١-١ الراديان

الراديان وحدة لقياس الزاوية في النظام الدولي. الراديان هو قياس زاوية مركزية تحصر قوسًا طوله يساوي طول نصف قطر الدائرة (نق). يُرمز له بالرمز (ˁ) أو يُكتب بدلالة π.

النتائج الأساسية

نتيجة ١: القوس الذي طوله ١ نق يقابل زاوية مركزية قياسها ١ راديان.

نتيجة ٢: محيط الدائرة = ٢π نق، فتكون: ٢π راديان = ٣٦٠°،
أي أن π راديان = ١٨٠°.

نتيجة ٣ (التحويل):

$$\frac{\text{قياس الزاوية بالراديان}}{\pi} = \frac{\text{قياس الزاوية بالدرجات}}{١٨٠^\circ}$$

من الدرجات إلى الراديان: اضرب في $\frac{\pi}{١٨٠^\circ}$

من الراديان إلى الدرجات: اضرب في $\frac{١٨٠^\circ}{\pi}$

خالد كمال
khaled-math-page.sh

١ راديان ≈ ٥٧٫٣° ١° ≈ ٠٫٠١٧٤٥ راديان

١-١ الراديان (تابع)

زوايا يجب حفظها

درجة	٠°	٣٠°	٤٥°	٦٠°	٩٠°	١٨٠°	٢٧٠°	٣٦٠°
راديان	٠	$\frac{\pi}{٦}$	$\frac{\pi}{٤}$	$\frac{\pi}{٣}$	$\frac{\pi}{٢}$	π	$\frac{\pi ٣}{٢}$	$\pi ٢$

الآلة الحاسبة: تأكد من وضعية RAD عند التعامل بالراديان، واستخدم مفتاح DRG للتبديل بين الدرجات والراديان. وللعودة للدرجات اضبط وضعية DEG.

أمثلة محلولة

مثال ١

(أ) حوّل ٦٠° إلى راديان، واكتب الناتج بدلالة π.

الطريقة ١: $٦٠° = ٦٠ \times \frac{\pi}{١٨٠} = \frac{\pi}{٣}$

الطريقة ٢: $\pi = ١٨٠° \leftarrow ٦٠° = \frac{١٨٠°}{٣} = \frac{\pi}{٣}$

(ب) حوّل $\frac{\pi ٥}{٩}$ إلى درجات.

الطريقة ١: $\frac{\pi ٥}{٩} = \frac{\pi ٥}{٩} \times \frac{١٨٠°}{\pi} = ١٠٠°$

الطريقة ٢: $\pi = ١٨٠° \leftarrow ٢٠° = \frac{\pi}{٩} \leftarrow \frac{\pi ٥}{٩} = ١٠٠°$

مثال ٢

في المثلث أ ب ج القائم الزاوية في ب: ب ج = ١٠ سم، قياس الزاوية أ = ٠٫٦ راديان. أوجد طول أج مقربًا إلى أقرب منزلة عشرية واحدة.

$$\text{جا}(٠٫٦^{ع}) = \frac{١٠}{\text{أج}} \leftarrow \text{أج} = \frac{١٠}{\text{جا}(٠٫٦^{ع})} \approx ١٧٫٧ \text{ سم}$$

(استخدم وضعية RAD في الآلة الحاسبة)

حاول بنفسك

حوّل ١٥٠° إلى راديان، ثم حوّل $\frac{\pi ٧}{١٢}$ إلى درجات.

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

تمارين ١-١

١) حوّل قياس كل زاوية من الزوايا الآتية من الدرجات إلى الراديان، واكتب الناتج بدلالة **π**:

أ	ب	ج
٢٠°	٤٠°	٢٥°
.....	.....	.....

د ٥٠°	هـ ٥°	و ١٥٠°
ز ١٣٥°	ح ٢١٠°	ط ٢٢٥°
ي ٣٠٠°	ك ٦٥°	ل ٥٤٠°
م ٩°	ن ٣٥°	س ٦٠٠°

تمارين ١-١ (تابع)

٢) حوّل قياس كل زاوية من الزوايا الآتية من الراديان إلى الدرجات:

أ $\frac{\pi}{٢}$	ب $\frac{\pi}{٣}$	ج $\frac{\pi}{٦}$
د $\frac{\pi}{١٢}$	هـ $\frac{\pi ٤}{٣}$	و $\frac{\pi ٤}{٩}$

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

ز $\frac{\pi ٣}{١٠}$	ح $\frac{\pi ٧}{١٢}$	ط $\frac{\pi ٩}{٢٠}$ .....
ي $\frac{\pi ٩}{٢}$	ك $\frac{\pi ٧}{٥}$	ل $\frac{\pi ٤}{١٥}$ .....
م $\frac{\pi ٥}{٤}$	ن $\frac{\pi ٧}{٣}$	س $\frac{\pi ٩}{٨}$ .....

خالد كمال
khaled-math.surge.sh

الإجابات النموذجية · تمارين ١-١

١) من الدرجات إلى الراديان:

أ $\frac{\pi}{٩}$	ب $\frac{\pi ٢}{٩}$	ج $\frac{\pi ٥}{٣٦}$
د $\frac{\pi ٥}{١٨}$	هـ $\frac{\pi}{٣٦}$	و $\frac{\pi ٥}{٦}$
ز $\frac{\pi ٣}{٤}$	ح $\frac{\pi ٧}{٦}$	ط $\frac{\pi ٥}{٤}$

ي $\frac{5\pi}{3}$	ك $\frac{13\pi}{36}$	ل 3π
م $\frac{\pi}{20}$	ن $\frac{7\pi}{36}$	س $\frac{10\pi}{3}$

الإجابات النموذجية (تابع)

٢) من الراديان إلى الدرجات:

أ ٩٠°	ب ٦٠°	ج ٣٠°
د ١٥°	هـ ٢٤٠°	و ٨٠°
ز ٥٤°	ح ١٠٥°	ط ٨١°
ي ٨١٠°	ك ٢٥٢°	ل ٤٨°
م ٢٢٥°	ن ٤٢٠°	س ٢٠٢٫٥°

الإجابات محسوبة من القاعدة: الراديان = الدرجات × π ÷ ١٨٠، والدرجات = الراديان × ١٨٠ ÷ π.

خالد كمال
khaledmath.surge.sh

١-٢ طول القوس

الراديان الذي درسناه يعني: القوس الذي طوله يساوي نصف قطر الدائرة (نق) يقابل زاوية مركزية قياسها ١ راديان. وإذا قابل قوس زاوية مركزية قياسها هـ^{ء} فإن طوله يساوي نق × هـ^{ء}.

النتيجة

نتيجة ٤: طول القوس = نق × هـ^{ء}

حيث هـ قياس الزاوية المركزية بالراديان.

انتبه: إذا أُعطيت الزاوية بالدرجات فحوّلها إلى راديان أولًا (اضرب في $\frac{\pi}{١٨٠^\circ}$).

أمثلة محلولة

مثال ٣

مثال ٣

قطاع دائري قياس زاويته المركزية $\frac{\pi}{٣}$ في دائرة نصف قطرها ١٥ سم. أوجد طول قوس القطاع بدلالة π.

طول القوس = نق × هـ^{ء} = ١٥ × $\frac{\pi}{٣}$ = ٥π سم.

مثال ٤

قطاع دائري قياس زاويته ١,٥ ء يحصر قوسًا طوله ١٢ سم. أوجد طول نصف قطر القطاع.

طول القوس = نق × هـ ء

١٢ = نق × ١,٥

نق = ٨ سم.

مثال ٥

مثال ٥

المثلث أ ب ج متطابق الضلعين حيث أ ج = ج ب = ٨ سم. ج ل قوس في دائرة مركزها ب (النقطة ل على القطعة أ ب)، وقياس الزاوية ج ب أ = ٠,٩ ء. أوجد: (أ) طول القوس ج ل. (ب) طول أ ل. (ج) محيط المنطقة المظللة (القوس ج ل مع القطعتين أ ج و أ ل).

(أ) طول القوس ج ل = نق × هـ ء = ٨ × ٠,٩ = ٧,٢ سم.

(ب) أ ب = ٢ × ٨ × جتا(٠,٩ ء) ≈ ٩,٩٥ سم، و ب ل = ٨ سم

أ ل = أ ب − ل ب = ٩,٩٥ − ٨ = ١,٩٥ سم.

(ج) المحيط = ٧,٢ + ٨ + ١,٩٥ = ١٧,١٥ سم.

(الشكل في الكتاب صفحة ٢٤)

khaled-math.surgeon

حاول بنفسك

قطاع دائري نصف قطره ٦ سم وقياس زاويته $\frac{\pi}{٤}$. أوجد طول قوسه بدلالة π.

تمارين ١-٢

١) أوجد طول القوس في كل قطاع دائري من القطاعات الآتية بدلالة π:

أ نق = ٨ سم ، هـ = $\frac{\pi}{٤}$

ب نق = ٧ سم ، هـ = $\frac{\pi ٣}{٧}$

ج نق = ١٦ سم ، هـ = $\frac{\pi ٣}{٨}$

د نق = ٢٤ سم ، هـ = $\frac{\pi ٧}{٦}$

خالد كمال
khaled-math-forge.sh

٢) أوجد طول القوس في كل قطاع دائري من القطاعين أدناه:

أ نق = ١٠ سم ، هـ = ١٫٣ ^{ء}

.....

ب نق = ٣٫٥ سم ، هـ = ٠٫٦٥ ^{ء}

.....

تمارين ١-٢ (تابع)

٣) أوجد قياس زاوية القطاع الدائري بالراديان، حيث:

أ نق = ١٠ سم ، طول القوس ٥ سم

.....

ب نق = ١٢ سم ، طول القوس ٩٫٦ سم

.....

٤) عجلة دوّارة عملاقة قطرها ١٥٨٫٥ متر. أوجد المسافة التي يقطعها رجل يجلس في عربة موجودة على محيط العجلة إذا دارت العجلة بزاوية قياسها $\frac{\pi}{١٦}$.

.....

باقي التمارين (٥ إلى ٩) فيها أشكال، وهي في كتاب الطالب صفحة ٢٦ و ٢٧.

الإجابات النموذجية · تمارين ١-٢

١)

أ $\pi ٢$ سم	ب $\pi ٣$ سم
ج $\pi ٦$ سم	د $\pi ٢٨$ سم

٢)

أ ١٣ سم	ب ٢,٢٧٥ سم

٣)

أ $٠,٥^{ء}$	ب $٠,٨^{ء}$

٤) نق = ٧٩,٢٥ م ← المسافة = $٧٩,٢٥ \times \frac{\pi}{١٦} \approx ١٥,٦$ م

١-٣ مساحة القطاع الدائري

مساحة القطاع الدائري تتناسب مع زاويته المركزية:

$$\frac{\text{مساحة القطاع}}{\text{مساحة الدائرة}} = \frac{\text{قياس زاوية القطاع}}{\text{قياس زاوية الدورة الكاملة}}$$ ، وبالراديان:

$$\frac{\text{مساحة القطاع}}{\pi \text{ نق}^{٢}} = \frac{\text{هـ}^{ء}}{\pi ٢}$$

النتيجة

نتيجة ٥: مساحة القطاع الدائري = $\frac{١}{٢}$ نق^{٢} هـ^{ء}

للتذكير: طول القوس = نق × هـ^{ع} ، ومساحة القطاع = $\frac{١}{٢}$ نق^{٢} هـ^{ع} (هـ بالراديان دائمًا).

أمثلة محلولة

مثال ٦

أوجد بدلالة π مساحة القطاع الدائري الذي زاويته المركزية $\frac{\pi}{٦}$ في دائرة طول نصف قطرها ٩ سم.

المساحة = $\frac{١}{٢}$ نق^{٢} هـ^{ع} = $\frac{١}{٢}$ × ٩^{٢} × $\frac{\pi}{٦}$ = $\frac{\pi ٢٧}{٤}$ سم^{٢}.

مثال ٧

دائرة مركزها م ونصف قطرها ٦ سم، أ ب وتر في الدائرة، وقياس الزاوية أ م ب = ١٫٢ ^{ع}. أوجد: (أ) مساحة القطاع الدائري أ م ب. (ب) مساحة المثلث أ م ب. (ج) مساحة القطعة الدائرية المظللة (الصغرى). (د) مساحة القطعة الدائرية غير المظللة (الكبرى).

(أ) $\frac{١}{٢}$ × ٦^{٢} × ١٫٢ = ٢١٫٦ سم^{٢}

(ب) $\frac{١}{٢}$ × ٦ × ٦ × جا(١٫٢ ^{ع}) ≈ ١٦٫٨ سم^{٢}

(ج) ٢١٫٦ − ١٦٫٨ = ٤٫٨ سم^{٢}

(د) π × ٦^{٢} − ٤٫٨ ≈ ١٠٨٫٣ سم^{٢}

(الشكل في الكتاب صفحة ٢٨)

تمارين ١-٣

١) أوجد مساحة كل قطاع من القطاعات الدائرية الآتية بدلالة π:

أ نق = ١٢ سم ، هـ = $\frac{\pi}{٦}$

ب نق = ١٠ سم ، هـ = $\frac{\pi ٢}{٥}$

ج نق = ٤,٥ سم ، هـ = $\frac{\pi ٢}{٩}$

د نق = ٩ سم ، هـ = $\frac{\pi ٤}{٣}$

تمارين ١-٣ (تابع)

٢) أوجد مساحة كل قطاع من القطاعين الدائريين الآتيين:

أ نق = ٣٤ سم ، هـ = $١,٥^{ء}$

ب نق = ٢,٦ سم ، هـ = $٠,٩^{ء}$

٣) أوجد زاوية كل قطاع من القطاعين الدائريين الآتيين بالراديان:

أ نق = ٤ سم ، المساحة ٩ سم^{٢}

ب نق = ٦ سم ، المساحة ٢٧ سم^{٢}

خالد كمال
khaled-maths-surge.sh

تمارين ١-٣ (تابع)

٤) أ م ب قطاع دائري في دائرة مركزها م، ونصف قطرها ٨ سم، طول القوس أ ب يساوي ١٠ سم. أوجد: (أ) قياس الزاوية أ م ب بالراديان. (ب) مساحة القطاع الدائري أ م ب.

باقي التمارين (٥ إلى ١٣) فيها أشكال، وهي في كتاب الطالب صفحة ٣٠ إلى ٣٣.

الإجابات النموذجية · تمارين ١-٣

١)

أ ١٢π سم²	ب ٢٠π سم²
ج ٢٫٢٥π سم²	د ٥٤π سم²

٢)

أ ٨٦٧ سم²	ب ٣٫٠٤ سم²

٣)

أ ١٫١٢٥ ؏	ب ١٫٥ ؏

٤) (أ) هـ = $\frac{١٠}{٨}$ = ١٫٢٥ ؏ (ب) المساحة = $\frac{١}{٢}$ × ٨ × ١٠ = ٤٠ سم^{٢}

قائمة التحقق من التعلم والفهم

الراديان والدرجات

الراديان هو قياس زاوية مركزية تحصر قوسًا طوله يساوي طول نصف قطر الدائرة، ويرمز إليه بالرمز (؏).

π = ١٨٠°

للتحويل إلى الراديان اضرب في $\frac{\pi}{١٨٠°}$

للتحويل إلى الدرجات اضرب في $\frac{١٨٠°}{\pi}$

خالد كمال
khaled-math.edge.sh

طول القوس ومساحة القطاع الدائري

طول القوس = نق × هـ ؏

مساحة القطاع الدائري = $\frac{١}{٢}$ نق^{٢} هـ ؏

تمارين مراجعة نهاية الوحدة الأولى (٥ أسئلة بأشكال) في كتاب الطالب صفحة ٣٤ و ٣٥.