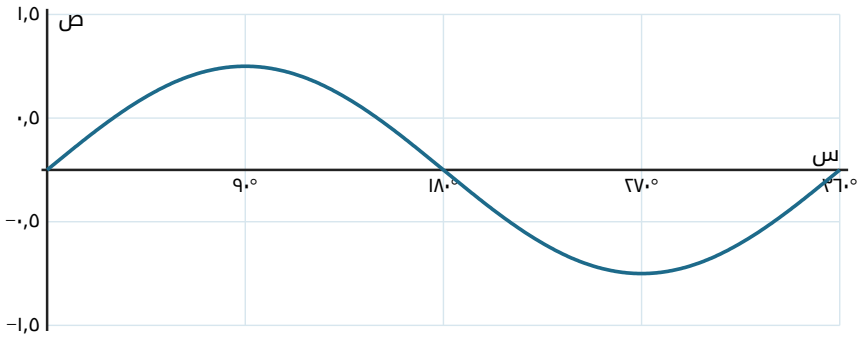
تُعرَّف **دورة (period)** الدالة الدورية بأنها طول موجة واحدة (المسافة بين قمتين أو قاعين متتاليين).

تتكرر دالتا الجيب وجيب التمام كل ٣٦٠°، وعليه نقول إن دورة كل منهما هي ٣٦٠° (أو ٢π).

السعة

سعة (amplitude) الدالة الدورية هي المسافة بين أعلى نقطة (أو أدنى نقطة)، والمحور الأفقي الذي يتوسط القيمتَين، وتعرف السعة أيضًا بأنها نصف الفرق بين القيمة العظمى والقيمة الصغرى في دورة واحدة.

سعة كل دالة من الدالتَين ص = جا س، ص = جتا س تساوي ١



الدورة = ٣٦٠° أو ٢π | السعة = ١ | المحور الأفقي: ص = ٠

التمثيل البياني ص = ظا س

ظل الزاوية الحادة س = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$ ، ويمثّل ميل المستقيم **و ل**.

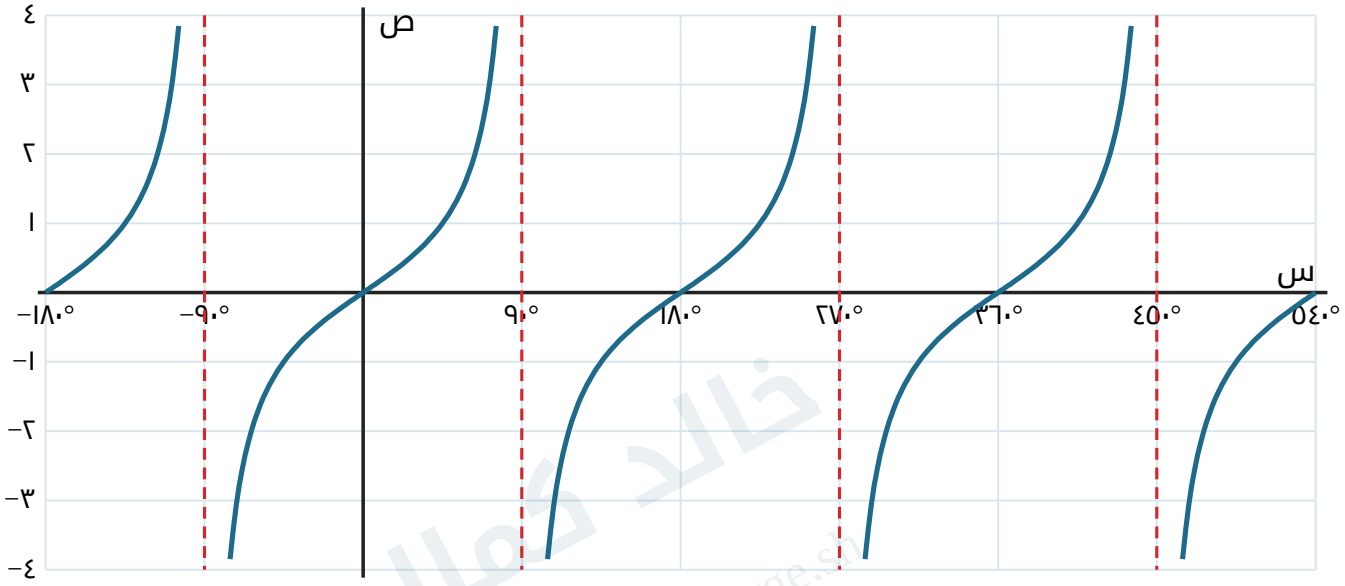
عندما تقطع النقطة ل دورة كاملة حول دائرة الوحدة بعكس اتجاه عقارب الساعة فإن ميل **و ل** يتغيّر بحسب الآتي:

س = ٠°	س = ٩٠°	س = ١٨٠°	س = ٢٧٠°	س = ٣٦٠°
أفقي	رأسي	أفقي	رأسي	أفقي
الميل = ٠	غير معرّف	الميل = ٠	غير معرّف	الميل = ٠

(الملاحظة في الكتاب: ظل الزاوية س يساوي ميل المستقيم و ل، والزاوية الموجبة تقاس مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.)

التمثيل البياني لـ ص = ظا س

يبيّن الرسم الآتي التمثيل البياني للدالة ص = ظا س:



ص = ظا س

خصائص دالة الظل

مجال دالة الظل هو مجموعة الأعداد الحقيقية، باستثناء المضاعفات الفردية لـ ٩٠°

والتي تعادل جميع المضاعفات الفردية لـ $\frac{\pi}{٢}$.

مدى دالة الظل هو مجموعة الأعداد الحقيقية ع.

دورة دالة الظل تكون كل ١٨٠° (أو π).

المستقيمات المنقطة الحمراء عند س = ±٩٠°، س = ٢٧٠°، س = ٤٥٠° هي عندما تكون قيمة ص = ظا س غير معرّفة، وتسمى هذه المستقيمات **خطوط التقارب (asymptotes)**، حيث تقترب أجزاء التمثيل البياني من خطوط التقارب لكن لا تقطعها أبدًا.

سعة دالة الظل غير معرّفة.

استكشاف ٣

استكشاف ٣

اعتمادًا على شكل التمثيل البياني لدالة جيب التمام، أكمل العبارات الآتية، واكتب إجاباتك بدلالة جتا س:

١) جتا(−س) = ...

٢) جتا(١٨٠° − س) = ...

٣) جتا(١٨٠° + س) = ...

٤) جتا(٣٦٠° − س) = ...

٥) جتا(٣٦٠° + س) = ...

يبيّن بيان الدالة ص = جا س العلاقات المهمة الآتية:

- جا(−س) = −جا س
- جا(١٨٠° − س) = جا س
- جا(١٨٠° + س) = −جا س

• جا(٣٦٠° − س) = −جا س • جا(٣٦٠° + س) = جا س

استكشاف ٤

استكشاف ٤

بناءً على شكل التمثيل البياني لدالة الظل، أكمل العبارات الآتية، واكتب إجابتك بدلالة ظا س:

١) ظا(−س) = ...

٢) ظا(١٨٠° − س) = ...

٣) ظا(١٨٠° + س) = ...

٤) ظا(٣٦٠° − س) = ...

٥) ظا(٣٦٠° + س) = ...

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

ملخص السعة والدورة

يلخص الجدول الآتي السعة، والدورة، والتمثيل البياني لكل من دوال الجيب وجيب التمام والظل:

الدالة	السعة	الدورة (دورة واحدة)
د(س) = جا س	١	٣٦٠° أو ٢π
د(س) = جتا س	١	٣٦٠° أو ٢π
د(س) = ظا س	غير معرّفة	١٨٠° أو π

الرسوم البيانية لهذه الدوال في الصفحات السابقة (جا س، جتا س، ظا س).

خالد كمال
khaled-math.stage.sh

مثال ٩

يبيّن الشكل أدناه القطعتَين المستقيمتَين **ل م'**، **ف ك'** وهما قطرا مستطيل متقاطعان عند نقطة الأصل و، بحيث يكون المستقيمان ك ل، ف م' موازيَين للمحور السيني. إذا وجدنا قياس الزاوية بعكس اتجاه عقارب الساعة المحصورة بين المحور السيني الموجب والقطعة المستقيمة المعطاة، نجد أن هذا القياس:

• مع **و ل** يساوي ٣٠° • مع **و ك** يساوي (١٨٠° − ٣٠°) • مع **و م'** يساوي (١٨٠° + ٣٠°) • مع **و ف** يساوي (٣٦٠° − ٣٠°)

الشكل في كتاب الطالب صفحة ٥٨.

مثال ٩ (السؤال)

مثال ٩

أ) استخدم الشكل لتكتب كلًّا مما يأتي بدلالة جا ٣٠°:

ا) جا(١٨٠° − ٣٠°) ٢) جا(١٨٠° + ٣٠°) ٣) جا(٣٦٠° − ٣٠°)

ب) اكتب جتا(٣٦٠° − ٣٠°) بدلالة جتا ٣٠°

ج) اكتب ظا(١٨٠° − ٣٠°) بدلالة ظا ٣٠°

حل مثال ٩ (أ)

الحل

أ) ∵ ٣٠° تقع في الربع الأول ∴ جا ٣٠° موجبة.

ا) ∵ (١٨٠° − ٣٠°) تقع في الربع الثاني ∴ جا(١٨٠° − ٣٠°) موجبة، فيكون جا(١٨٠° − ٣٠°) = جا ٣٠°

٢) ∵ (١٨٠° + ٣٠°) تقع في الربع الثالث ∴ جا(١٨٠° + ٣٠°) سالبة، فيكون جا(١٨٠° + ٣٠°) = −جا ٣٠°

٣) ∵ (٣٦٠° − ٣٠°) تقع في الربع الرابع ∴ جا(٣٦٠° − ٣٠°) سالبة، فيكون جا(٣٦٠° − ٣٠°) = −جا ٣٠°

حل مثال ٩ (ب، ج)

الحل

ب) ∵ ٣٠° تقع في الربع الأول ∴ جتا ٣٠° موجبة.
∵ (٣٦٠° − ٣٠°) تقع في الربع الرابع ∴ جتا(٣٦٠° − ٣٠°) موجبة.
فيكون جتا(٣٦٠° − ٣٠°) = جتا ٣٠°

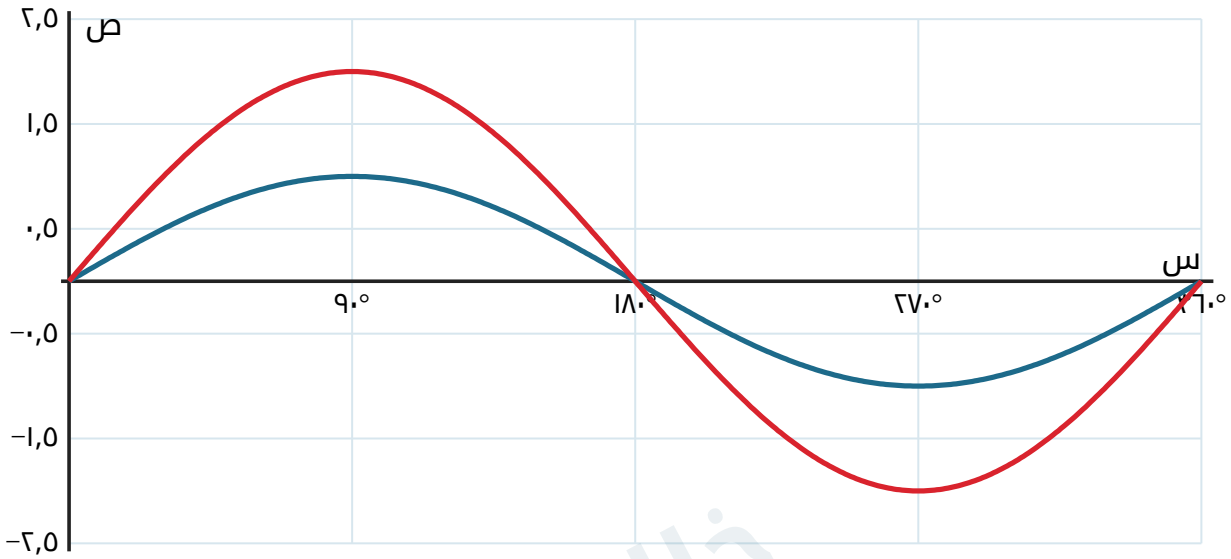
ج) ∵ ٣٠° تقع في الربع الأول ∴ ظا ٣٠° موجبة.
∵ (١٨٠° − ٣٠°) تقع في الربع الثاني ∴ ظا(١٨٠° − ٣٠°) سالبة.
فيكون ظا(١٨٠° − ٣٠°) = −ظا ٣٠°

مساعدة (الكتاب): جا س موجبة في الربعين الأول والثاني وسالبة في الثالث والرابع، وعليه جا(س + ١٨٠°) = جا(٣٦٠° − س)، ويطبق ذلك أيضًا على جيب التمام والظل.

التحويلات الهندسية للدوال المثلثية

تعلمت في الصف ١١، الوحدة ٢ كيف تجري بعض التحويلات الهندسية على الدالة د(س). وهذه التحويلات هي ص = أ د(س)، ص = د(أ س)، ص = د(س) + أ، ص = د(س + أ) وتركيباتها البسيطة. وسنتعلم في هذا الدرس كيف نجري هذه التحويلات على الدوال المثلثية.

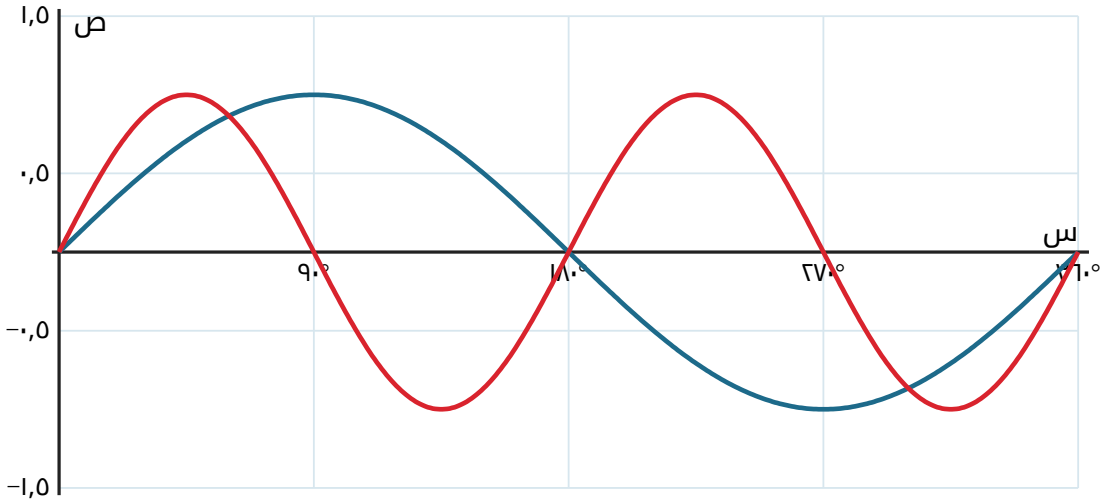
ص = أ جا س



ص = جا س ص = ٢جا س

التمثيل البياني للدالة ص = ٢جا س هو تمدد لبيان الدالة ص = جا س، معامله ٢ باتجاه مواز للمحور الصادي. سعة الدالة ص = ٢جا س تساوي ٢، ودورتها تساوي ٣٦٠°

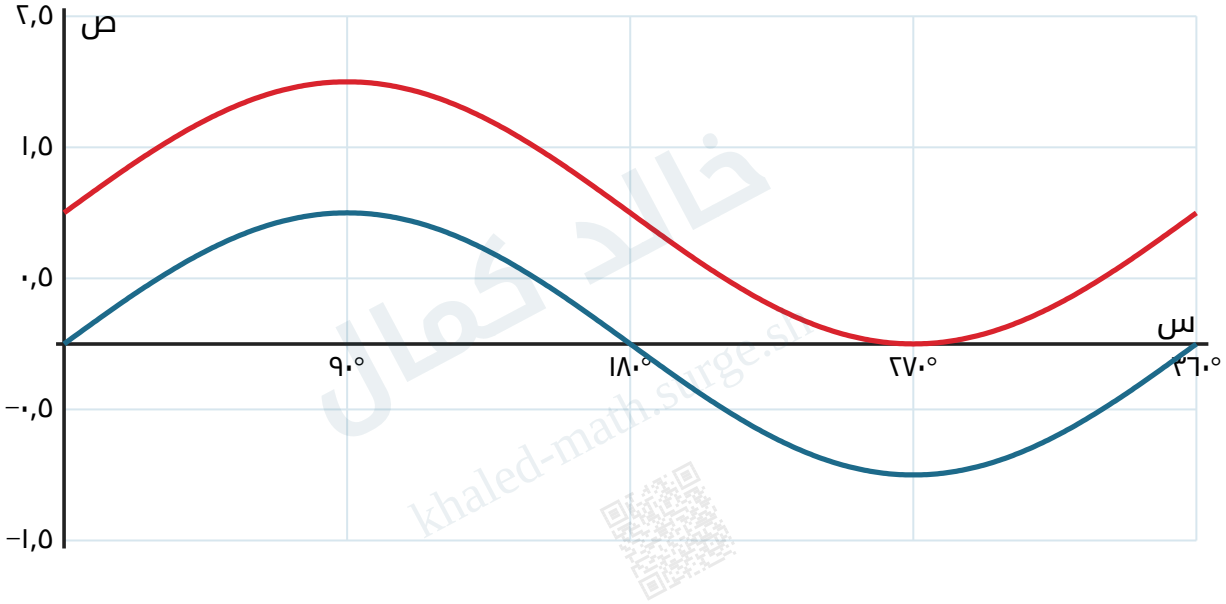
ص = جا (أ س)



ص = جا س ص = جا ٢س

التمثيل البياني للدالة ص = جا ٢س هو تمدد لبيان الدالة ص = جا س، معامله $\frac{١}{٢}$ باتجاه مواز للمحور السيني. سعة الدالة ص = جا ٢س تساوي ١، ودورتها تساوي ١٨٠°

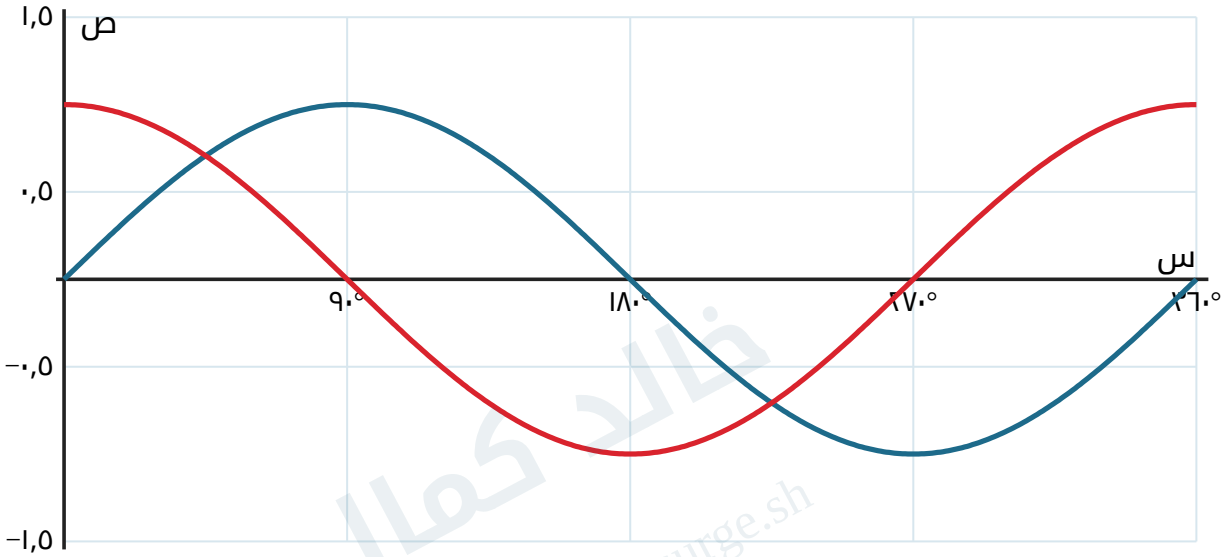
ص = أ + جا س



ص = جا س ص = ١ + جا س

التمثيل البياني للدالة ص = ١ + جا س هو انسحاب لبيان الدالة ص = جا س بالمتجه (٠ ، ١). سعة الدالة ص = ١ + جا س تساوي ١، ودورتها ٣٦٠°

ص = جا (س + جـ°)



خالد كمال
khaled-math.surge.sh

ص = جا س **ص = جا (س + ٩٠°)**

التمثيل البياني للدالة ص = جا (س + ٩٠°) هو انسحاب لبيان الدالة ص = جا س بالمتجه (−٩٠° ، ٠). سعة الدالة ص = جا (س + ٩٠°) تساوي ١ ودورتها ٣٦٠°

ملاحظة: تنطبق جميع التحويلات الهندسية الخاصة بدالة الجيب على دالة جيب التمام، وكذلك على دالة الظل.

ملخص التحويلات الهندسية

التحويل	الدوال
تمدد معامله أ باتجاه موازٍ للمحور الصادي	ص = أ جا س ، ص = أ جتا س ، ص = أ ظا س
تمدد معامله $\frac{1}{أ}$ باتجاه موازٍ للمحور السيني	ص = جا أ س ، ص = جتا أ س ، ص = ظا أ س
انسحاب بالمتجه (٠ ، أ)	ص = أ + جا س ، ص = أ + جتا س ، ص = أ + ظا س
انسحاب بالمتجه (−جـ° ، ٠)	ص = جا (س + جـ°) ، ص = جتا (س + جـ°) ، ص = ظا (س + جـ°)

ملاحظات هامة

- التمدد الموازي للمحور الرأسي يؤثر على سعة الجيب، ودالة جيب التمام فقط.
- التمدد الموازي للمحور الأفقي يؤثر على دورة دالة الجيب، ودالة جيب التمام، ودالة الظل.
- لا يؤثر الانسحاب على السعة أو الدورة لأيّ من هذه الدوال المثلثية.

خالد كمال
khaled-math-sage.sh

السعة والدورة والمدى

نعرف في الدالتَين الدوريتَين ص = أ جا ب(س + جـ°) + ك ، ص = أ جتا ب(س + جـ°) + ك أن:

١) السعة = |أ|

٢) الدورة = $\frac{\pi ٢}{|ب|}$

٣) المدى هو: −|أ| + ك ≤ ص ≤ |أ| + ك ، حيث −|أ| + ك هي أقل قيمة (القيمة الصغرى)، |أ| + ك هي أعلى قيمة (القيمة العظمى).

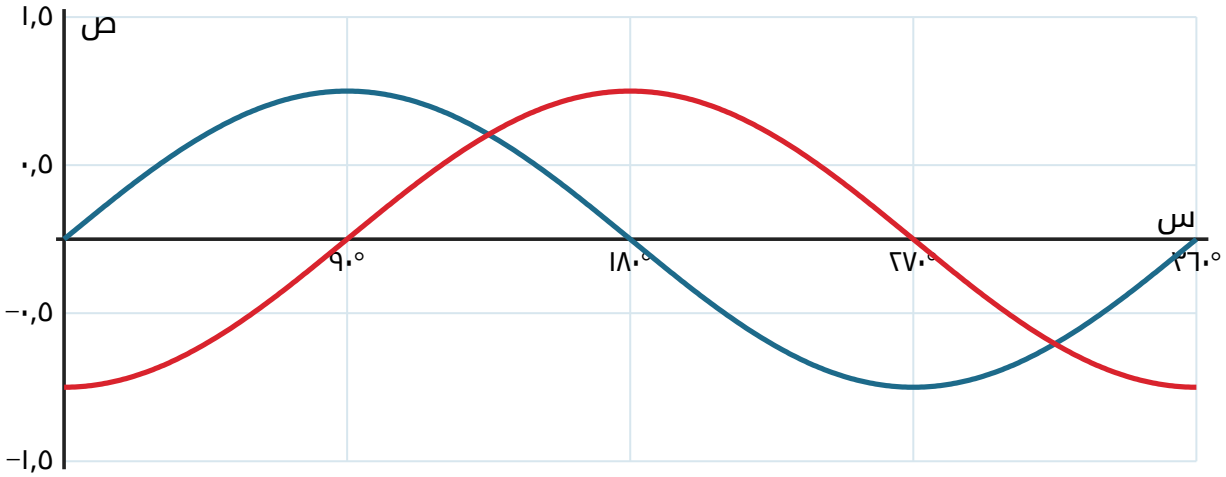
نجد من الجزئية (٢) أن السعة = $\frac{\text{أعلى قيمة} - \text{أدنى قيمة}}{٢}$ =

أ = $\frac{(\text{أ} + \text{ك}) - (-\text{أ} + \text{ك})}{٢}$

مثال ١٠

مثال ١٠

على المستوى الإحداثي نفسه، ارسم التمثيل البياني للدوال ص = جا س، ص = جا (س − ٩٠°)، حيث ٠° ≤ س ≤ ٣٦٠°



ص = جا س ص = جا (س − ٩٠°)

التمثيل البياني للدالة ص = جا (س − ٩٠°) هو انسحاب للدالة ص = جا س بالمتجه (٩٠° ، ٠).

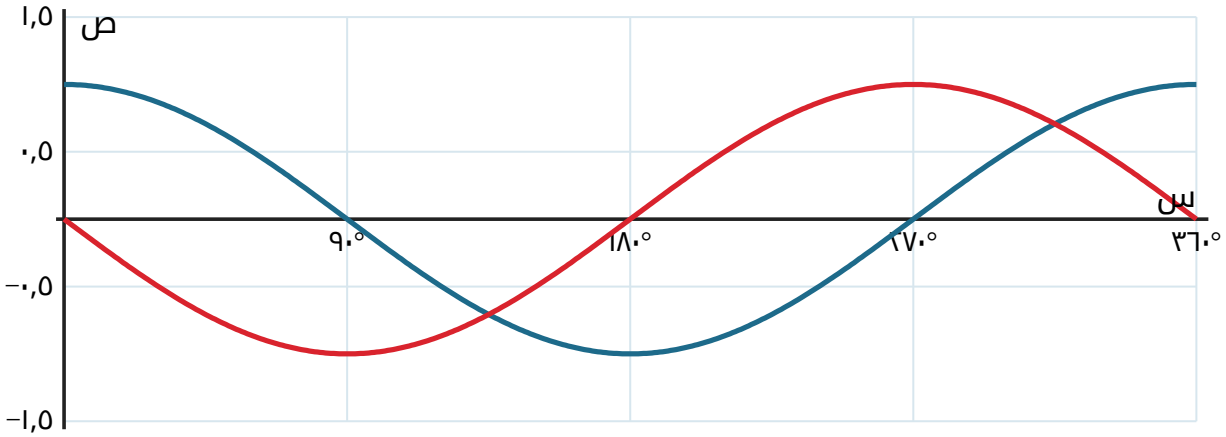
مثال ١٠ (ب)

مثال ١٠ (ب)

لترسم بيان الدالة المثلثية ص = ١ + ٢جتا (س + ٩٠°)، حيث ٠° ≤ س ≤ ٣٦٠°، اتبع الخطوات الآتية للتحويل الهندسي:

الخطوة الأولى: ارسم بيان الدالة ص = جتا س، حيث الدورة = ٣٦٠°، السعة = ١

الخطوة الثانية: ارسم بيان الدالة ص = جتا (س + ٩٠°)، أجرِ انسحابًا لبيان الدالة ص = جتا س بالمتجه (−٩٠° ، ٠). الدورة = ٣٦٠°، السعة = ١



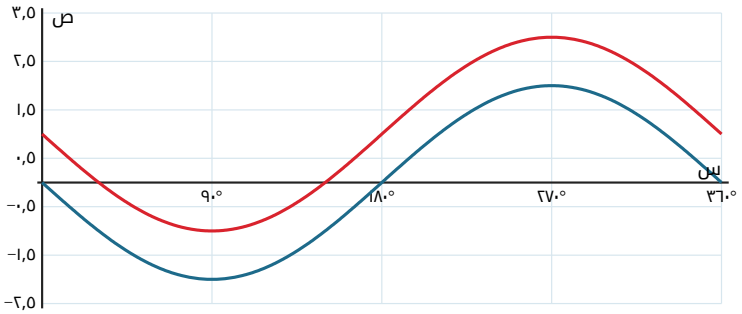
ص = جتا س ص = جتا (س + ٩٠°)

مثال ١٠ (تابع)

الخطوتان ٣ و ٤

الخطوة الثالثة: ارسم بيان الدالة ص = ٢جتا (س + ٩٠°)، أجرِ تمددًا لبيان الدالة ص = جتا (س + ٩٠°) معامله ٢ وباتجاه موازٍ للمحور الصادي. الدورة = ٣٦٠°، السعة = ٢

الخطوة الرابعة: ارسم بيان الدالة ص = ١ + ٢جتا (س + ٩٠°)، أجرِ انسحابًا على بيان الدالة ص = ٢جتا (س + ٩٠°) بالمتجه (٠ ، ١). الدورة = ٣٦٠°، السعة = ٢



ص = ٢جتا (س + ٩٠°) ص = ١ + ٢جتا (س + ٩٠°)

مثال ١١

مثال ١١

إذا كانت د(س) = ٣جتا (٢س)، حيث ٠° ≤ س ≤ ٣٦٠°

أ) أوجِد دورة، وسعة الدالة د(س).

ب) اكتب إحداثيات أعلى وأدنى نقاط الدالة ص = د(س).

ج) ارسم بيان الدالة ص = د(س).

د) استخدم إجابتك للجزئية (ج) لترسم بيان الدالة د(س) = ١ + ٣جتا (٢س).

خالد كمال
khaled-math.sa.edu.sh

حل مثال ١١ (أ، ب)

الحل

أ) الدورة = $\frac{٣٦٠°}{٢}$ = ١٨٠° السعة = ٣

ب) أعلى نقاط الدالة د(س) = ٣جتا(٢س) هي: (٠° ، ٣) ، (١٨٠° ، ٣) ، (٣٦٠° ، ٣)
وأدنى النقاط لهذه الدالة هي: (٩٠° ، −٣) ، (٢٧٠° ، −٣)

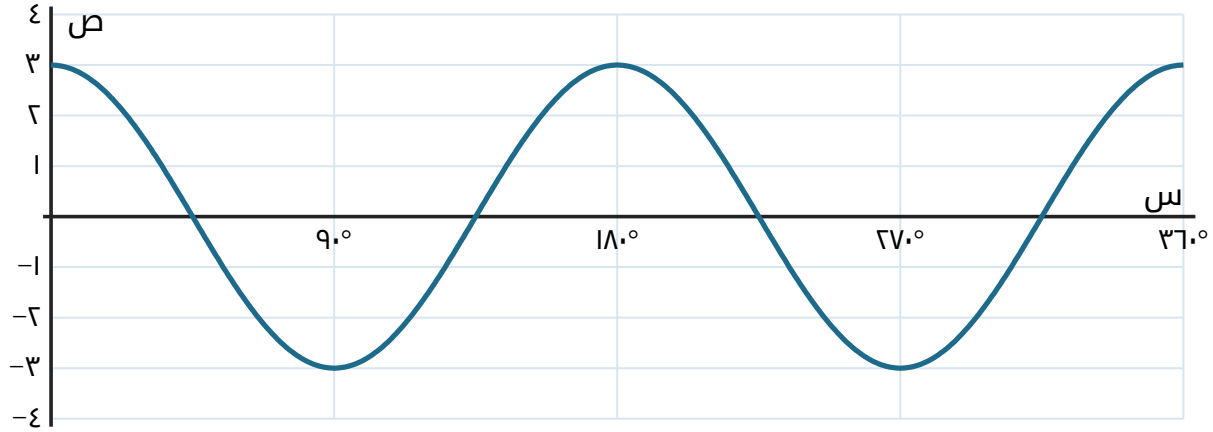
الحل (تابع)

إحداثيات أعلى وأدنى نقاط للدالة ص = جتا س هي: (٠° ، ١) ، (١٨٠° ، −١) ، (٣٦٠° ، ١) ، (٥٤٠° ، −١) ، (٧٢٠° ، ١). يتم تحويل ص = جتا س إلى د(س) = ٣جتا(٢س) بإجراء تمدد معامله $\frac{١}{٢}$ موازٍ للمحور السيني، وتمدد معامله ٣ موازٍ للمحور الصادي، لإيجاد الإحداثيات نضرب الإحداثي السيني بـ $\frac{١}{٢}$ والصادي في ٣.

حل مثال ١١ (ج، د)

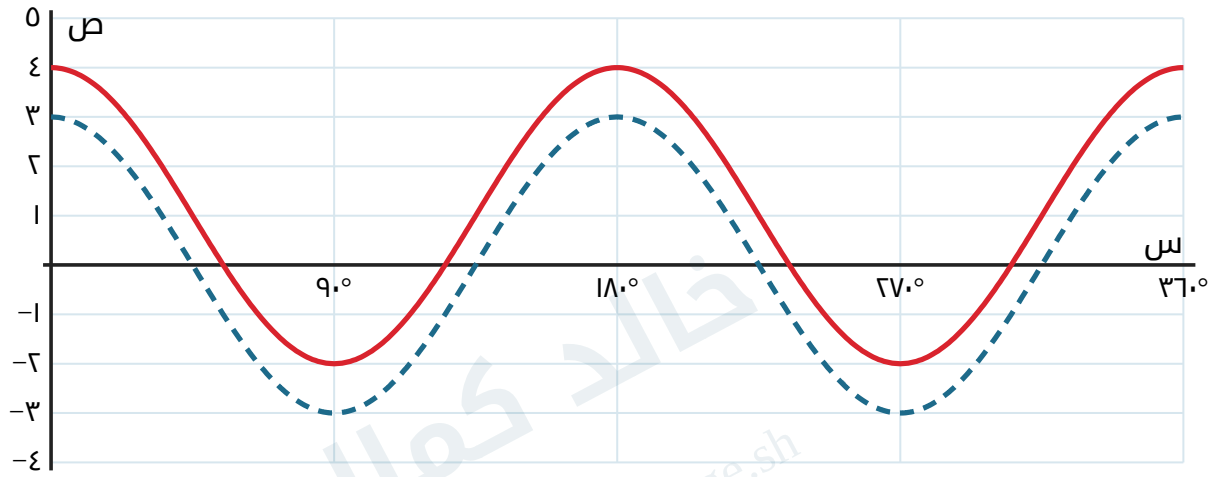
الحل

ج) بيان ص = ٣جتا(٢س)



د)

التمثيل البياني للدالة ص = ١ + ٣جتا (٢س) هو انسحاب لبيان الدالة ص = ٣جتا (٢س) بالمتجه (٠ ، ١).



خالد كمال
khaled-math.surge.sh

مثال ١٢

مثال ١٢

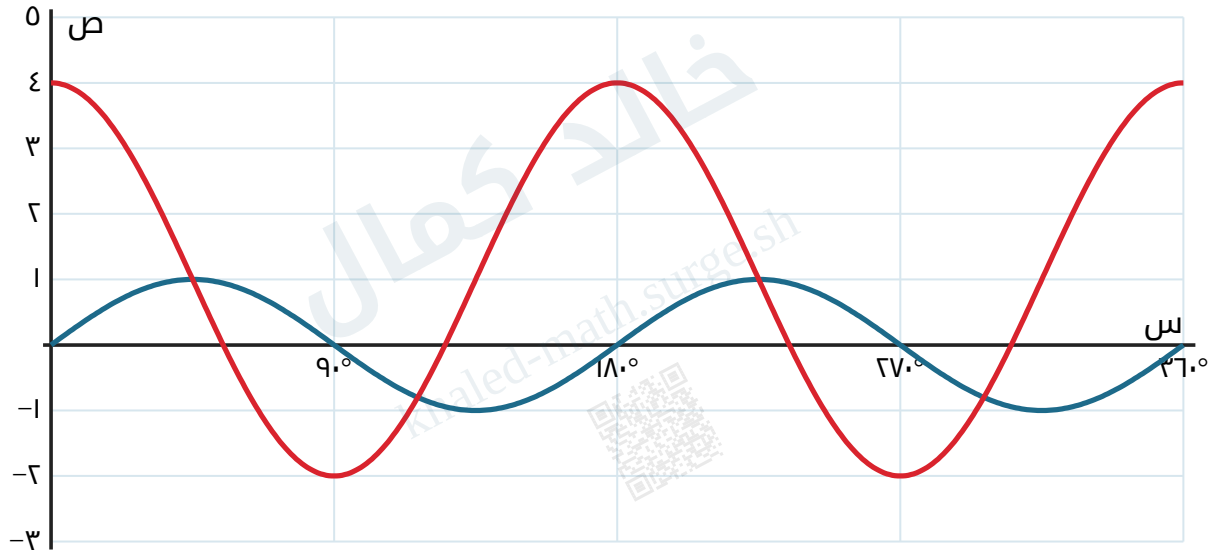
أ) في المستوى الإحداثي نفسه، مثّل بيانيًّا الدالتَين ص = جا (٢س)، ص = ١ + ٣جتا (٢س)، حيث ٠° ≤ س ≤ ٣٦٠°

ب) حدد عدد حلول المعادلة جا (٢س) = ١ + ٣جتا (٢س)، حيث ٠° ≤ س ≤ ٣٦٠°

حل مثال ١٢

الحل

أ) بيان الدالة ص = ١ + ٣جتا (٢س) تم تمثيله في المثال السابق. نرسم بيان الدالة ص = جا (٢س) بإجراء تمدد لبيان الدالة ص = جا س معامله ١/٢ وموازٍ للمحور السيني.



ص = جا (٢س) ص = ١ + ٣جتا (٢س)

ب) يتقاطع بيان الدالة ص = جا (٢س) مع بيان الدالة ص = ١ + ٣جتا (٢س) في أربع نقاط في الفترة المعطاة.

∴ توجد أربعة حلول للمعادلة جا (٢س) = ١ + ٣جتا (٢س).

تمارين ٢-٤ (١)

١) اكتب دورة كل دالة من الدوال الآتية:

أ ص = جتا س

.....

ب ص = جا (٢س)

.....

ج ص = ٣ظا ($\frac{١}{٢}$س)

.....

د ص = ١ + ٢جا (٣س)

.....

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

تمارين ٢-٤ (١ تابع)

١) (تابع) اكتب دورة كل دالة من الدوال الآتية:

هـ ص = ظا (س − ٣٠°)

.....

و ص = ٥جتا (٢س + ٤٥°)

.....

تمارين ٢-٤ (٢)

٢) اكتب سعة كل دالة من الدوال الآتية:

أ ص = جا س

ب ص = ٥جتا (٢س)

ج ص = ٧جا $(\frac{١}{٢}$ س)

د ص = ٢ − ٣جتا (٤س)

تمارين ٢-٤ (٢ تابع)

٢) (تابع) اكتب سعة كل دالة من الدوال الآتية:

هـ ص = ٤جا (٢س + ٦٠°)

و ص = ٥ + ٢جا (٣س + ١٠°)

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

تمارين ٢-٤ (٣)

٣) مثّل بيانيًّا كل دالة من الدوال الآتية في الفترة ٠° ≤ س ≤ ٣٦٠°:

أ ص = ٢جتا س

ب ص = جا $\left(\frac{١}{٢}\text{س}\right)$

ج ص = ظا (٣س)

د ص = ٣جتا (٢س)

تمارين ٢-٤ (٣ تابع)

٣) (تابع) مثّل بيانيًّا كل دالة من الدوال الآتية في الفترة ٠° ≤ س ≤ ٣٦٠°:

هـ ص = ١ + ٣جتا س

و ص = −١ + ٢جا (٣س)

ز ص = جا (س − ٤٥°)

ح ص = ٢جتا (س + ٦٠°)

ط ص = ظا (س − ٩٠°)

خالد كمال
tooled-math.surge.sh

تمارين ٢-٤ (٤)

٤) أ) مثّل بيانيًّا كل دالة من الدوال الآتية في الفترة ٠ ≤ س ≤ ٢π:

١) ص = ٢جا س ٢) ص = جتا (س − $\frac{\pi}{٢}$) ٣) ص = جا (٢س + $\frac{\pi}{٤}$)

ب) اكتب إحداثيات أعلى وأدنى النقاط للتمثيل البياني للجزئية (أ)(٣).

تمارين ٢-٤ (٥)

٥) أ) ارسم على المستوى الإحداثي نفسه بيان الدالتَين ص = جا (٢س) ، ص = ١ + جتا (٢س) في الفترة °٠ ≤ س ≤ °٣٦٠

ب) حدد عدد حلول المعادلة جا (٢س) = ١ + جتا (٢س) في الفترة °٠ ≤ س ≤ °٣٦٠

تمارين ٢-٤ (٦، ٧)

٦) أ) ارسم على المستوى الإحداثي نفسه بيان ص = ٢جا س ، وبيان الدالة ص = ٢ + جتا ٣س في الفترة ٠ ≤ س ≤ ٢π

ب) حدد عدد حلول المعادلة ٢جا س = ٢ + جتا (٣س) في الفترة ٠ ≤ س ≤ ٢π

٧) أ) ارسم على المستوى الإحداثي نفسه بيان الدالتَين ص = ٣جا س ، ص = جتا (٢س) في الفترة ٠ ≤ س ≤ ٢π

ب) حدد عدد حلول المعادلة ٣جا س = جتا (٢س) في الفترة ٠ ≤ س ≤ ٢π

خالد كمال
khaled-math-curge.sh

تمارين ٢-٤ (٨، ٩)

٨) يبيّن الرسم المجاور جزءًا من بيان الدالة ص = جـ + أ جا (ب س) . أوجِد قيم أ، ب، جـ، حيث أ، ب، جـ قيم موجبة.

الرسم في كتاب الطالب صفحة ٦٥: منحنى من ص = ٥ عند س = ٠ يصعد إلى ٩ ويهبط إلى ١ وهكذا، على الفترة ٠ ≤ س ≤ ٢π.

٩) يبيّن الرسم المجاور جزءًا من بيان الدالة ص = أ + ب جتا (جـ س) . أوجِد قيم أ، ب، جـ، حيث أ، ب، جـ قيم موجبة.

الرسم في كتاب الطالب صفحة ٦٥: ص تتراوح بين ١ و ٥، ثلاث دورات في الفترة ٠° ≤ س ≤ ٣٦٠°.

تمارين ٢-٤ (١٠، ١١)

١٠) أ) ارسم بيان ص = ٢جا س في الفترة −π ≤ س ≤ π

ب) إذا كان المستقيم ص = ك س ، حيث ك ثابت، ويقطع بيان الدالة عند نقطة القيمة العظمى، فأوجِد:

١) قيمة ك بدلالة π

٢) حدّد إحداثيات النقاط الأخرى التي يتقاطع عندها المستقيم مع بيان الدالة.

١١) يبيّن الرسم المجاور جزءًا من بيان الدالة ص = جـ + أ ظا (ب س) ، الذي يمر بالنقطة ل ($\frac{\pi}{٤}$ ، ٨). أوجِد قيم أ، ب، جـ، حيث أ، ب، جـ قيم موجبة.

الرسم في كتاب الطالب صفحة ٦٦.

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

تمارين ٢-٤ (١٢، ١٣)

١٢) إذا علمت أن د(س) = أ + ب جا س في الفترة ٠ ≤ س ≤ ٢π ، د(٠) = ٣ ، د($\frac{\pi}{٦}$) = ٢ ، فأوجِد:

أ) قيمة كل من أ، ب حيث أ، ب قيم موجبة.

ب) مدى الدالة د(س).

١٣) د(س) = أ − ب جتا س في الفترة ٠° ≤ س ≤ ٣٦٠°، أ، ب عددان ثابتان موجبان. القيمة العظمى للدالة د(س) هي ٨، والقيمة الصغرى هي −٢

أ) أوجِد قيمة كل من أ، ب.

ب) ارسم بيان الدالة ص = د(س).

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

تمارين ٢-٤ (١٤، ١٥)

١٤) د(س) = أ + ب جا (جـ س) في الفترة ٠° ≤ س ≤ ٣٦٠°، أ، ب عددان ثابتان موجبان. القيمة العظمى للدالة د(س) هي ٩، والقيمة الصغرى هي ١ ودورتها هي ١٢٠°. أوجِد قيم أ، ب، جـ.

١٥) د(س) = أ + ٥جتا (ب س) في الفترة ٠° ≤ س ≤ ١٢٠° . القيمة العظمى للدالة د(س) هي ٧، ودورتها هي ٦٠°

أ) اكتب قيمة كل من أ، ب حيث أ، ب قيم موجبة.

ب) اكتب سعة الدالة د(س).

ج) ارسم بيان الدالة د(س).

ورقة الإجابات النموذجية ٢-٤

تمرين ١ (الدورة): أ) ٣٦٠° | ب) ١٨٠° | ج) ٣٦٠° | د) ١٢٠° | هـ) ١٨٠° | و) ١٨٠°

تمرين ٢ (السعة): أ) ١ | ب) ٥ | ج) ٧ | د) ٣ | هـ) ٤ | و) ٢

تمرين ٨: أ = ٤ ، ب = ٢ ، جـ = ٥ | **تمرين ٩:** أ = ٣ ، ب = ٢ ، جـ = ٣

تمرين ١٠ (ب): ١) ك = $\frac{٤}{\pi}$ | ٢) (٠ ، ٠) و $(-\frac{\pi}{٢} ، -٢)$

تمرين ١١: أ = ٣ ، ب = ١ ، جـ = ٥

تمرين ١٢: أ) أ = ٣ ، ب = ٢ | ب) ١ ≤ ص ≤ ٥

تمرين ١٣: أ) أ = ٣ ، ب = ٥ | ب) البيان يبدأ من (٠° ، −٢) ويصل إلى ٨ عند ١٨٠°

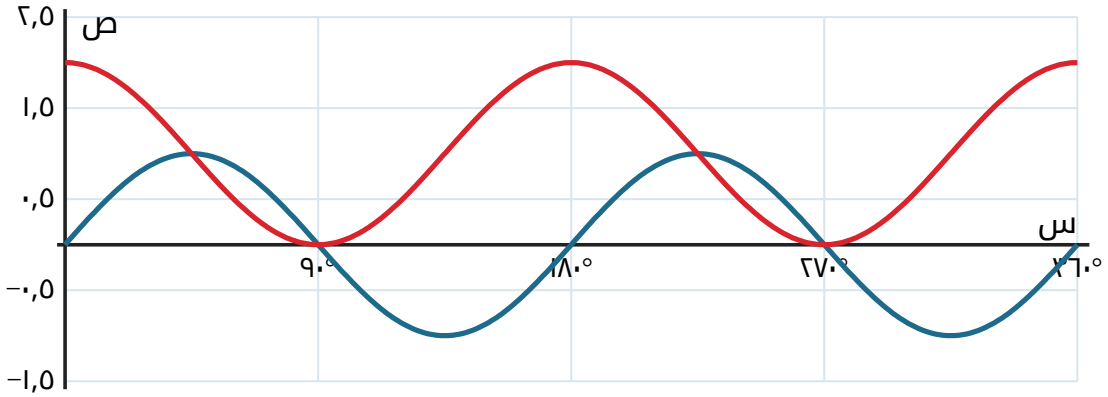
تمرين ١٤: أ = ٥ ، ب = ٤ ، جـ = ٣ | **تمرين ١٥:** أ) أ = ٢ ، ب = ٦ | ب) السعة = ٥

تمرين ٤ (ب): أعلى النقاط $(\frac{\pi}{٨} ، ١)$ و $(\frac{\pi٩}{٨} ، ١)$ ، وأدنى النقاط $(\frac{\pi٥}{٨} ، -١)$ و $(\frac{\pi١٣}{٨} ، -١)$

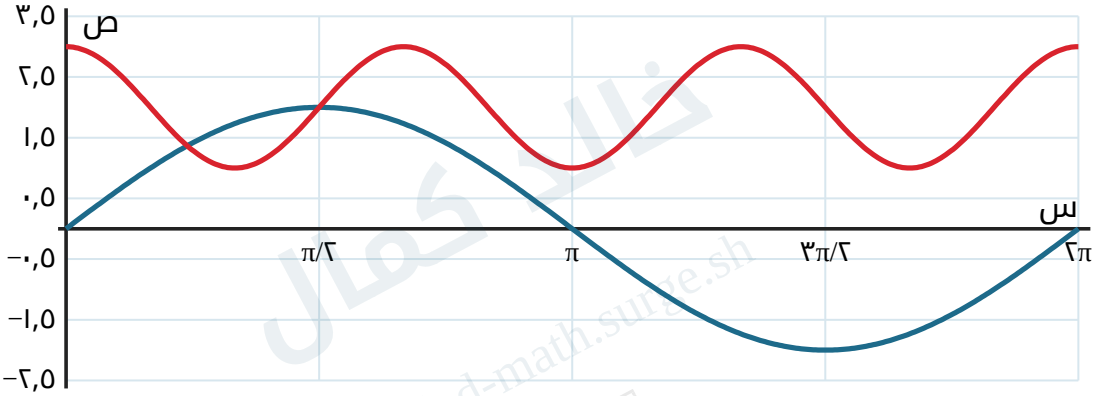
ورقة الإجابات ٢-٤ (٥، ٦، ٧)

تمرين ٥: أ) انظر الرسم | ب) عدد الحلول = ٤

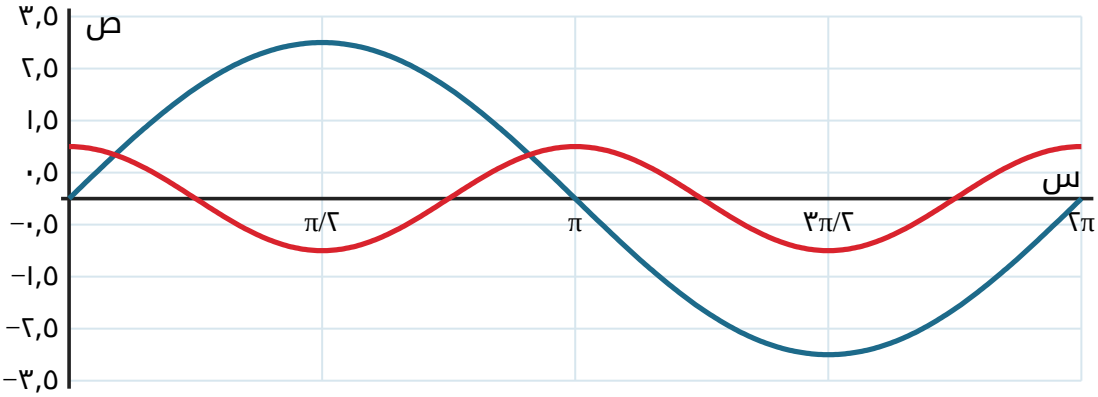
خالد كمال
khaled-math-surge.sh



تمرين ٦: ب) عدد الحلول = ٢



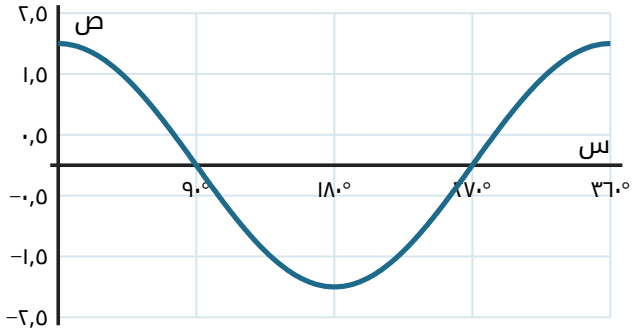
تمرين ٧: ب) عدد الحلول = ٢



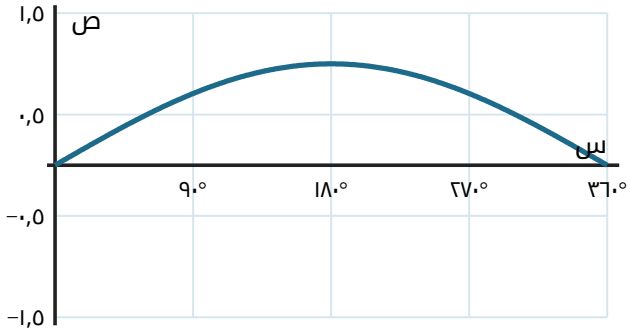
خالد كمال
khaled-math.surge.sh

ورقة الإجابات ٢-٤ (تمرين ٣ أ، ب، ج، د)

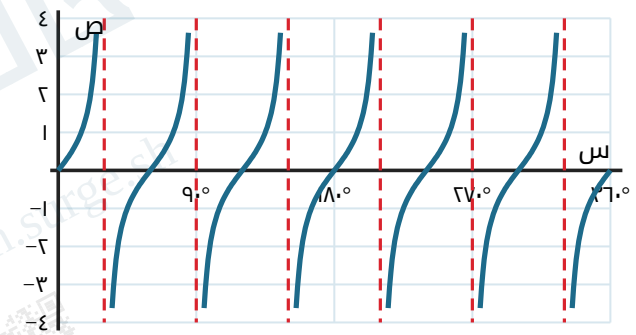
أ) ص = ٢جتا س



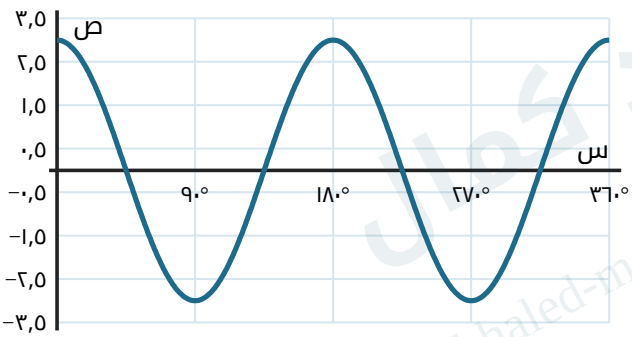
ب) ص = جا(½س)



ج) ص = ظا(٣س)



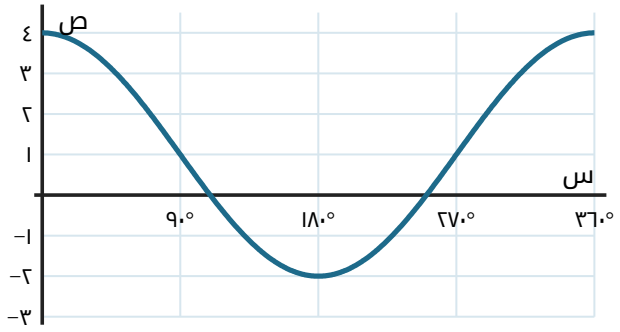
د) ص = ٣جتا(٢س)



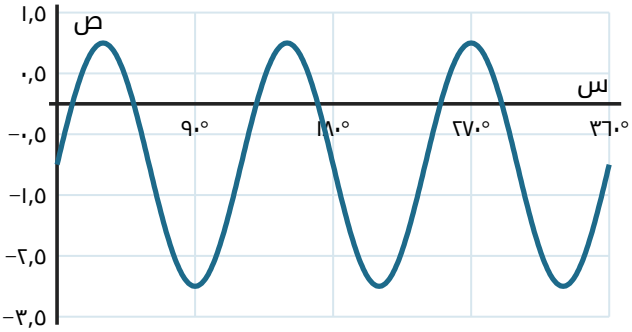
خالد كمال
khaled-math.site

ورقة الإجابات ٢-٤ (تمرين ٣ هـ، و، ز، ح)

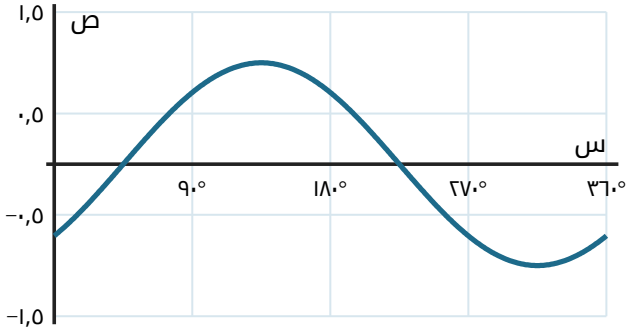
هـ) ص = ١ + ٣جتا س



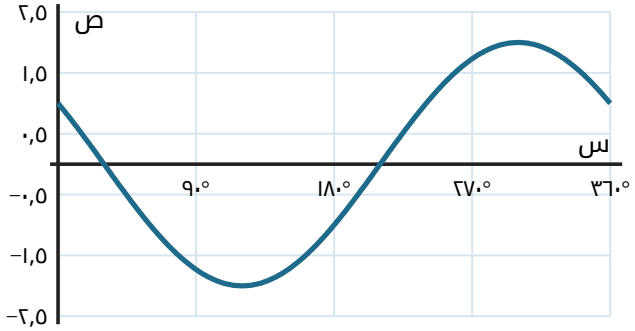
و) ص = −١ + ٢جا(٣س)



ز) ص = جا(س − ٤٥°)

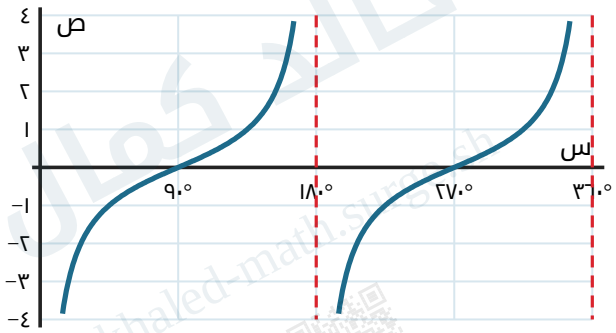


ح) ص = ٢جتا(س + ٦٠°)



ورقة الإجابات ٢-٤ (تمرين ٣ ط، ٤ أ)

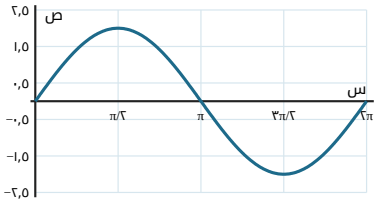
ط) ص = ظا(س − ٩٠°)



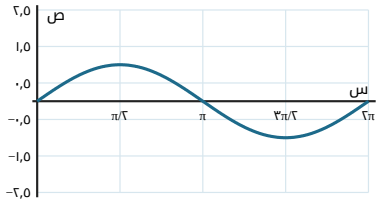
خالد كمال
khaled-math.sy.gd

تمرين ٤ (أ):

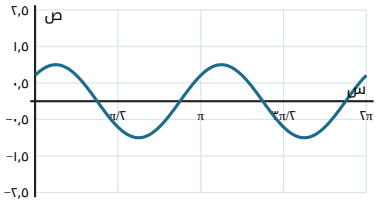
١) ص = ٢جا س



٢) ص = جتا(س − ٢/π)



٣) ص = جا(٢س + ٤/π)



ملاحظة: الإجابات والرسوم من حسابي لأن كتاب الطالب لا يتضمن مفتاح إجابات.

٢-٥ الدوال المثلثية العكسية

Inverse trigonometric functions

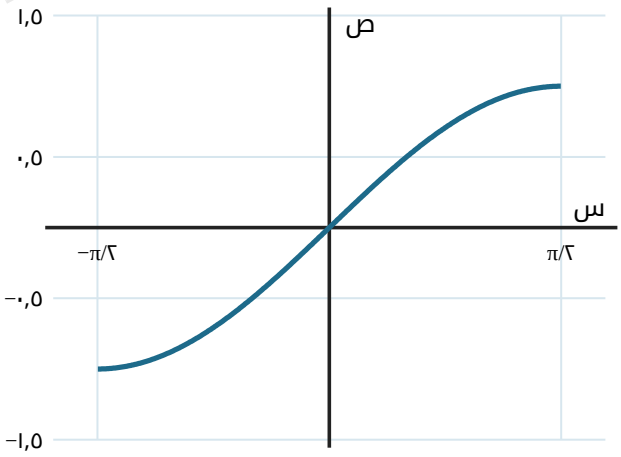
تعلمت في الصف ١١، الوحدة ٢ الدالة العكسية. وستتعلم في هذا الدرس الحالة الخاصة للدوال المثلثية العكسية **(Inverse trigonometric functions)**.

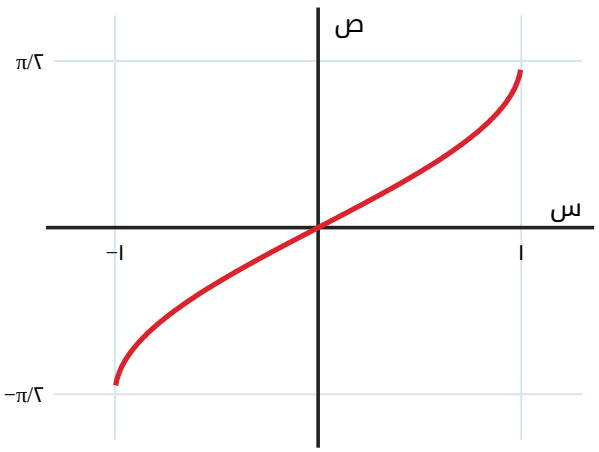
الدوال ص = جا س، ص = جتا س، ص = ظا س هي دوال متعدد إلى واحد. إذا حددنا فترة من مجال كل منها، فيمكننا أن نجعل الدالة واحدًا إلى واحد، الأمر الذي يُمكّننا من تعريف دالتها العكسية.

فيما يأتي التمثيلات البيانية للدالة المحدد مجالها ومداها: ص = جا س، ص = جتا س، ص = ظا س، والدوال العكسية لها هي ص = جا$^{-١}$ س، ص = جتا$^{-١}$ س، ص = ظا$^{-١}$ س مع مجالها ومداها:

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

ص = جا س وعكسها





ص = جا س

المجال: $-\pi/٢ \leq$ س $\leq \pi/٢$

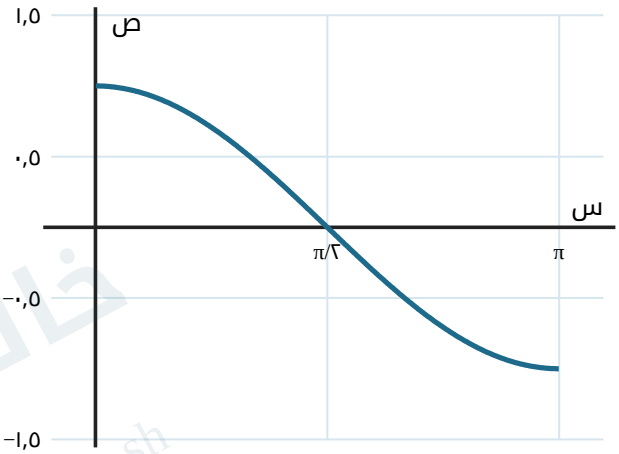
المدى: $-١ \leq$ جا س ≤ ١

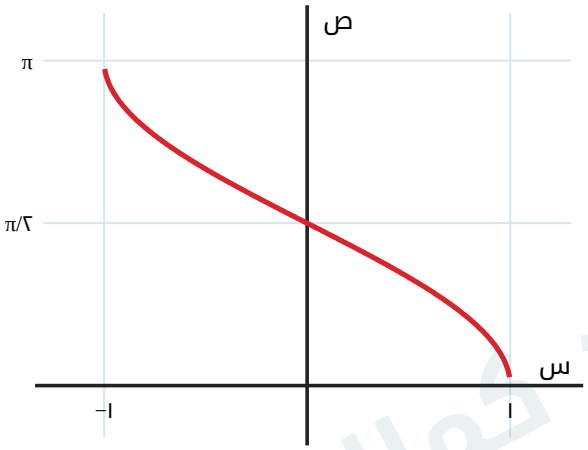
ص = جا$^{-١}$ س

المجال: $-١ \leq$ س ≤ ١

المدى: $-\pi/٢ \leq$ جا$^{-١}$ س $\leq \pi/٢$

ص = جتا س وعكسها





ص = جتا س

المجال: $٠ \leq$ س $\leq \pi$

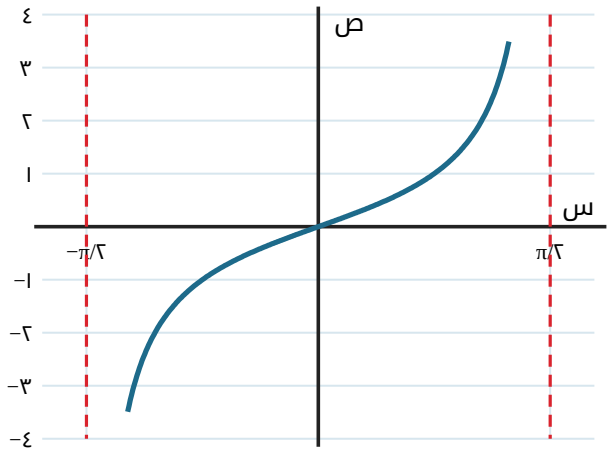
المدى: $-١ \leq$ جتا س ≤ ١

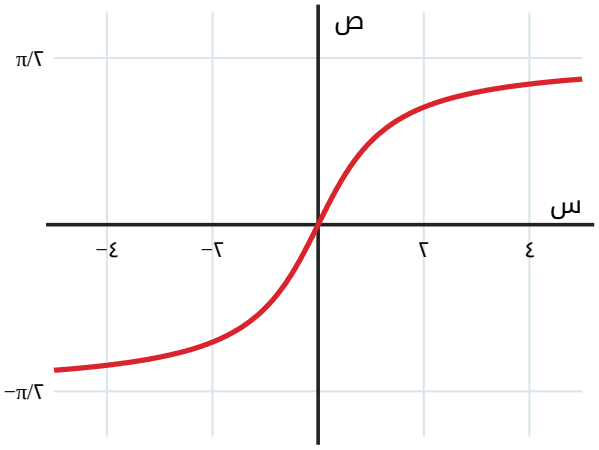
ص = جتا$^{-١}$ س

المجال: $-١ \leq$ س ≤ ١

المدى: $٠ \leq$ جتا$^{-١}$ س $\leq \pi$

ص = ظا س وعكسها





خالد كمال
khaled-math.surge.sh

ص = ظا س	ص = ظا$^{-1}$ س
المجال: $-\frac{\pi}{2} < س < \frac{\pi}{2}$	المجال: س ∈ ع
المدى: ظا س ∈ ع	المدى: $-\frac{\pi}{2} <$ ظا$^{-1}$ س $< \frac{\pi}{2}$

مساعدة

الدوال واحد إلى واحد فقط لها دوال عكسية. فإذا كانت د(س)، د$^{-1}$(س) دالتَين عكسيتَين، فإن التمثيل البياني للدالة د$^{-1}$(س) هو انعكاس للدالة د(س) حول المستقيم ص = س.

مدى الدالة د(س) هو مجال الدالة د$^{-1}$(س).

جا$^{-1}$(جا س) = س

زاوية الأساس

عند حل المعادلة جا س = ٠٫٥، حيث $0 \le س \le \pi$، يمكننا أن نجد حلًّا وحيدًا باستخدام الدالة العكسية:

س = جا$^{-1}$ ٠٫٥

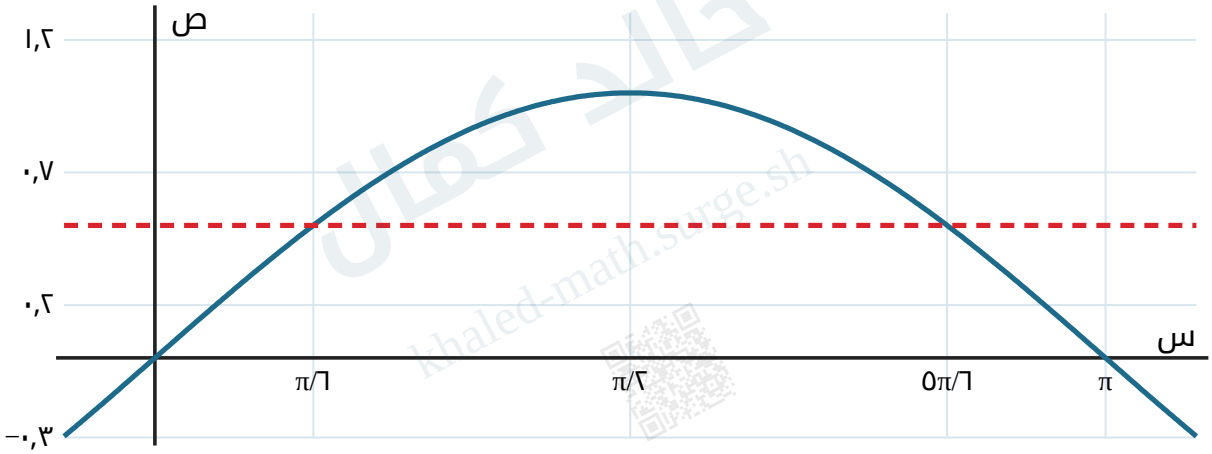
استخدم الحاسبة لتجد أن س = $\frac{\pi}{٦}$

الزاوية التي تظهر على الحاسبة هي التي تقع في مجال الدالة العكسية جا$^{-1}$(س).

زاوية الأساس (principal angle): هي الزاوية التي تقع في مدى الدالة المثلثية العكسية.

الزاوية الثانية

توجد زاوية ثانية وهي س = $\frac{\pi ٥}{٦}$ ، والتي تحقق المعادلة جا س = ٠٫٥ حيث ٠ ≤ س ≤ π. نجد هذه الزاوية الثانية إما باستخدام المهارات التي تعلمناها سابقًا أو باستخدام تماثل بيان الدالة ص = جا س.



الزاوية الثانية هي: $\pi - \frac{\pi}{٦} = \frac{\pi ٥}{٦}$

مثال ١٣

مثال ١٣

أوجد بالدرجات قيمة كلٍّ مما يأتي:

مثال ١٣ (تابع)

أ) جا$^{-١}$ (٠) في المجال $-٩٠° \leq$ جا$^{-١}$ (٠) $\leq ٩٠°$

ب) جتا$^{-١}$ ($\frac{\sqrt{٣}}{٢}$) في المجال $٠° \leq$ جتا$^{-١}$ ($\frac{\sqrt{٣}}{٢}$) $\leq ١٨٠°$

ج) ظا$^{-١}$ (−١) في المجال $-٩٠° \leq$ ظا$^{-١}$ (−١) $\leq ٩٠°$

حل مثال ١٣

الحل

أ) جا(٠) = ٠° ∴ جا$^{-١}$ (٠) هي الزاوية في الفترة المعطاة التي جيبها = ٠ ، فيكون جا$^{-١}$ (٠) = ٠°

ب) جتا ٣٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ∴ جتا$^{-١}$ ($\frac{\sqrt{٣}}{٢}$) هي الزاوية في الفترة المعطاة التي جيب تمامها = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، فيكون جتا$^{-١}$ ($\frac{\sqrt{٣}}{٢}$) = ٣٠°

ج) ظا(−٤٥°) = −١ ∴ ظا$^{-١}$ (−١) هي الزاوية في الفترة المعطاة التي ظلها = −١ ، فيكون ظا$^{-١}$ (−١) = −٤٥°

مثال ١٤

مثال ١٤

إذا علمت أن الدالة د(س) = −١ + ٣جا($\frac{\text{س}}{٢}$) معرّفة في الفترة −π ≤ س ≤ π:

أ) ارسم بيان الدالة ص = د(س)، وفسر سبب وجود دالة عكسية للدالة د(س).

ب) أوجد مدى الدالة د(س).

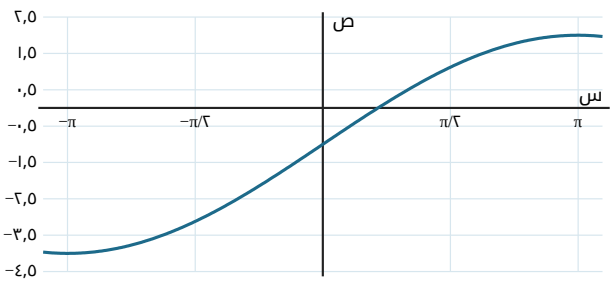
ج) أوجد $د^{-١}$(س)، وحدد مجالها.

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

حل مثال ١٤ (أ)

الحل

أ) نحصل على بيان الدالة د(س) بإجراء التحويلات الهندسية على بيان الدالة ص = جا س، وهي تمدد معامله ٢ موازٍ للمحور السيني، يتبعه تمدد معامله ٣ موازٍ للمحور الصادي، ثم انسحاب بالمتجه (٠ ، −١).



توجد للدالة دالة عكسية لأنها دالة واحد إلى واحد في المجال المعطى.

حل مثال ١٤ (ب، ج)

الحل

ب) مدى الدالة د(س) هو $-٤ \leq$ د(س) ≤ ٢. نلاحظ من بيان الدالة أن أصغر قيمة لـ ص هي -٤ وأكبر قيمة هي ٢

ج) د(س) = $-١ + ٣$جا$(\frac{\text{س}}{٢})$

الخطوة ١: اكتب الدالة في صورة ص = $-١ + ٣$جا$(\frac{\text{س}}{٢})$

الخطوة ٢: بادل بين المتغيّرَين س، ص: س = $-١ + ٣$جا$(\frac{\text{ص}}{٢})$

الخطوة ٣: أعد الترتيب لتكتب ص بدلالة س: جا$(\frac{\text{ص}}{٢}) = \frac{\text{س} + ١}{٣}$ ، $\frac{\text{ص}}{٢} =$ جا$^{-١}(\frac{\text{س} + ١}{٣})$ ، ص = ٢جا$^{-١}(\frac{\text{س} + ١}{٣})$

الدالة العكسية هي: د$^{-١}$(س) = ٢جا$^{-١}(\frac{\text{س} + ١}{٣})$ ، ومجالها $-٤ \leq$ س ≤ ٢

مساعدة: مدى الدالة د(س) هو مجال الدالة د$^{-١}$(س).

تمارين ٢-٥ (أ)

١) اكتب قيمة كل مما يأتي بالدرجات:

أ $\text{جتا}^{-1}\ 1$	**ب** $\text{جا}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$	**ج** $\text{ظا}^{-1}\sqrt{3}$
د $\text{جا}^{-1}(-1)$	**هـ** $\text{ظا}^{-1}(-\sqrt{3})$	**و** $\text{جتا}^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

تمارين ٢-٥ (ب)

٢) اكتب قيمة كل مما يأتي بدلالة π:

أ $\text{جا}^{-1}(0)$	**ب** $\text{ظا}^{-1}(1)$	**ج** $\text{جتا}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$
د $\text{ظا}^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$	**هـ** $\text{جتا}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$	**و** $\text{جا}^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

تمارين ٢-٥ (٣، ٤)

٣) إذا علمت أن هـ = جتا$^{-١}$ ($\frac{٣}{٥}$)، فأوجد قيمة كل مما يأتي:

أ جا^{٢} هـ	ب ظا^{٢} هـ
.....	.....

٤) إذا علمت أن الدالة د(س) = −٤ + ٣جا س معرّفة على المجال $-\frac{\pi}{٢} \geq$ س $\geq \frac{\pi}{٢}$،

فأوجد:

أ) مدى الدالة د(س). ب) د$^{-١}$(س).

تمارين ٢-٥ (٥)

٥) الدالة د(س) = ٤ − ٢جتا س معرّفة على المجال ٠ ≤ س ≤ π:

أ) أوجد مدى الدالة د(س)، وارسم بيان الدالة ص = د(س).

ب) فسّر سبب وجود دالة عكسية للدالة د(س)، وأوجد د$^{-١}$(س).

ج) ارسم بيان الدالة ص = د$^{-١}$(س) في المستوى الإحداثي نفسه للدالة في الجزئية (أ).

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

تمارين ٢-٥ (٦، ٧)

٦) الدالة د(س) = ٥ − ٢جا س معرّفة على المجال $\frac{\pi}{٢} \geq$ س ≥ ر:

أ) أوجد أكبر قيمة لـ ر بحيث تكون للدالة د(س) دالة عكسية.

ب) عند قيمة ر في الجزئية (أ)، أوجد $د^{-١}$(س)، ثم حدد مجالها.

٧) إذا علمت أن الدالة د(س) = −٥ + ٤جتا$(\frac{\text{س}}{٢})$ معرّفة على المجال ٠ ≤ س ≤ ٢π، فأوجد:

أ) مدى الدالة د(س). ب) $د^{-١}$(س)، وحدد مداها.

ورقة الإجابات النموذجية ٢-٥

تمرين ١ (بالدرجات): أ) ٠° | ب) ٣٠° | ج) ٦٠° | د) −٩٠° | هـ) −٦٠° | و) ١٣٥°

تمرين ٢ (بدلالة π): أ) ٠ | ب) ٤/π | ج) ٤/π | د) −٦/π | هـ) ٣/٢π | و) ٣/π

تمرين ٣: جتا هـ = $\frac{٣}{٥}$ ، جا هـ = $\frac{٤}{٥}$ | أ) جا^{٢} هـ = $\frac{١٦}{٢٥}$ | ب) ظا^{٢} هـ = $\frac{١٦}{٩}$

تمرين ٤: أ) −٧ ≤ د(س) ≤ −١ | ب) $د^{-١}$(س) = جا$^{-١}$$(\frac{\text{س} + ٤}{٣})$

تمرين ٥: أ) ٢ ≤ د(س) ≤ ٦ | ب) د واحد إلى واحد على المجال المعطى، $د^{-١}$(س) = جتا$^{-١}$$(\frac{٤ - \text{س}}{٢})$ ، ٢ ≤ س ≤ ٦

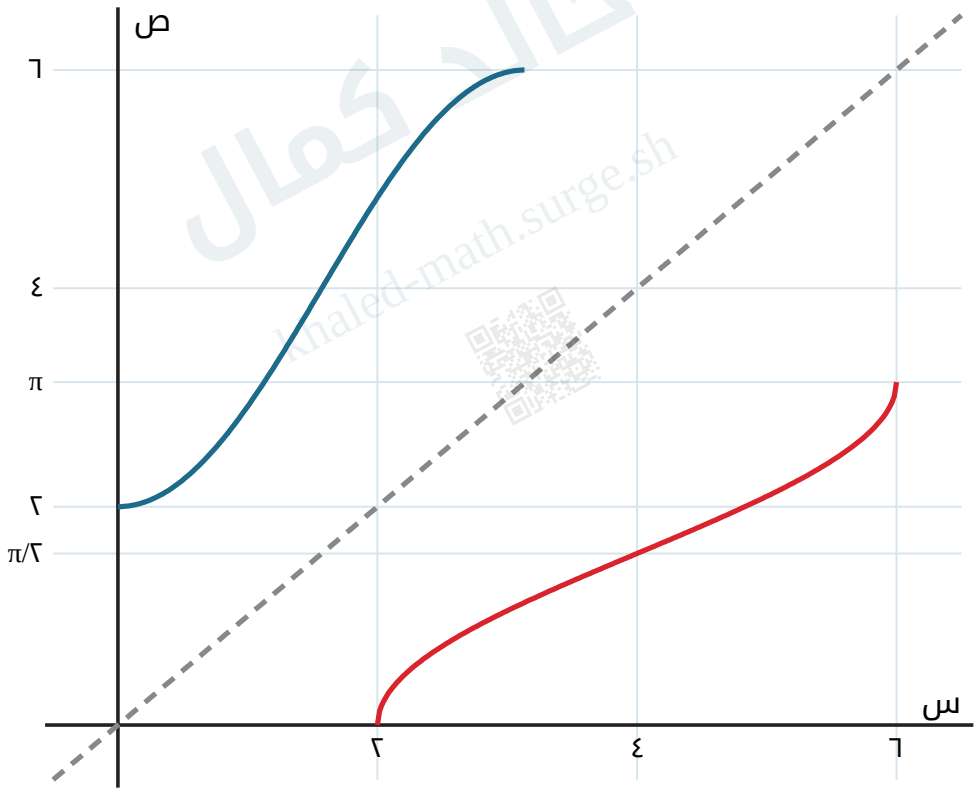
خالد كمال
khaled-math.surge.sh

تمرين ٦: أ) ر = $\frac{٣\pi}{٢}$ | ب) د$^{-١}$(س) = π − جا$^{-١}$($\frac{٥ - س}{٢}$) ، المجال ٣ ≤ س ≤ ٧

تمرين ٧: أ) −٩ ≤ د(س) ≤ −١ | ب) د$^{-١}$(س) = ٢جتا$^{-١}$($\frac{س + ٥}{٤}$) ، المدى ٠ ≤ د$^{-١}$(س) ≤ π٢

رسومات إجابات ٢-٥ (٥)

تمرين ٥ (أ، ج): بيان ص = ٤ − ٢جتا س (أزرق) وبيان عكسها (أحمر).



ملاحظة: الإجابات والرسوم من حسابي لأن كتاب الطالب لا يتضمن مفتاح إجابات.

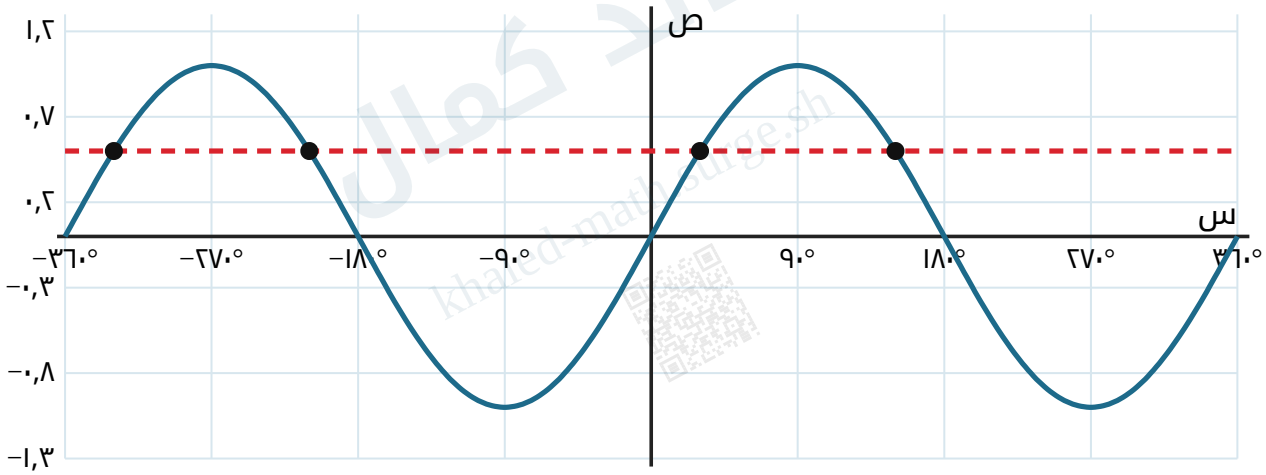
٦-٢ المعادلات المثلثية

Trigonometric equations

عند حل المعادلة جا س = ٠,٥ في الفترة −٣٦٠° ≤ س ≤ ٣٦٠°

ستجد أن أحد الحلول هو: س = جا$^{-1}$ (٠,٥) = $\frac{\pi}{٦}$ أو ٣٠°،

ولكن توجد قيم أخرى لـ س تحقق المعادلة في الفترة المعطاة، يمكنك إيجادها من التمثيل البياني للدالة ص = جا س:



الحلول الأربعة

يبيّن التمثيل البياني أربع قيم لـ س بين −٣٦٠° و ٣٦٠° تحقق المعادلة جا س = ٠,٥

يمكن أن نستخدم قيمة س = ٣٠° مع خصائص التماثل لبيان الدالة (في الفترات الجزئية) كما هو موضح في الشكل السابق، لنجد الإجابات الأخرى، وهي: −٣٦٠° + ٣٠°، −١٨٠° − ٣٠°، ١٨٠° − ٣٠°.

وعليه تكون حلول المعادلة جا س = ٠٫٥، حيث −٣٦٠° ≤ س ≤ ٣٦٠° هي:

−٣٣٠°، −٢١٠°، ٣٠°، ١٥٠°

ويمكن التوصل إلى الحلول السابقة للمعادلة من خلال خصائص التماثل باستخدام الزوايا −٢٧٠°، ٩٠° مع س = ٦٠°: −٢٧٠° − ٦٠°، −٢٧٠° + ٦٠°، ٩٠° + ٦٠°، ٩٠° − ٦٠°

فترات الزاوية

لحل معادلة ما، يمكنك استخدام التعويض.

مثال على ذلك: لحل المعادلة جا ٢أ = ٠٫٣، يمكنك أن تستخدم التعويض بافتراض أن س = ٢أ، ثم حل المعادلة جا س = ٠٫٣

لإيجاد قيمة أ، نقسم س على ٢ لأن أ = $\frac{\text{س}}{٢}$

إذا كان المطلوب حلول أ في الفترة −٩٠° ≤ أ ≤ ١٨٠°، يجب عليك إيجاد حلول س في الفترة −١٨٠° ≤ س ≤ ٣٦٠°

خطوات إيجاد الفترة (I)

تبيّن الخطوات الآتية كيفية إيجاد الفترة الصحيحة لقيم س:

−٩٠° ≤ أ ≤ ١٨٠° عوّض عن أ بـ $\frac{\text{س}}{٢}$

−٩٠° ≤ $\frac{\text{س}}{٢}$ ≤ ١٨٠° اضرب أطراف المتباينة في ٢

−١٨٠° ≤ س ≤ ٣٦٠° احصل على فترة س

مثال آخر

لتحل المعادلة جتا (٢أ + ١) = ٠,٨، يمكنك أن تستخدم التعويض بافتراض أن ص = ٢أ + ١، ثم تحل المعادلة جتا ص = ٠,٨

لإيجاد قيمة أ، عليك طرح ١ من الطرفين، ثم القسمة على ٢ لأن أ = $\frac{\text{ص} - ١}{٢}$،

إذا كان المطلوب حلول أ في الفترة −π ≤ أ ≤ π، فعليك إيجاد حلول ص في الفترة −٢π + ١ ≤ ص ≤ ٢π + ١

خطوات إيجاد الفترة (٢)

تبيّن الخطوات الآتية كيفية إيجاد الفترة الصحيحة لقيم ص:

−π ≤ أ ≤ π عوّض عن أ بـ $\frac{\text{ص} - ١}{٢}$

−π ≤ $\frac{\text{ص} - ١}{٢}$ ≤ π اضرب أطراف المتباينة في ٢

−٢π ≤ ص − ١ ≤ ٢π أضف ١ إلى أطراف المتباينة

−٢π + ١ ≤ ص ≤ ٢π + ١ احصل على فترة ص

مساعدة: حاول دائمًا التحقق من أن قياسات الزوايا التي حصلت عليها تقع في الفترة المعطاة في السؤال، ومن أنك لم تتجاهل حلولًا واقعة في هذه الفترة. إذا لم تقم بتعديل الفترة عند إجراء التعويض، فمن المرجح أن تحصل على حلول غير موجودة ضمن الفترة المحددة في السؤال، أو قد تتجاهل حلولًا تقع ضمن الفترة المحددة.

مثال ١٥

مثال ١٥

حل المعادلة جتا س = −٠٫٧ حيث ٠° ≤ س ≤ ٣٦٠°

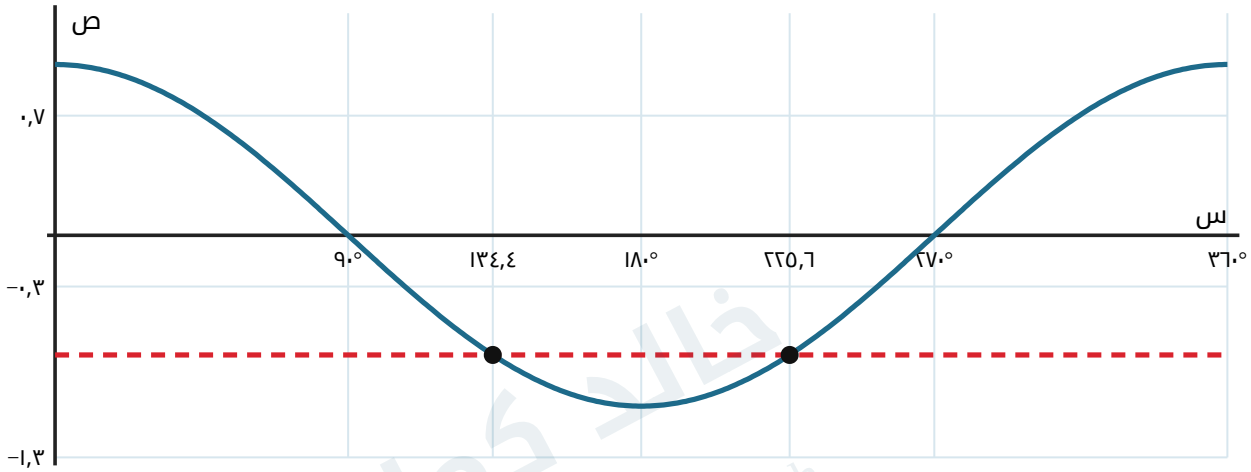
الحل

جتا س = −٠٫٧ استخدم الآلة الحاسبة لتجد جتا$^{-1}$ (−٠٫٧) (لأقرب منزلة عشرية واحدة)

أحد الحلول هو ١٣٤٫٤°

حل مثال ١٥ بالتمثيل البياني

يبيّن التمثيل البياني أن هناك قيمتَين لـ س بين ٠° و ٣٦٠° تحقق المعادلة جتا س = −٠,٧



نستخدم خصائص التماثل لإيجاد القيمة الثانية كالآتي: (١٨٠° + ٤٥,٦°) = ٢٢٥,٦° كما يمكنك إيجادها من خلال (٣٦٠° − ١٣٤,٤°) = ٢٢٥,٦°

وعليه يكون حل المعادلة جتا س = −٠,٧ حيث ٠° ≤ س ≤ ٣٦٠° هو: س = ١٣٤,٤° أو ٢٢٥,٦° (لأقرب منزلة عشرية واحدة)

مثال ١٥ طريقة بديلة

طريقة بديلة:

∵ جتا س = −٠,٧ ∴ جتا س سالب، ∴ أحد الحلول هو ١٣٤,٤°

وتقع هذه الزاوية في الربع الثاني. لإيجاد قياس "الزاوية" الثانية والتي تقع في الربع الثالث نتبع الآتي:

°٤٥,٦ − °١٨٠ = °١٣٤,٤

(°٤٥,٦ + °١٨٠) = °٢٢٥,٦

وعليه يكون حل المعادلة جتا س = −٠,٧ حيث °٠ ≤ س ≤ °٣٦٠ هو: س = °١٣٤,٤ أو °٢٢٥,٦ (لأقرب منزلة عشرية واحدة)

مثال ١٦

مثال ١٦

حل المعادلة ظا ٢أ = −٢,١، حيث °٠ ≤ أ ≤ °١٨٠

الحل

ظا ٢أ = −٢,١ افترض أن س = ٢أ، حيث °٠ ≤ س ≤ °٣٦٠

ظا س = −٢,١ استخدم الآلة الحاسبة لتجد قيمة ظا$^{-1}$ (−٢,١)

∴ س = −°٦٤,٥٤

حل مثال ١٦ (تابع)

دورة الدالة ظا هي °١٨٠، فيكون:

س = −°٦٤,٥٤ + ن × °١٨٠

في الفترة °٠ ≤ س ≤ °٣٦٠:

س = °١١٥,٤٦ أو °٢٩٥,٤٦

∴ ٢أ = °١١٥,٤٦ أو °٢٩٥,٤٦

أ = °٥٧,٧ أو °١٤٧,٧ (لأقرب منزلة عشرية واحدة)

مثال ١٦ طريقة بديلة

طريقة بديلة: ظا س سالب، فتقع الزاوية س في الربع الثاني أو الربع الرابع.

س = °١١٥,٤٦ أو °٢٩٥,٤٦

∴ ٢أ = °١١٥,٤٦ أو °٢٩٥,٤٦

أ = °٥٧,٧ أو °١٤٧,٧ (لأقرب منزلة عشرية واحدة)

مثال ١٧

مثال ١٧

حل المعادلة جا (٢أ + $\frac{\pi}{٦}$) = ٠,٦، حيث ٠ ≤ أ ≤ π

الحل

افترض أن س = ٢أ + $\frac{\pi}{٦}$

الحل (تابع)

٠ ≤ أ ≤ π ∴ $\frac{\pi}{٦}$ ≤ س ≤ $\frac{١٣\pi}{٦}$ (≈ ٠,٥٢٣٦ ≤ س ≤ ٦,٨٠٧)

جا س = ٠,٦ استخدم الحاسبة لتجد جا$^{-١}$ (٠,٦) = ٠,٦٤٣٥^{ء}

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

حل مثال ١٧ (تابع)

س = ٠,٦٤٣٥^{ء} أو س = π − ٠,٦٤٣٥ = ٢,٤٩٨١^{ء}

إذا كانت ٢أ + $\frac{\pi}{٦}$ = ٠,٦٤٣٥^{ء} فإن أ = $\frac{٠,٦٤٣٥ - \frac{\pi}{٦}}{٢}$ = ٠,٠٦٠٠^{ء}

إذا كانت ٢أ + $\frac{\pi}{٦}$ = ٢,٤٩٨١^{ء} فإن أ = $\frac{٢,٤٩٨١ - \frac{\pi}{٦}}{٢}$ = ٠,٩٨٧^{ء}

(لأقرب ٣ أرقام معنوية)

مثال ١٨

مثال ١٨

حل المعادلة جا $(\frac{١}{٢}$ أ$)$ = ٠,٧١٣ ء، حيث ٠ ≤ أ ≤ ٢π لأقرب منزلتين عشريتين.

الحل

∵ ٠ ≤ أ ≤ ٢π ∴ ٠ ≤ $\frac{١}{٢}$ أ ≤ π

جا $(\frac{١}{٢}$ أ$)$ = ٠,٧١٣ استخدم الحاسبة لتجد جا$^{-١}$ (٠,٧١٣)

$\frac{١}{٢}$ أ = ٠,٧٩٢ ء

حل مثال ١٨ (تابع)

استخدم تماثل بيان الدالة لتجد حلَّين في الفترة ٠ ≤ $\frac{١}{٢}$ أ ≤ π:

$\frac{١}{٢}$ أ = ٠,٧٩٢ | $\frac{١}{٢}$ أ = π − ٠,٧٩٢

أ = ٠٫٧٩٢ × ٢ = ١٫٥٩ ‏ | ‏ أ = (٠٫٧٩٢ − π) × ٢ = ٤٫٧٠

وعليه، يكون حل المعادلة جا ($\frac{١}{٢}$ أ) = ٠٫٧١٣ حيث ٠ ≤ أ ≤ ٢π هو: أ = ١٫٥٩ˁ أو ٤٫٧٠ˁ

القانون ١

في المثلث القائم الذي أضلاعه س، ص، ر (ر الوتر) يمكن إيجاد قانونَين مهمَّين:

القانون ١: جتا هـ = $\frac{\text{س}}{\text{ر}}$ ، جا هـ = $\frac{\text{ص}}{\text{ر}}$ ، ظا هـ = $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$

ومنه، $\frac{\text{جا هـ}}{\text{جتا هـ}} = \frac{\text{ص}}{\text{ر}} \div \frac{\text{س}}{\text{ر}} = \frac{\text{ص}}{\text{ر}} \times \frac{\text{ر}}{\text{س}} = \frac{\text{ص}}{\text{س}}$ = ظا هـ

نتيجة ٢

نتيجة ٢

ظا هـ = $\frac{\text{جا هـ}}{\text{جتا هـ}}$ لجميع قيم هـ، حيث جتا هـ ≠ ٠

القانون ٢ ونتيجة ٣

القانون ٢: جتا هـ = $\frac{\text{س}}{\text{ر}}$ ، جا هـ = $\frac{\text{ص}}{\text{ر}}$ وباستخدام نظرية فيثاغورث س^{٢} + ص^{٢} = ر^{٢}

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

ومنه، $\text{جتا}^{٢}\,هـ + \text{جا}^{٢}\,هـ = (\frac{س}{ر})^{٢} + (\frac{ص}{ر})^{٢} = \frac{س^{٢} + ص^{٢}}{ر^{٢}} = \frac{ر^{٢}}{ر^{٢}} = ١$

نتيجة ٣

$\text{جتا}^{٢}\,هـ + \text{جا}^{٢}\,هـ = ١$ لجميع قيم هـ.

إذا استخدمنا تعريف **دائرة الوحدة** للدوال المثلثية، نكتشف أنّ هذَين القانونَين صحيحان لجميع قيم هـ. يمكننا استخدامهما لحل المزيد من المعادلات المثلثية.

مثال ١٩

مثال ١٩

حل المعادلة $٣\,\text{جتا}^{٢}\,س - \text{جا}\,س \times \text{جتا}\,س = ٠$ حيث $٠° \le س \le ٣٦٠°$

الحل

$٣\,\text{جتا}^{٢}\,س - \text{جا}\,س\,\text{جتا}\,س = ٠$ حلل إلى العوامل.

$\text{جتا}\,س(٣\,\text{جتا}\,س - \text{جا}\,س) = ٠$ أحد العاملين أو كلاهما يساوي صفرًا.

إما $\text{جتا}\,س = ٠$، فيكون $س = ٩٠°$ أو $٢٧٠°$ أو $٣\,\text{جتا}\,س - \text{جا}\,س = ٠$

حل مثال ١٩ (تابع)

جا س = ٣جتا س

$$\frac{\text{جا س}}{\text{جتا س}} = ٣$$

ظا س = ٣

إما س = ٧١٫٦° أو ١٨٠° + ٧١٫٦°

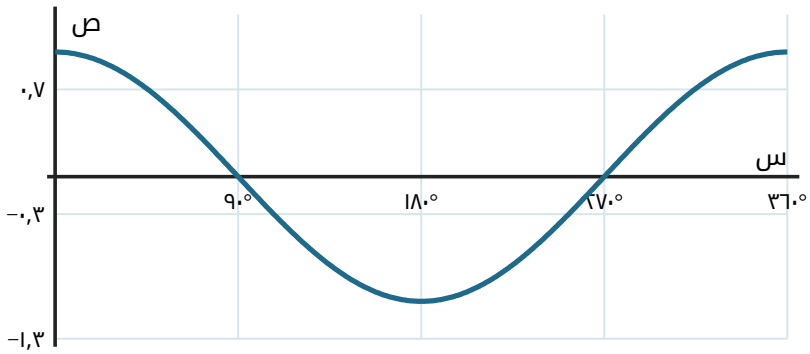
س = ٧١٫٦° أو ٢٥١٫٦°

∴ حلول المعادلة هي: ٧١٫٦° أو ٩٠° أو ٢٥١٫٦° أو ٢٧٠°

طريقة بديلة لمثال ١٩

طريقة بديلة لإيجاد قيم س باستخدام التمثيل البياني:

يمكن الحصول على قيم س باستخدام التمثيل البياني للدوال ص = جتا س، ص = ظا س:



خالد كمال
khaled-math.surge.sh

∴ قيم س هي: ٩٠°، ٢٧٠°

مثال ٢٠

مثال ٢٠

حل المعادلة ٢جا^{٢} س + ٣جتا س − ٣ = ٠، حيث ٠ ≤ س ≤ ٢π.

الحل

٢جا^{٢} س + ٣جتا س − ٣ = ٠ استبدل جا^{٢} س بـ (١ − جتا^{٢} س)

٢(١ − جتا^{٢} س) + ٣جتا س − ٣ = ٠ فك الأقواس، وجمّع الحدود.

حل مثال ٢٠ (تابع)

٢جتا^{٢} س − ٣جتا س + ١ = ٠ حلل العبارة التربيعية إلى العوامل بدلالة جتا س.

(٢جتا س − ١)(جتا س − ١) = ٠

جتا س = $\frac{١}{٢}$ أو جتا س = ١

س = $\frac{\pi}{٣}$ أو ٢π − $\frac{\pi}{٣}$ | س = ٠ أو ٢π

س = $\frac{\pi}{٣}$ أو $\frac{\pi ٥}{٣}$

∴ حلول المعادلة هي: ٠ أو $\frac{\pi}{٣}$ أو $\frac{\pi ٥}{٣}$ أو $\pi ٢$

تمارين ٢-٦ (أ)

أ) حل كل من المعادلات الآتية، حيث °٠ ≤ س ≤ °٣٦٠:

أ ظا س = ١,٥

ب جا س = ٠,٤

ج جتا س = ٠,٧

د جا س = −٠,٣

هـ جتا س = −٠,٦

و ظا س = −٢

ز ٢جتا س − ١ = ٠

ح ٥جا س + ٣ = ٠

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

تمارين ٢-٦ (٢)

٢) حل كل من المعادلات الآتية، حيث ٠ ≤ س ≤ ٢π:

أ جا س = ٠,٣

ب جتا س = ٠,٥

ج ظا س = ٣

د جا س = −٠,٧

هـ ظا س = −٣

و جتا س = −٠,٥

ز ٤جا س = ٣

ح ٥ظا س + ٧ = ٠

تمارين ٢-٦ (٣)

٣) حل كل من المعادلات الآتية، حيث ٠° ≤ س ≤ ١٨٠°:

أ جتا (٢س) = ٠,٦

ب جا (٣س) = ٠,٨

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

ج ظا (٢س) = ٤	د جا (٢س) = −٠,٥
هـ ٣جتا (٢س) = ٢	و ٥جا (٢س) = −٤
ز ٤ + ٢ظا (٢س) = ٠	ح ١ − ٥جا (٢س) = ٠

تمارين ٢-٦ (٤ أ، ب، ج)

٤) حل كل معادلة من المعادلات الآتية في الفترة المعطاة:

أ) جا (س − ٦٠°) = ٠,٥ حيث ٠° ≤ س ≤ ٣٦٠°

ب) جتا (س + $\frac{\pi}{٦}$) = −٠,٥ حيث ٠ < س < ٢π

ج) جتا (٢س + ٤٥°) = ٠,٨ حيث ٠° ≤ س ≤ ١٨٠°

تمارين ٢-٦ (٤ د، هـ، و)

د) ٣جا (٢س − ٤$^{\circ}$) = ٢ حيث ٠ < س < π

هـ) ٢ظا ($\frac{\text{س}}{٢}$) + $\sqrt{٣}$ = ٠ حيث ٠° ≤ س ≤ ٥٤٠°

و) $\sqrt{٢}$ جا $(\frac{\pi}{٤} + \frac{س}{٣}) = ١$ حيث $٠ < س < ٤\pi$

تمارين ٢-٦ (٥)

٥) حل كل من المعادلات الآتية، حيث $٠° \leq س \leq ٣٦٠°$:

أ $٢جا س = جتا س$

ب $٢جا س - ٣جتا س = ٠$

ج $٤جا س + ٧جتا س = ٠$

د $٣جتا (٢س) - ٤جا (٢س) = ٠$

تمارين ٢-٦ (٦)

٦) حل المعادلة $٤جا (٢س + ٠,٣^{ع}) - ٥جتا (٢س + ٠,٣^{ع}) = ٠$ حيث $٠ \leq س \leq \pi$

تمارين ٢-٦ (٧)

٧) حل كل معادلة من المعادلات الآتية، حيث $٠° \leq س \leq ٣٦٠°$:

أ $جا س \times جتا (س - ٦٠°) = ٠$

ب $٥جا^{٢} س - ٣جا س = ٠$

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

ج) ظا^{٢} س = ٥ظا س

د) جا^{٢} س + ٢جا س × جتا س = ٠

هـ) ٢جا س × جتا س = جا س

و) جا س × ظا س = ٤جا س

تمارين ٢-٦ (٨)

٨) حل كلًّا من المعادلتَين الآتيتَين، حيث ٠° ≤ س ≤ ٣٦٠°:

أ) ٤جتا^{٢} س = ١

ب) ٤ظا^{٢} س = ٩

تمارين ٢-٦ (٩ أ-د)

٩) حل كل من المعادلات الآتية، حيث ٠° ≤ س ≤ ٣٦٠°:

أ) ٢جا^{٢} س + جا س − ١ = ٠

ب) ظا^{٢} س + ٢ظا س − ٣ = ٠

ج $٣جتا^{٢} س - ٢جتا س - ١ = ٠$

د $٢جا^{٢} س - جتا س - ١ = ٠$

تمارين ٢-٦ (٩ هـ-ح)

أ $٣جتا^{٢} س - ٣ = جا س$

ب $جتا س + ٥ = ٦جا^{٢} س$

ج $٢جتا^{٢} س - جا^{٢} س - ٢جتا س - ١ = ٠$

د $١ + ظا س \times جتا س = ٢جتا^{٢} س$

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

تمارين ٢-٦ (١٠، ١١)

١٠) حل كلًّا من المعادلتَين الآتيتَين، حيث ٠ ≤ س ≤ ٢π:

أ ٤ظا س = ٣جتا س

.....

ب ٢جتا^{٢} س + ٥جا س = ٤

.....

١١) حل المعادلة جا^{٢} س + ٣جا س × جتا س + ٢جتا^{٢} س = ٠، حيث ٠ ≤ س ≤ ٢π.

ورقة الإجابات ٢-٦ (١، ٢)

تمرين ١:

أ) ٥٦٫٣°، ٢٣٦٫٣°

ب) ٢٣٫٦°، ١٥٦٫٤°

ج) ٤٥٫٦°، ٣١٤٫٤°

د) ١٩٧٫٥°، ٣٤٢٫٥°

هـ) ١٣٦٫٩°، ٢٣٣٫١°

و) ١١٦٫٦°، ٢٩٦٫٦°

ز) ٦٠°، ٣٠٠°

ح) ٢١٦٫٩°، ٣٢٣٫١°

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

ورقة الإجابات ٢-٦ (٢)

تمرين ٢:

أ) ٠٫٣٠٥ ، ٢٫٨٤

ب) $\frac{\pi}{٣}$ ، $\frac{\pi٥}{٣}$

ج) ١٫٢٥ ، ٤٫٣٩

د) ٣٫٩٢ ، ٥٫٥١

هـ) ١٫٨٩ ، ٥٫٠٣

و) $\frac{\pi٢}{٣}$ ، $\frac{\pi٤}{٣}$

ز) ٠٫٨٤٨ ، ٢٫٢٩

ح) ٢٫١٩ ، ٥٫٣٣

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

ورقة الإجابات ٢-٦ (٣)

تمرين ٣:

أ) ٢٦٫٦°، ١٥٣٫٤°

ب) ١٧٫٧°، ٤٢٫٣°، ١٣٧٫٧°، ١٦٢٫٣°

ج) ٣٨°، ١٢٨°

د) ١٠٥°، ١٦٥°

هـ) ٢٤,١°، ١٥٥,٩°

و) ١١٦,٦°، ١٥٣,٤°

ز) ٥٨,٣°، ١٤٨,٣°

ح) ٥,٨°، ٨٤,٢°

ورقة الإجابات ٢-٦ (٤)

تمرين ٤:

أ) ٩٠°، ٢١٠°

ب) $\frac{\pi}{٢}$، $\frac{٧\pi}{٦}$

ج) ١٣٩,١°، ١٧٥,٩°

د) ٠,٠٦٤٣ ث، ٢,٣٦ ث

هـ) ٢٧٨,٢°

و) $\frac{٣\pi}{٢}$

تمرين ٦: ٠,٢٩٨ ث، ١,٨٧ ث

ورقة الإجابات ٢-٦ (٥، ٨)

تمرين ٥:

أ) ٢٦٫٦°، ٢٠٦٫٦°

ب) ٥٦٫٣°، ٢٣٦٫٣°

ج) ١١٩٫٧°، ٢٩٩٫٧°

د) ١٨٫٤°، ١٠٨٫٤°، ١٩٨٫٤°، ٢٨٨٫٤°

تمرين ٨:

أ) ٦٠°، ١٢٠°، ٢٤٠°، ٣٠٠°

ب) ٥٦٫٣°، ١٢٣٫٧°، ٢٣٦٫٣°، ٣٠٣٫٧°

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

ورقة الإجابات ٢-٦ (٧)

تمرين ٧:

أ) ٠°، ١٥٠°، ١٨٠°، ٣٣٠°، ٣٦٠°

ب) ٠°، ٣٦٫٩°، ١٤٣٫١°، ١٨٠°، ٣٦٠°

ج) ٠°، ٧٨٫٧°، ١٨٠°، ٢٥٨٫٧°، ٣٦٠°

د) ٠°، ١١٦٫٦°، ١٨٠°، ٢٩٦٫٦°، ٣٦٠°

هـ) ٠°، ٦٠°، ١٨٠°، ٣٠٠°، ٣٦٠°

و) ٠°، ٧٦°، ١٨٠°، ٢٥٦°، ٣٦٠°

ورقة الإجابات ٢-٦ (٩)

تمرين ٩:

أ) ٣٠°، ١٥٠°، ٢٧٠°

ب) ٤٥°، ١٠٨,٤°، ٢٢٥°، ٢٨٨,٤°

ج) ٠°، ١٠٩,٥°، ٢٥٠,٥°، ٣٦٠°

د) ٦٠°، ١٨٠°، ٣٠٠°

هـ) ٠°، ١٨٠°، ١٩٩,٥°، ٣٤٠,٥°، ٣٦٠°

و) ٧٠,٥°، ١٢٠°، ٢٤٠°، ٢٨٩,٥°

ز) ١٢٣,٣°، ٢٣٦,٧°

ح) ٣٠°، ١٥٠°

ورقة الإجابات ٢-٦ (١٠، ١١)

تمرين ١٠:

أ) $٠,٥٦^{٥}$، $٢,٥٨^{٥}$

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

ب) $\frac{\pi}{٦}$ ، $\frac{\pi٥}{٦}$

تمرين ١١: ٢,٠٣ᵍ ، $\frac{\pi٣}{٤}$ ، ٥,١٨ᵍ ، $\frac{\pi٧}{٤}$

ملاحظة: الإجابات من حسابي لأن كتاب الطالب لا يتضمن مفتاح إجابات (الدرجات لأقرب منزلة عشرية، والراديان لأقرب ٣ أرقام معنوية).

٢-٧ المتطابقات المثلثية

Trigonometric identities

المتطابقة المثلثية **Trigonometric identity** هي علاقة تتحقق بجميع القيم الحقيقية للمتغير، أما المعادلة المثلثية فهي علاقة تتحقق ببعض القيم الحقيقية للمتغير.

فمثلًا: تُسمى س + س = ٢س **متطابقة identity** لأنها صحيحة لكل قيم س.

عندما نكتب متطابقة، غالبًا ما نستبدل الرمز = بالرمز ≡.

مساعدة: كل متطابقة هي معادلة، وليس كل معادلة هي متطابقة.

المتطابقتان الشائعتان

توجد متطابقتان مثلثيتان شائعتان، وهما الموجودتان في نتيجة ٢ ونتيجة ٣، وهما:

$$\text{جا}^{٢}\text{ س} + \text{جتا}^{٢}\text{ س} \equiv ١ \quad ، \quad \text{ظا س} \equiv \frac{\text{جا س}}{\text{جتا س}}$$

ستتعلم في هذا الدرس كيف تستخدم هاتَين المتطابقتَين في تبسيط العبارات، وفي برهنة المزيد من المتطابقات الأخرى التي تتضمن جا س، جتا س، وظا س.

كيف نبرهن المتطابقة

فعند برهنة المتطابقة، من المعتاد البدء بالطرف الذي يمكن تبسيطه في المتطابقة، وتبيان أن تبسيطه يوصل إلى الطرف الآخر.

مثال ٢١

مثال ٢١

اكتب ٤جتا^{٢} س − ٣جا^{٢} س بدلالة جتا س.

الحل

٤جتا^{٢} س − ٣جا^{٢} س ≡ ٤جتا^{٢} س − ٣(١ − جتا^{٢} س) استبدل جا^{٢} س بـ (١ − جتا^{٢} س).

≡ ٤جتا^{٢} س − ٣ + ٣جتا^{٢} س

≡ ٧جتا^{٢} س − ٣

مثال ٢٢

مثال ٢٢

أثبت صحة المتطابقة $\frac{\text{جتا س}}{\text{١ + جا س}} + \frac{\text{١ + جا س}}{\text{جتا س}} \equiv \frac{\text{٢}}{\text{جتا س}}$.

حل مثال ٢٢ (١)

الحل

الطرف الأيمن $\equiv \frac{\text{جتا س}}{\text{١ + جا س}} + \frac{\text{١ + جا س}}{\text{جتا س}}$ اجمع الكسرين

$\equiv \frac{(\text{١ + جا س})^{٢} + \text{جتا}^{٢}\text{ س}}{\text{جتا س}(\text{١ + جا س})}$ فك الأقواس في البسط

$\equiv \frac{\text{١ + ٢جا س + جا}^{٢}\text{ س + جتا}^{٢}\text{ س}}{\text{جتا س}(\text{١ + جا س})}$

حل مثال ٢٢ (٢)

$\equiv \frac{\text{١ + ٢جا س + جا}^{٢}\text{ س + جتا}^{٢}\text{ س}}{\text{جتا س}(\text{١ + جا س})}$ استخدم المتطابقة $\text{جا}^{٢}\text{ س + جتا}^{٢}\text{ س} \equiv \text{١}$

$\equiv \dfrac{٢ + ٢\text{جا } س}{\text{جتا } س(١ + \text{جا } س)}$ خذ العامل المشترك في البسط

$\equiv \dfrac{٢(١ + \text{جا } س)}{\text{جتا } س(١ + \text{جا } س)}$ اقسم البسط والمقام على (١ + جا س)

$\equiv \dfrac{٢}{\text{جتا } س}$ وهو الطرف الأيسر.

مثال ٢٣

مثال ٢٣

برهن المتطابقة: $\dfrac{١ + \text{جا } س}{١ - \text{جا } س} \equiv (\text{ظا } س + \dfrac{١}{\text{جتا } س})^{٢}$.

حل مثال ٢٣ (أ)

الحل

الطرف الأيسر $\equiv (\text{ظا } س + \dfrac{١}{\text{جتا } س})^{٢}$ استخدم ظا س $= \dfrac{\text{جا } س}{\text{جتا } س}$

$\equiv (\dfrac{\text{جا } س}{\text{جتا } س} + \dfrac{١}{\text{جتا } س})^{٢}$ اجمع الكسرين.

الحل (تابع)

$$\equiv \left(\frac{\text{ا} + \text{جا س}}{\text{جتا س}}\right)^{٢}$$

حل مثال ٢٣ (٢)

$$\equiv \frac{(\text{ا} + \text{جا س})^{٢}}{\text{جتا}^{٢}\text{ س}}$$ استخدم $\text{جتا}^{٢}\text{ س} = \text{ا} - \text{جا}^{٢}\text{ س}$

$$\equiv \frac{(\text{ا} + \text{جا س})^{٢}}{\text{ا} - \text{جا}^{٢}\text{ س}}$$ استخدم $\text{ا} - \text{جا}^{٢}\text{ س} = (\text{ا} + \text{جا س})(\text{ا} - \text{جا س})$

$$\equiv \frac{(\text{ا} + \text{جا س})^{٢}}{(\text{ا} + \text{جا س})(\text{ا} - \text{جا س})}$$ اقسم كلًّا من البسط والمقام على $(\text{ا} + \text{جا س})$

$$\equiv \frac{\text{ا} + \text{جا س}}{\text{ا} - \text{جا س}}$$ وهو الطرف الأيمن.

تمارين ٢-٧ (١، ٢ أ-ج)

١) اكتب العبارة $٢\text{جا}^{٢}\text{ س} - ٧\text{جتا}^{٢}\text{ س} + ٤$ بدلالة جا س.

٢) أثبت كل متطابقة من المتطابقات الآتية:

أ) $\text{جتا س} \times \text{ظا س} \equiv \text{جا س}$

ب) $\text{ظا س} \equiv \dfrac{\text{ا} - \text{جتا}^{٢}\,\text{س}}{\text{جا س} \times \text{جتا س}}$

ج) $\text{ا} + \text{جا س} \equiv \dfrac{\text{جتا}^{٢}\,\text{س}}{(\text{ا} - \text{جا س})}$

تمارين ٢-٧ (٢ د-و)

د) $\dfrac{\text{ا} + \text{جا س} - \text{جا}^{٢}\,\text{س}}{\text{جتا س}} \equiv \text{جتا س} + \text{ظا س}$

هـ) $\text{جا س} + \dfrac{\text{جتا}^{٢}\,\text{س} - \text{جا}^{٢}\,\text{س}}{\text{جتا س} + \text{جا س}} \equiv \text{جتا س}$

و) $\text{جتا}^{٤}\,\text{س} + \text{جا}^{٢}\,\text{س} \times \text{جتا}^{٢}\,\text{س} \equiv \text{جتا}^{٢}\,\text{س}$

تمارين ٢-٧ (٣)

٣) أثبت كل متطابقة من المتطابقات الآتية:

أ) $(\text{جا س} + \text{جتا س})^{٢} \equiv \text{ا} + ٢\text{جا س} \times \text{جتا س}$

ب) $٢(\text{ا} + \text{جتا س}) - (\text{ا} + \text{جتا س})^{٢} \equiv \text{جا}^{٢}\,\text{س}$

ج) $٢ - (\text{جا س} + \text{جتا س})^{٢} \equiv (\text{جا س} - \text{جتا س})^{٢}$

د) $(\text{جتا}^{٢}\,\text{س} - ٢)^{٢} - ٣\text{جا}^{٢}\,\text{س} \equiv \text{جتا}^{٤}\,\text{س} + \text{جا}^{٢}\,\text{س}$

خالد كمال
khaled-math.sure.sh

تمارين ٢-٧ (٤)

٤) أثبت كل متطابقة من المتطابقات الآتية:

أ) $\text{جتا}^{٢}\,س - \text{جا}^{٢}\,س \equiv ٢\text{جتا}^{٢}\,س - ١$

ب) $\text{جتا}^{٢}\,س - \text{جا}^{٢}\,س \equiv ١ - ٢\text{جا}^{٢}\,س$

ج) $\text{ظا}^{٢}\,س - \text{جا}^{٢}\,س \equiv \text{ظا}^{٢}\,س \times \text{جا}^{٢}\,س$

د) $\text{جتا}^{٤}\,س + \text{جا}^{٢}\,س \equiv \text{جا}^{٤}\,س + \text{جتا}^{٢}\,س$

تمارين ٢-٧ (٥ أ-د)

٥) أثبت كل متطابقة من المتطابقات الآتية:

أ) $\dfrac{\text{جتا}^{٢}\,س - \text{جا}^{٢}\,س}{\text{جتا}\,س - \text{جا}\,س} \equiv \text{جتا}\,س + \text{جا}\,س$

ب) $\text{جا}^{٤}\,س - \text{جتا}^{٤}\,س \equiv ٢\text{جا}^{٢}\,س - ١$

ج) $\dfrac{\text{جتا}^{٤}\,س - \text{جا}^{٤}\,س}{\text{جتا}^{٢}\,س} \equiv ١ - \text{ظا}^{٢}\,س$

د) $\dfrac{١}{\text{جا}\,س} + ١ \equiv \dfrac{\text{جتا}\,س}{\text{ظا}\,س(١ - \text{جا}\,س)}$

خالد كمال
khaled-mathsurge.sh

تمارين ٢-٧ (٥ هـ-ح)

هـ) $\dfrac{\text{جا س} - \text{جتا س}}{\text{جا س} + \text{جتا س}} \equiv \dfrac{\text{ظا س} - ١}{\text{ظا س} + ١}$

و) $\left(\dfrac{١}{\text{جا س}} - \dfrac{١}{\text{ظا س}}\right)^{٢} \equiv \dfrac{١ - \text{جتا س}}{١ + \text{جتا س}}$

ز) $\text{جا س} + \text{جتا س} \equiv \dfrac{\text{ظا س} + ١}{\text{جا س} \times \text{ظا س} + \text{جتا س}}$

ح) $\dfrac{\text{جا}^{٢}\text{س}(١ - \text{جتا}^{٢}\text{س})}{\text{جتا}^{٢}\text{س}(١ - \text{جا}^{٢}\text{س})} \equiv \text{ظا}^{٤}\text{س}$

تمارين ٢-٧ (٦، ٧)

٦) أثبت المتطابقة: $\dfrac{١}{\text{جتا س}} - \dfrac{\text{جتا س}}{١ + \text{جا س}} \equiv \text{ظا س}$.

٧) بيّن أن $(١ + \text{جتا س})^{٢} + (١ - \text{جتا س})^{٢} + ٢\text{جا}^{٢}\text{س}$ لها قيمة ثابتة لكل قيم س.

تمارين ٢-٧ (٨، ٩)

٨)

أ) اكتب العبارة $٧\text{جا}^{٢}\text{س} + ٤\text{جتا}^{٢}\text{س}$ في صورة $\text{أ} + \text{بجا}^{٢}\text{س}$، حيث أ، ب عددان ثابتان.

ب) اذكر مدى الدالة $\text{د}(\text{س}) = ٧\text{جا}^{٢}\text{س} + ٤\text{جتا}^{٢}\text{س}$، حيث $٠ \leq \text{س} \leq ٢\pi$.

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

٩)

أ) اكتب العبارة ٤جا هـ − جتا٢ هـ في صورة (جا هـ + أ)٢ + ب، حيث أ، ب عددان ثابتان.

ب) اذكر القيمة العظمى، والقيمة الصغرى لـ ٤جا هـ − جتا٢ هـ، حيث ٠ ≤ هـ ≤ ٢π.

تمارين ٢-٧ (١٠)

١٠) إذا علمت أن أ = $\frac{\text{١ − جا هـ}}{\text{٢جتا هـ}}$:

أ) بيّن أن $\frac{\text{١}}{\text{أ}}$ = $\frac{\text{٢(١ + جا هـ)}}{\text{جتا هـ}}$

ب) أوجد قيمتَي كل من جا هـ، جتا هـ بدلالة أ.

ورقة الإجابات ٢-٧ (١، ٢)

تمرين ١: ٢جا٢ س − ٧(١ − جا٢ س) + ٤ ≡ ٩جا٢ س − ٣

تمرين ٢ (أ): جتا س × $\frac{\text{جا س}}{\text{جتا س}}$ ≡ جا س

(ب) $\frac{\text{جا س}}{\text{جتا س}}$ ≡ $\frac{\text{١ − جتا٢ س}}{\text{جا س × جتا س}}$ ، لأن $\frac{\text{١ − جتا٢ س}}{\text{جا س × جتا س}}$ = $\frac{\text{جا٢ س}}{\text{جا س × جتا س}}$ = $\frac{\text{جا س}}{\text{جتا س}}$

(ج) $\frac{\text{جتا}^{٢}\,س}{١ - \text{جا}\,س} = \frac{١ - \text{جا}^{٢}\,س}{١ - \text{جا}\,س} = \frac{(١ - \text{جا}\,س)(١ + \text{جا}\,س)}{١ - \text{جا}\,س} \equiv ١ + \text{جا}\,س$

ورقة الإجابات ٢-٧ (٢ د-و، ٣)

تمرين ٢ (د): $\frac{١ + \text{جا}\,س - \text{جا}^{٢}\,س}{\text{جتا}\,س} = \frac{١ - \text{جا}^{٢}\,س}{\text{جتا}\,س} + \frac{\text{جا}\,س}{\text{جتا}\,س} = \frac{\text{جتا}^{٢}\,س}{\text{جتا}\,س} +$ ظا س ≡ جتا س + ظا س

(هـ) $\frac{\text{جتا}^{٢}\,س - \text{جا}^{٢}\,س}{\text{جتا}\,س + \text{جا}\,س}$ = جتا س − جا س ، فيكون المجموع جا س + جتا س − جا س ≡ جتا س

(و) جتا^{٤} س + جا^{٢} سجتا^{٢} س = جتا^{٢} س(جتا^{٢} س + جا^{٢} س) ≡ جتا^{٢} س

تمرين ٣ (أ): جا^{٢} س + جتا^{٢} س + ٢جا سجتا س ≡ ١ + ٢جا سجتا س

(ب) ٢(١ + جتا س) − (١ + جتا س)^{٢} = (١ + جتا س)(٢ − ١ − جتا س) = (١ + جتا س)(١ − جتا س) = ١ − جتا^{٢} س ≡ جا^{٢} س

ورقة الإجابات ٢-٧ (٣، ٤)

تمرين ٣ (ج): ٢ − (جا^{٢} س + جتا^{٢} س + ٢جا سجتا س) = ٢ − ١ − ٢جا سجتا س = ١ − ٢جا سجتا س ، و(جا س − جتا س)^{٢} = ١ − ٢جا سجتا س

(د) (جتا^{٢} س − ٢)^{٢} − ٣جا^{٢} س = جتا^{٤} س − ٤جتا^{٢} س + ٤ − ٣ + ٣جتا^{٢} س = جتا^{٤} س − جتا^{٢} س + ١ = جتا^{٤} س + جا^{٢} س

تمرين ٤ (أ): جتا٢ س − (١ − جتا٢ س) ≡ ٢جتا٢ س − ١ | (ب) (١ − جا٢ س) − جا٢ س ≡ ١ − ٢جا٢ س

(ج) ظا٢ س − جا٢ س = جا٢ س($\frac{١}{\text{جتا}^{٢}\ \text{س}}$ − ١) = جا٢ س × ظا٢ س

(د) جتا٤ س + جا٢ س − جا٤ س − جتا٢ س = −جتا٢ س(١ − جتا٢ س) + جا٢ س(١ − جا٢ س) = −جتا٢ س جا٢ س + جا٢ س جتا٢ س = ٠

ورقة الإجابات ٢-٧ (٥ أ-د)

أ) البسط = (جتا س − جا س)(جتا س + جا س) فيُختصر المقدار إلى جتا س + جا س

ب) جا٤ س − جتا٤ س = (جا٢ س − جتا٢ س)(جا٢ س + جتا٢ س) = جا٢ س − (١ − جا٢ س) = ٢جا٢ س − ١

ج) $\frac{\text{جتا}^{٤}\ \text{س} - \text{جا}^{٤}\ \text{س}}{\text{جتا}^{٢}\ \text{س}}$ = $\frac{\text{جتا}^{٢}\ \text{س} - \text{جا}^{٢}\ \text{س}}{\text{جتا}^{٢}\ \text{س}}$ = ١ − ظا٢ س

د) $\frac{\text{جتا س}}{\text{ظا س}(١ - \text{جا س})}$ = $\frac{\text{جتا}^{٢}\ \text{س}}{\text{جا س}(١ - \text{جا س})}$ = $\frac{(١ - \text{جا س})(١ + \text{جا س})}{\text{جا س}(١ - \text{جا س})}$ = $\frac{١ + \text{جا س}}{\text{جا س}}$ = $\frac{١}{\text{جا س}}$ + ١

ورقة الإجابات ٢-٧ (٥ هـ-ح)

هـ) اقسم البسط والمقام على جتا س: $\frac{\text{ظا س} - ١}{\text{ظا س} + ١}$

و) $\left(\frac{١}{\text{جا س}} - \frac{\text{جتا س}}{\text{جا س}}\right)^{٢} = \frac{(١ - \text{جتا س})^{٢}}{\text{جا}^{٢}\text{ س}} = \frac{(١ - \text{جتا س})^{٢}}{(١ - \text{جتا س})(١ + \text{جتا س})} = \frac{١ - \text{جتا س}}{١ + \text{جتا س}}$

ز) $\frac{\text{ظا س} + ١}{\text{جا س} \times \text{ظا س} + \text{جتا س}} = \frac{\text{جا س} + \text{جتا س}}{١}$ ، لأن المقام = $\frac{\text{جا}^{٢}\text{ س} + \text{جتا}^{٢}\text{ س}}{\text{جتا س}} = \frac{١}{\text{جتا س}}$ والبسط = $\frac{\text{جا س} + \text{جتا س}}{\text{جتا س}}$

ح) $\frac{\text{جا}^{٢}\text{ س}(١ - \text{جتا}^{٢}\text{ س})}{\text{جتا}^{٢}\text{ س}(١ - \text{جا}^{٢}\text{ س})} = \frac{\text{جا}^{٢}\text{ س} \times \text{جا}^{٢}\text{ س}}{\text{جتا}^{٢}\text{ س} \times \text{جتا}^{٢}\text{ س}} \equiv \text{ظا}^{٤}\text{ س}$

ورقة الإجابات ٢-٧ (٦-١٠)

تمرين ٦: $\frac{١}{\text{جتا س}} - \frac{\text{جتا س}}{١ + \text{جا س}} = \frac{١ + \text{جا س} - \text{جتا}^{٢}\text{ س}}{\text{جتا س}(١ + \text{جا س})} = \frac{\text{جا}^{٢}\text{ س} + \text{جا س}}{\text{جتا س}(١ + \text{جا س})}$

$= \frac{\text{جا س}}{\text{جتا س}} \equiv \text{ظا س}$

تمرين ٧: ٢ + ٢جتا^{٢} س + ٢جا^{٢} س = ٤ ، قيمة ثابتة.

تمرين ٨: أ) ٤ + ٣جا^{٢} س ، أي أ = ٤ ، ب = ٣ | ب) ٤ ≤ د(س) ≤ ٧

تمرين ٩: أ) (جا س + ٢)^{٢} − ٥ ، أي أ = ٢ ، ب = −٥ | ب) القيمة العظمى ٤ ، والصغرى −٤

تمرين ١٠: ب) جا هـ = $\frac{١ - ٤\text{أ}^{٢}}{١ + ٤\text{أ}^{٢}}$ ، جتا هـ = $\frac{٤\text{أ}}{١ + ٤\text{أ}^{٢}}$

ملاحظة: الإجابات من حسابي لأن كتاب الطالب لا يتضمن مفتاح إجابات.

٨-٢ المزيد من المعادلات المثلثية

More trigonometric equations

يستخدم هذا الدرس المتطابقات المثلثيّة للمساعدة على حلّ معادلات مثلثية أكثر عمقًا.

مثال ٢٤

مثال ٢٤

أ) برهن المتطابقة $\frac{١ - \text{ظا}^٢ هـ}{١ + \text{ظا}^٢ هـ} \equiv ٢\text{جتا}^٢ هـ - ١$

ب) حلّ المعادلة $\frac{١ - \text{ظا}^٢ هـ}{١ + \text{ظا}^٢ هـ} = ٥\text{جا } هـ - ٣$ ، حيث $°٠ \le هـ \le °٣٦٠$

حل مثال ٢٤ (أ) ١

الحل

أ) الطرف الأيمن $\equiv \frac{١ - \text{ظا}^٢ هـ}{١ + \text{ظا}^٢ هـ}$ استخدم $\text{ظا } هـ = \frac{\text{جا } هـ}{\text{جتا } هـ}$

الحل (تابع)

$$\equiv \frac{١ - (\frac{\text{جا هـ}}{\text{جتا هـ}})^{٢}}{١ + (\frac{\text{جا هـ}}{\text{جتا هـ}})^{٢}}$$ اضرب كلًّا من البسط والمقام في جتا^{٢} هـ

$$\equiv \frac{\text{جتا}^{٢}\text{ هـ} - \text{جا}^{٢}\text{ هـ}}{\text{جتا}^{٢}\text{ هـ} + \text{جا}^{٢}\text{ هـ}}$$ استخدم جا^{٢} هـ + جتا^{٢} هـ ≡ ١

حل مثال ٢٤ (أ) ٢

≡ جتا^{٢} هـ − جا^{٢} هـ استبدل جا^{٢} هـ بـ (١ − جتا^{٢} هـ)

≡ جتا^{٢} هـ − (١ − جتا^{٢} هـ) بسّط.

≡ ٢جتا^{٢} هـ − ١ وهو الطرف الأيسر.

حل مثال ٢٤ (ب)

ب) $\frac{١ - \text{ظا}^{٢}\text{ هـ}}{١ + \text{ظا}^{٢}\text{ هـ}}$ = ٥جا هـ − ٣ استخدم الجزئية (أ).

٢جتا^{٢} هـ − ١ = ٥جا هـ − ٣

٢جتا^{٢} هـ − ٥جتا هـ + ٢ = ٠ أعد الترتيب لتحصل على معادلة تربيعية بدلالة جتا هـ

٢جتا^{٢} هـ − ٥جتا هـ + ٢ = ٠ حلل إلى العوامل.

(٢جتا هـ − ١)(جتا هـ − ٢) = ٠

إما جتا هـ = $\frac{١}{٢}$ أو جتا هـ = ٢ عند جتا هـ = ٢ لا يوجد حل للمعادلة

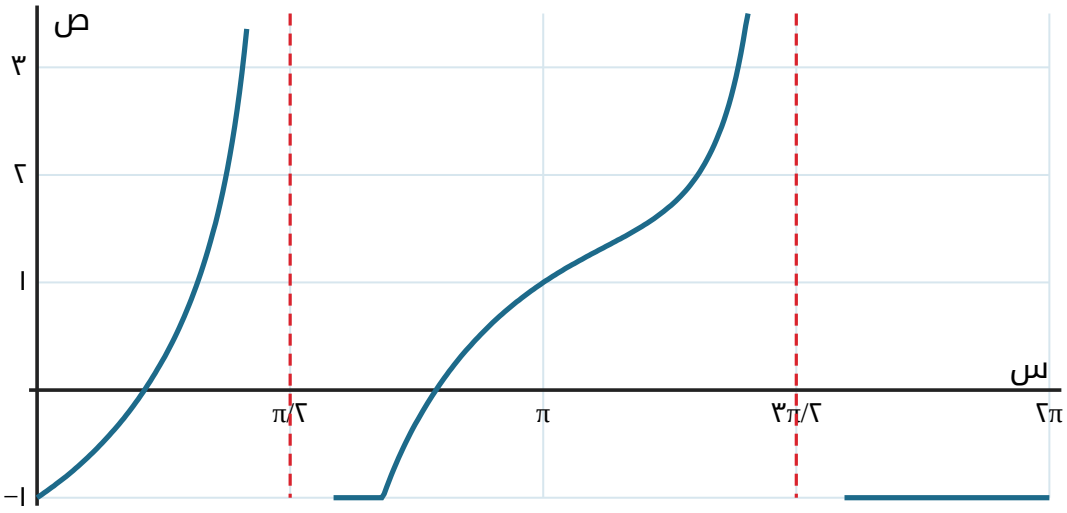
هـ = جتا$^{-١}$ ($\frac{١}{٢}$)

إما هـ = ٦٠° أو هـ = ٣٦٠° − ٦٠° ∴ حلول المعادلة هي: ٦٠° أو ٣٠٠°

مثال ٢٥

مثال ٢٥

يبيّن الرسم الآتي جزءًا من بيان الدالة ص = ظا س − جتا س



أ) بيّن أنه يمكن كتابة المعادلة ظا س − جتا س = ٠ في صورة معادلة تربيعية بدلالة جا س.

ب) استخدم المعادلة التربيعية التي وجدتها في الجزئية (أ) لتحلّ المعادلة ظا س − جتا س = ٠ ، حيث ٠ ≤ س ≤ ٢π.

حل مثال ٢٥ (أ)

أ) ظا س − جتا س = ٠ استبدل ظا س بـ $\frac{\text{جا س}}{\text{جتا س}}$

$\frac{\text{جا س}}{\text{جتا س}}$ − جتا س = ٠ اضرب الطرفَين في جتا س

جا س − جتا^{٢} س = ٠ استبدل جتا^{٢} س بـ (١ − جا^{٢} س)

جا س − (١ − جا^{٢} س) = ٠

جا^{٢} س + جا س − ١ = ٠

حل مثال ٢٥ (ب)

ب) المعادلة التربيعية هي: جا^{٢} س + جا س − ١ = ٠

باستخدام الصيغة التربيعية، حيث أ = ١ ، ب = ١ ، جـ = −١

نحصل على جا س = $\frac{-١ \pm \sqrt{٥}}{٢}$

جا س = ٠٫٦١٨ أو جا س = −١٫٦١٨

جا س = −١٫٦١٨ لا حل لها لأن −١ ≤ جا س ≤ ١

جا س = ٠٫٦١٨ ∴ س = جا$^{-١}$ (٠٫٦١٨) = ٠٫٦٦٦^{ج} أو س = π − ٠٫٦٦٦ = ٢٫٤٨^{ج}

حلّا المعادلة ظا س − جتا س = ٠ هما س = ٠٫٦٦٦^{ج} أو س = ٢٫٤٨^{ج}

تمارين ٢-٨ (أ)

١)

أ) بيّن أنه يمكن كتابة المعادلة جتا هـ + جا هـ = ٥جتا هـ في صورة ظا هـ = ك، حيث ك عدد ثابت.

ب) حلّ المعادلة جتا هـ + جا هـ = ٥جتا هـ، حيث °٠ ≤ هـ ≤ °٣٦٠

تمارين ٢-٨ (ب)

٢)

أ) بيّن أنه يمكن كتابة المعادلة ٣جا^{٢} هـ + ٥جا هـ × جتا هـ = ٢جتا^{٢} هـ في صورة ٣ظا^{٢} هـ + ٥ظا هـ − ٢ = ٠

ب) حلّ المعادلة ٣جا^{٢} هـ + ٥جا هـ × جتا هـ = ٢جتا^{٢} هـ، حيث °٠ ≤ هـ ≤ °١٨٠

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

تمارين ٢-٨ (٣)

٣)

أ) بيّن أنه يمكن كتابة المعادلة ٨جا^{٢} هـ + ٢جتا^{٢} هـ − جتا هـ = ٦ في صورة ٦جتا^{٢} هـ + جتا هـ − ٢ = ٠

ب) حلّ المعادلة ٨جا^{٢} هـ + ٢جتا^{٢} هـ − جتا هـ = ٦، حيث ٠° ≤ هـ ≤ ٣٦٠°

تمارين ٢-٨ (٤)

٤)

أ) بيّن أنه يمكن كتابة المعادلة ٤جا^{٤} هـ + ١٤ = ١٩جتا^{٢} هـ في صورة ٤س^{٢} + ١٩س − ٥ = ٠ ، حيث س = جا^{٢} هـ

ب) حلّ المعادلة ٤جا^{٤} هـ + ١٤ = ١٩جتا^{٢} هـ، حيث ٠ ≤ هـ ≤ ٢π

تمارين ٢-٨ (٥)

٥)

أ) بيّن أنه يمكن كتابة المعادلة جا هـ × ظا هـ = ٣ في صورة جتا^{٢} هـ + ٣جتا هـ − ١ = ٠

ب) حلّ المعادلة جا هـ × ظا هـ = ٣، حيث ٠° ≤ هـ ≤ ٣٦٠°

تمارين ٢-٨ (٦)

٦)

أ) بيّن أنه يمكن كتابة المعادلة ٥(٢جا هـ − جتا هـ) = ٤(جا هـ + ٢جتا هـ) في صورة ظا هـ = $\frac{١٣}{٦}$

ب) حلّ المعادلة ٥(٢جا هـ − جتا هـ) = ٤(جا هـ + ٢جتا هـ)، حيث ٠° ≤ هـ ≤ ٣٦٠°

تمارين ٢-٨ (٧)

٧)

أ) برهن المتطابقة $\frac{\text{جا هـ}}{١ + \text{جتا هـ}} + \frac{١ + \text{جتا هـ}}{\text{جا هـ}} \equiv \frac{٢}{\text{جا هـ}}$

ب) حلّ المعادلة $\frac{\text{جا هـ}}{١ + \text{جتا هـ}} + \frac{١ + \text{جتا هـ}}{\text{جا هـ}} = ١ + ٣\text{جا هـ}$، حيث ٠ ≤ هـ ≤ ٢π

تمارين ٢-٨ (٨)

٨)

أ) برهن المتطابقة $\frac{\text{جتا هـ}}{\text{ظا هـ}(١ + \text{جا هـ})} \equiv \frac{١}{\text{جا هـ}} - ١$

ب) حلّ المعادلة $\frac{\text{جتا هـ}}{\text{ظا هـ}(١ + \text{جا هـ})} = ١$، حيث ٠° ≤ هـ ≤ ٣٦٠°

تمارين ٢-٨ (٩)

٩)

أ) برهن المتطابقة $\frac{١}{١ + \text{جا}\,هـ} + \frac{١}{١ - \text{جا}\,هـ} \equiv \frac{٢}{\text{جتا}^{٢}\,هـ}$

ب) حلّ المعادلة $\text{جتا}\,هـ\left(\frac{١}{١ + \text{جا}\,هـ} + \frac{١}{١ - \text{جا}\,هـ}\right) = ٥$، حيث $٠° \le هـ \le ٣٦٠°$

تمارين ٢-٨ (١٠)

١٠)

أ) برهن المتطابقة $\frac{١ + \text{جتا}\,هـ}{١ - \text{جتا}\,هـ} \equiv \left(\frac{١}{\text{جا}\,هـ} + \frac{١}{\text{ظا}\,هـ}\right)^{٢}$

ب) حلّ المعادلة $\left(\frac{١}{\text{جا}\,هـ} + \frac{١}{\text{ظا}\,هـ}\right)^{٢} = ٢$، حيث $٠° \le هـ \le ٣٦٠°$

تمارين ٢-٨ (١١)

١١)

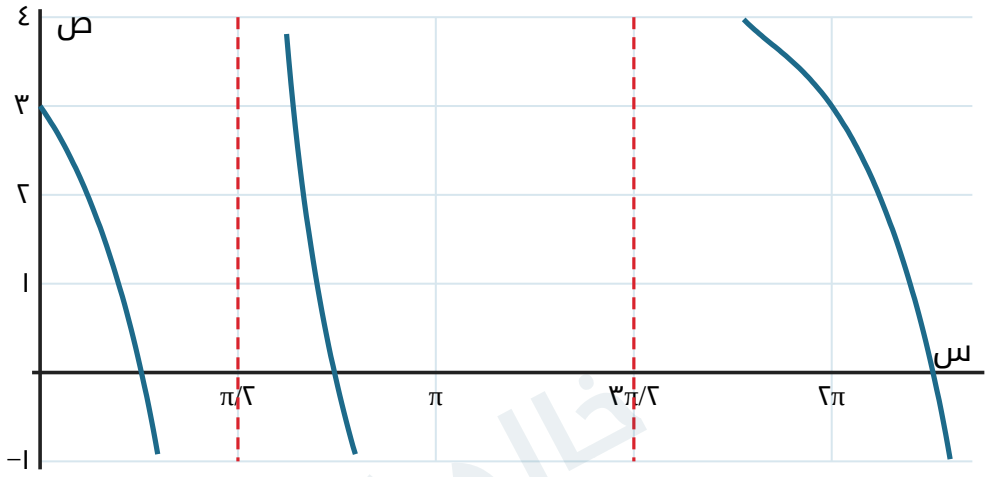
أ) برهن المتطابقة $\text{جتا}^{٤}\,هـ - \text{جا}^{٤}\,هـ \equiv ٢\text{جتا}^{٢}\,هـ - ١$

ب) حلّ المعادلة $\text{جتا}^{٤}\,هـ - \text{جا}^{٤}\,هـ = \frac{١}{٢}$، حيث $٠° \le هـ \le ٣٦٠°$

خالد كمال
khaledmath-curge.sh

تمارين ٢-٨ (١٢)

١٢) يبيّن الرسم الآتي جزءًا من التمثيل البياني للدالة ص = ٣جتا س − ٢ظا س.



أوجد قيم س الثلاث لأقرب ٣ أرقام معنوية حيث يقطع بيان الدالة المحور السيني.

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

ورقة الإجابات ٢-٨ (١-٦)

١: أ) جا هـ = ٤جتا هـ ، فيكون ظا هـ = ٤ ، ك = ٤ | ب) ٧٦°، ٢٥٦°

٢: أ) بالقسمة على جتا^{٢} هـ | ب) ظا هـ = $\frac{١}{٣}$ أو −٢ ، ١٨٫٤°، ١١٦٫٦°

٣: أ) ٨(١ − جتا^{٢} هـ) + ٢جتا^{٢} هـ − جتا هـ − ٦ = ٠ ، أي ٦جتا^{٢} هـ + جتا هـ − ٢ = ٠ | ب) جتا هـ = $\frac{١}{٢}$ أو −$\frac{٢}{٣}$ ، ٦٠°، ١٣١٫٨°، ٢٢٨٫٢°، ٣٠٠°

٤: أ) ٤س^{٢} + ١٩اس − ٥ = ٠ بعد استبدال جتا^{٢} هـ بـ (١ − س) | ب) (٤س − ١)(س + ٥) = ٠ ، س = $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{\pi}{٦}$ ، $\frac{\pi٥}{٦}$ ، $\frac{\pi٧}{٦}$ ، $\frac{\pi١١}{٦}$

٥: أ) جا^{٢} هـ = ٣جتا هـ ، أي جتا^{٢} هـ + ٣جتا هـ − ١ = ٠ | ب) ٧٢,٤°، ٢٨٧,٦°

٦: أ) ١٠جا هـ − ٥جتا هـ = ٤جا هـ + ٨جتا هـ ، ٦جا هـ = ١٣جتا هـ | ب) ٦٥,٢°، ٢٤٥,٢°

ورقة الإجابات ٢-٨ (٧-١٢)

٧: أ) $\frac{\text{جا}^{٢}\text{ هـ} + (١ + \text{جتا هـ})^{٢}}{\text{جا هـ}(١ + \text{جتا هـ})} = \frac{٢ + ٢\text{جتا هـ}}{\text{جا هـ}(١ + \text{جتا هـ})} = \frac{٢}{\text{جا هـ}}$ | ب) ٣جا^{٢} هـ + جا هـ − ٢ = ٠ ، ٠,٧٣ʿ، ٢,٤١ʿ، $\frac{\pi٣}{٢}$

٨: أ) $\frac{\text{جتا}^{٢}\text{ هـ}}{\text{جا هـ}(١ + \text{جا هـ})} = \frac{(١ - \text{جا هـ})(١ + \text{جا هـ})}{\text{جا هـ}(١ + \text{جا هـ})} = \frac{١ - \text{جا هـ}}{\text{جا هـ}}$ | ب) جا هـ = $\frac{١}{٢}$ ، ٣٠°، ١٥٠°

٩: أ) $\frac{(١ - \text{جا هـ}) + (١ + \text{جا هـ})}{١ - \text{جا}^{٢}\text{ هـ}} = \frac{٢}{\text{جتا}^{٢}\text{ هـ}}$ | ب) $\frac{٢}{\text{جتا هـ}}$ = ٥ ، ٦٦,٤°، ٢٩٣,٦°

١٠: أ) $(\frac{\text{جتا هـ} + ١}{\text{جا هـ}})^{٢} = \frac{(١ + \text{جتا هـ})^{٢}}{١ - \text{جتا}^{٢}\text{ هـ}} = \frac{١ + \text{جتا هـ}}{١ - \text{جتا هـ}}$ | ب) جتا هـ = $\frac{١}{٣}$ ، ٧٠,٥°، ٢٨٩,٥°

١١: أ) (جتا^{٢} هـ − جا^{٢} هـ)(جتا^{٢} هـ + جا^{٢} هـ) = ٢جتا^{٢} هـ − ١ | ب) جتا^{٢} هـ = $\frac{٣}{٤}$ ، ٣٠°، ١٥٠°، ٢١٠°، ٣٣٠°

١٢: ٣جتا هـ = ٢ظا هـ ، ٣جا^{٢} هـ + ٢جا هـ − ٣ = ٠ ، (على مدى الرسم ٠ إلى ٧,٤ تقريبًا)
^{ص}٠,٨٠٥ ، ^{ص}٢,٣٤ ، ^{ص}٧,٠٩

ملاحظة: الإجابات من حسابي لأن كتاب الطالب لا يتضمن مفتاح إجابات.

قائمة التحقق من التعلّم والفهم (١)

قيم النسب المثلثية للزوايا الخاصة:

هـ = ٠° = ^{ص}٠ : جا هـ = ٠ ، جتا هـ = ١ ، ظا هـ = ٠

هـ = ٣٠° = $\frac{\pi}{٦}$: جا هـ = $\frac{١}{٢}$ ، جتا هـ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، ظا هـ = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$

هـ = ٤٥° = $\frac{\pi}{٤}$: جا هـ = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، جتا هـ = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، ظا هـ = ١

هـ = ٦٠° = $\frac{\pi}{٣}$: جا هـ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، جتا هـ = $\frac{١}{٢}$ ، ظا هـ = $\sqrt{٣}$

هـ = ٩٠° = $\frac{\pi}{٢}$: جا هـ = ١ ، جتا هـ = ٠ ، ظا هـ غير موجودة

قائمة التحقق (٢)

الزوايا الموجبة والزوايا السالبة:

الزوايا الموجبة هي الزوايا الخاصة المقيسة بعكس اتجاه عقارب الساعة بدءًا من المحور السيني الموجب.

الزوايا السالبة هي الزوايا المقيسة باتجاه عقارب الساعة بدءًا من المحور السيني الموجب.

الإشارات: الربع الأول: الكل (+) ، الثاني: جا (+) ، الثالث: ظا (+) ، الرابع: جتا (+)

قائمة التحقق (٣)

التمثيلات البيانية للدوال المثلثيّة:

بالنسبة إلى دالة الجيب: المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية ، المدى: −١ ≤ ص ≤ ١

بالنسبة إلى دالة جيب التمام: المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية ، المدى: −١ ≤ ص ≤ ١

بالنسبة إلى دالة الظل: المجال: كل الأعداد الحقيقية باستثناء المضاعفات الفردية لـ ٩٠° ، المدى: كل الأعداد الحقيقية

قائمة التحقق (٤)

بيان الدالة ص = أ جا س هو تمدد لبيان الدالة ص = جا س معامله أ، وموازٍ للمحور الصادي.

بيان الدالة ص = جا (أس) هو تمدد لبيان الدالة ص = جا س معامله $\frac{١}{أ}$ ، وموازٍ للمحور السيني.

بيان الدالة ص = أ + جا س هو انسحاب لبيان الدالة ص = جا س بالمتجه (٠ ، أ).

بيان الدالة ص = جا (س + ج) هو انسحاب لبيان الدالة ص = جا س بالمتجه (−ج ، ٠).

قائمة التحقق (٥)

الدوال المثلثيّة العكسية:

ص = جا$^{-١}$ س : المجال: $-١ \le س \le ١$ ، المدى: $-\frac{\pi}{٢} \le$ جا$^{-١}$ س $\le \frac{\pi}{٢}$

ص = جتا$^{-١}$ س : المجال: $-١ \le س \le ١$ ، المدى: $٠ \le$ جتا$^{-١}$ س $\le \pi$

ص = ظا$^{-١}$ س : المجال: س ∈ ع ، المدى: $-\frac{\pi}{٢} <$ ظا$^{-١}$ س $< \frac{\pi}{٢}$

المتطابقات المثلثيّة: ظا س $\equiv \frac{\text{جا س}}{\text{جتا س}}$ | جا^{٢} س + جتا^{٢} س $\equiv ١$

تمارين مراجعة نهاية الوحدة الثانية (١، ٢)

١) يبيّن الرسم جزءًا من التمثيل البياني للدالة ص = أ + ب جا س. أوجد قيمة كل من أ، ب، حيث أ، ب قيم موجبة.

انظر الرسم في كتاب الطالب، الوحدة الثانية، تمارين المراجعة (ص ٩٣): بيان الدالة يمر بالنقطة (٠ ، ١)، وقيمته العظمى ٣ والصغرى −١.

٢) أوجد قيمة س التي تحقق المعادلة جا$^{-١}$ (س − ١) = ظا$^{-١}$ (٣^{ص}).

تمارين المراجعة (٣، ٤)

٣) إذا علمت أن الزاوية هـ حادة، ومقيسة بالراديان، وأن جتا هـ = ك، فاكتب كل عبارة من العبارات الآتية بدلالة ك:

أ جا هـ	**ب** ظا هـ	**ج** جتا (π − هـ)
.....	.....	.....

٤) حل المعادلة جتا$^{-١}$ (٨س^{٤} + ٤اس^{٢} − ١٦) = π.

تمارين المراجعة (٥، ٦، ٧)

٥) حل المعادلة جا (٢س) = ٥جتا (٢س)، حيث ٠° ≤ س ≤ ١٨٠°.

٦) حل المعادلة $\frac{٣\text{اجا}^{٢}\ \text{هـ}}{٢ + \text{جتا هـ}}$ + جتا هـ = ٢، حيث ٠° ≤ هـ ≤ ١٨٠°.

٧) حل المعادلة ٢جتا^{٢} س = ٥جا س − ١، حيث ٠° ≤ س ≤ ٣٦٠°.

تمارين المراجعة (٨)

٨)

أ) ارسم بيان الدالتَين ص = جتا ٢هـ، ص = $\frac{١}{٢}$ حيث ٠ ≤ هـ ≤ π٢

ب) اكتب عدد جذور المعادلة ٢جتا ٢هـ − ١ = ٠ في الفترة ٠ ≤ هـ ≤ π٢

ج) استنتج عدد جذور المعادلة ٢جتا ٢هـ − ١ = ٠ في الفترة ٠ ≤ هـ ≤ ٢π.

تمارين المراجعة (٩، ١٠)

٩)

أ) بيّن أنه يمكن كتابة المعادلة ٢ظا٢ هـ × جا٢ هـ = ١ في صورة ٢جا٤ هـ + جا٢ هـ − ١ = ٠.

ب) حل المعادلة ٢ظا٢ هـ × جا٢ هـ = ١، حيث ٠° ≤ هـ ≤ ٣٦٠°

١٠)

أ) حل المعادلة ٤جا٢ س + ٨جتا س − ٧ = ٠، حيث ٠° ≤ س ≤ ٣٦٠°

ب) أوجد حل المعادلة ٤جا٢ ($\frac{١}{٢}$ هـ) + ٨جتا ($\frac{١}{٢}$ هـ) − ٧ = ٠، حيث ٠° ≤ هـ ≤ ٣٦٠°

تمارين المراجعة (١١)

١١)

أ) برهن المتطابقة $\frac{\text{جا س} \times \text{ظا س}}{١ - \text{جتا س}} + ١ \equiv \frac{١}{\text{جتا س}}$

ب) حل المعادلة $\frac{\text{جا س} \times \text{ظا س}}{١ - \text{جتا س}} + ٢ = ٠$، حيث ٠° ≤ س ≤ ٣٦٠°

تمارين المراجعة (١٢)

١٢)

أ) حل المعادلة $\frac{٢ - \text{جا س}}{١ + ٢\text{جا س}} = \frac{٣}{٤}$، حيث $٠ \geq \text{س} \geq ٢\pi$

ب) حل المعادلة جا س − ٢جتا س = ٢(٢جا س − ٣جتا س)، حيث $-\pi \geq \text{س} \geq ٢\pi$

تمارين المراجعة (١٣)

١٣) تمّ تعريف الدالة د على النحو: د: س ← ٣ − ٢ظا $(\frac{١}{٢}\text{س})$، حيث $٠ \geq \text{س} \geq \pi$:

أ) اذكر مدى الدالة.

ب) أوجد د$(\frac{٢}{٣}\pi)$.

ج) ارسم بيان الدالة ص = د(س).

د) أوجد $\text{د}^{-١}(\text{س})$.

تمارين المراجعة (١٤)

١٤)

أ) حل المعادلة ٢جتا^{٢} هـ = ٣جا هـ، حيث $°٠ \geq \text{هـ} \geq °٣٦٠$

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

ب) أصغر حل موجب للمعادلة ٢جتا^{٢} (نهـ) = ٣جا (نهـ) هو نهـ = ١٠°، حيث ن عدد صحيح موجب. أوجد قيمة ن، ثم أوجد أكبر حل لهذه المعادلة في الفترة ٠° ≤ هـ ≤ ٣٦٠°.

تمارين المراجعة (١٥)

١٥)

أ) بيّن أن $\frac{\text{جا هـ}}{\text{جا هـ + جتا هـ}} + \frac{\text{جتا هـ}}{\text{جا هـ − جتا هـ}} \equiv \frac{١}{\text{جا}^{٢}\text{ هـ − جتا}^{٢}\text{ هـ}}$

ب) حل المعادلة $\frac{\text{جا س}}{\text{جا س + جتا س}} + \frac{\text{جتا س}}{\text{جا س − جتا س}} = ٣$، حيث ٠° ≤ س ≤ ٣٦٠°

تمارين المراجعة (١٦)

١٦)

أ) بيّن أنه يمكن كتابة المعادلة $\frac{٤\text{جتا هـ}}{\text{ظا هـ}} + ١٥ = ٠$ في صورة ٤جا^{٢} هـ − ١٥جا هـ − ٤ = ٠.

ب) حل المعادلة $\frac{٤\text{جتا هـ}}{\text{ظا هـ}} + ١٥ = ٠$، حيث ٠° ≤ هـ ≤ ٣٦٠°

تمارين المراجعة (١٧)

١٧) تمّ تعريف الدالة د على النحو: د: س ← ٥ + ٣جتا $(\frac{١}{٢}$ س)، حيث ٠ ≤ س ≤ ٢π:

أ) حل المعادلة د(س) = ٧ لأقرب منزلتَين عشريتَين.

ب) ارسم بيان الدالة ص = د(س).

ج) لماذا توجد للدالة د(س) دالة عكسية؟ اشرح إجابتك.

د) أوجد د$^{-١}$(س).

ورقة الإجابات: مراجعة الوحدة (١-٥)

١: أ = ١ ، ب = ٢

٢: س − ١ = جا (ظا$^{-١}$ ٣) = $\frac{٣}{\sqrt{١٠}}$ ، فتكون س = ١ + $\frac{٣}{\sqrt{١٠}}$ ≈ ١٫٩٥

٣: أ) $\sqrt{١ - ك^{٢}}$ | ب) $\frac{\sqrt{١ - ك^{٢}}}{ك}$ | ج) −ك

٤: ٨س^{٤} + ١٤س^{٢} − ١٦ = −١ ، (٤س^{٢} − ٣)(٢س^{٢} + ٥) = ٠ ، س = ± $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ (≈ ±٠٫٨٦٦)

٥: ظا ٢س = ٥ ، ٣٩٫٣°، ١٢٩٫٣°

ورقة الإجابات: مراجعة الوحدة (٦-١٠)

٦: ١٣(١ − جتا^{٢} هـ) + جتا هـ(٢ + جتا هـ) = ٢(٢ + جتا هـ) ، جتا^{٢} هـ = $\frac{٣}{٤}$ ، ٣٠°، ١٥٠°

٧: ٢جا^{٢} س + ٥جا س − ٣ = ٠ ، جا س = $\frac{١}{٢}$ ، ٣٠°، ١٥٠°

٨: ب) ٤ جذور | ج) ٢٠ جذرًا

٩: ٢جا^{٤} هـ = جتا^{٢} هـ = ١ − جا^{٢} هـ | ب) جا^{٢} هـ = $\frac{١}{٢}$ ، ٤٥°، ١٣٥°، ٢٢٥°، ٣١٥°

١٠: أ) ٤جتا^{٢} س − ٨جتا س + ٣ = ٠ ، جتا س = $\frac{١}{٢}$ ، ٦٠°، ٣٠٠° | ب) جتا ($\frac{١}{٢}$ هـ) = $\frac{١}{٢}$ ، هـ = ١٢٠°

ورقة الإجابات: مراجعة الوحدة (١١-١٧)

١١: أ) $\frac{\text{جا}^{٢}\text{ س}}{\text{جتا س}(١ - \text{جتا س})} = \frac{١ + \text{جتا س}}{\text{جتا س}} \equiv \frac{١}{\text{جتا س}} + ١$ | ب) جتا س = $-\frac{١}{٣}$ ، ١٠٩٫٥°، ٢٥٠٫٥°

١٢: أ) جا س = $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{\pi}{٦}$ ، $\frac{\pi ٥}{٦}$ | ب) ظا س = $\frac{٤}{٣}$ ، −٢٫٢١^{ص}، ٠٫٩٢٧^{ص}، ٤٫٠٧^{ص}

١٣: أ) د(س) ≥ ٣ | ب) ٣ − ٢$\sqrt{٣}$ | د) د$^{-١}$(س) = ٢ظا$^{-١}$ ($\frac{٣ - \text{س}}{٢}$) ، س ≥ ٣

١٤: أ) جا س = $\frac{١}{٢}$ ، ٣٠°، ١٥٠° | ب) ن = ٣ ، أكبر حل هـ = ٢٩٠°

١٥: ب) جا^{٢} س − جتا^{٢} س = $\frac{١}{٣}$ ، ٥٤٫٧°، ١٢٥٫٣°، ٢٣٤٫٧°، ٣٠٥٫٣°

١٦: أ) ٤جتا^{٢} هـ + ١٥جا هـ = ٠ ، أي ٤جا^{٢} هـ − ١٥جا هـ − ٤ = ٠ | ب) جا هـ = $-\frac{١}{٤}$ ،

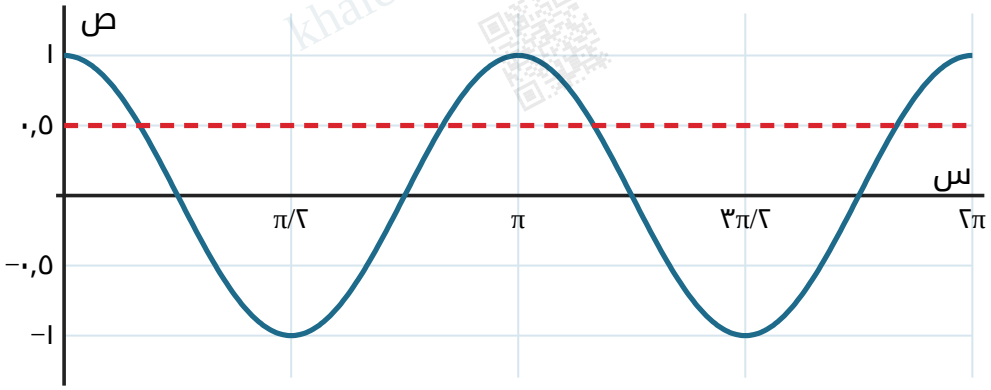
°١٩٤٫٥ ،°٣٤٥٫٥

١٧: أ) ١٫٦٨^{ص} | ج) د واحد إلى واحد على المجال المعطى | د) د$^{-١}$(س) = ٢جتا$^{-١}$ ($\frac{س - ٥}{٣}$) ، ٢ ≤ س ≤ ٨

ملاحظة: الإجابات من حسابي لأن كتاب الطالب لا يتضمن مفتاح إجابات (الراديان لأقرب ٣ أرقام معنوية).

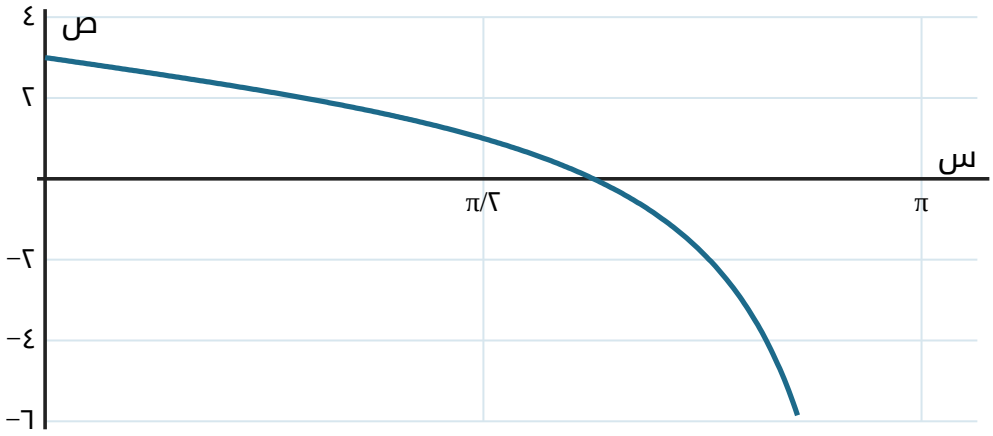
رسومات إجابات المراجعة (٨، ١٣)

تمرين ٨ (أ): ص = جتا ٢هـ (أزرق) ، ص = $\frac{١}{٢}$ (أحمر).



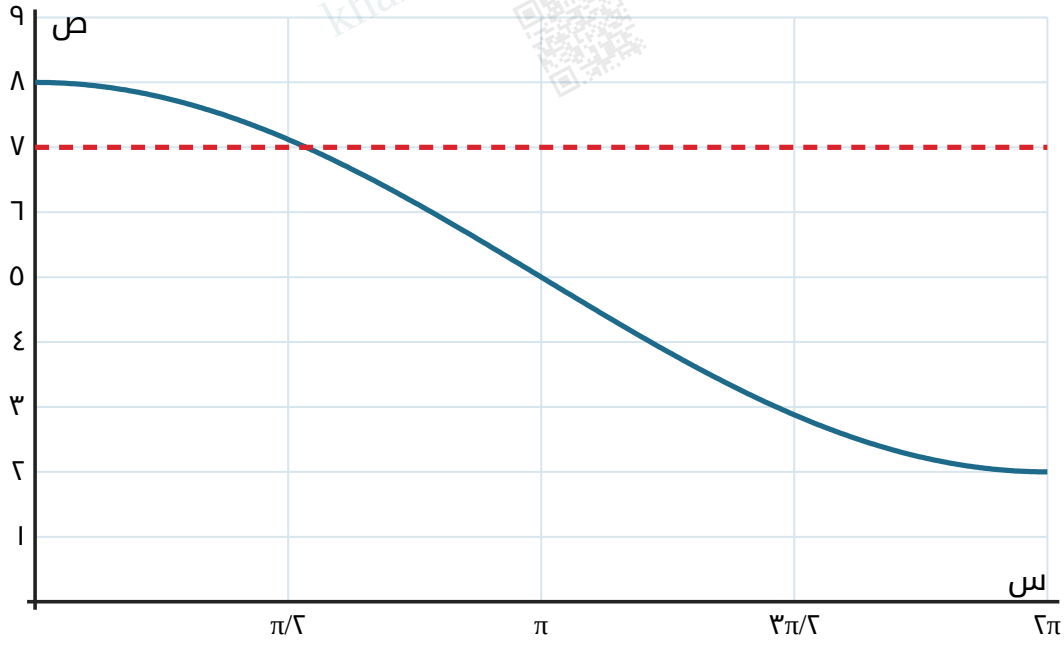
خالد كمال
khaled-math.surge.sh

تمرين ١٣ (ج): ص = ٣ − ٢ظا ($\frac{١}{٢}$ س) ، ٠ ≤ س < π.



رسم إجابة المراجعة (١٧)

تمرين ١٧ (ب): ص = ٥ + ٣جتا ($\frac{١}{٢}$ س) ، ٠ ≤ س ≤ ٢π.



ملاحظة: الإجابات والرسوم من حسابي لأن كتاب الطالب لا يتضمن مفتاح إجابات.